INSTITUTO POLITÉCNICO
DE VIANA DO CASTELO

Marta Filipa da Costa Pinheiro

O PENSAMENTO ALGÉBRICO EM CONTEXTOS VISUAIS:
Um estudo no 6.º ano de escolaridade

Nome do Curso de Mestrado
Mestrado em Educação
Especialidade em Didática da Matemática e das Ciências

Trabalho efetuado sob a orientação da
Professora Doutora Ana Cristina Coelho Barbosa

Julho de 2013

AGRADECIMENTOS

A todos aqueles que de alguma forma contribuíram para desenvolvimento deste trabalho, quero prestar o meu agradecimento.

À minha orientadora, Professora Doutora Ana Barbosa, pelo apoio e orientação na realização deste estudo. Pela sua disponibilidade, pelo empenho e interesse com que o acompanhou e pelos comentários, sugestões e recomendações, contributos fundamentais na construção do mesmo.

Aos alunos intervenientes neste estudo e ao professor da turma, pela disponibilidade, colaboração e empenho revelado.

Aos professores que realizaram a análise crítica das tarefas propostas neste estudo, pela disponibilidade e observações realizadas.

Aos meus colegas de trabalho que, de alguma forma, deram o seu contributo para que este estudo pudesse ser implementado, pela sua disponibilidade e interesse.

Aos colegas do grupo de Mestrado pela simpatia e apoio.

À minha família, por todo o apoio e carinho.

Aos meus pais, pelo acompanhamento, incentivo e carinho, pela disponibilidade demonstrada e pela ajuda dada.

À minha irmã, por todo o apoio prestado no desenvolvimento deste trabalho, pela partilha de saberes, pelo incentivo e por ter sido fiel companheira.

Ao Paulo, pelo apoio incondicional, pelo incentivo e compreensão e por ter estado sempre presente.

Ao meu filho, pelo incentivo que me deu, pela força que me transmitiu com a sua alegria e carinho e pela sua compreensão.

RESUMO

A Álgebra tem vindo a ser reconhecida como fundamental no currículo de Matemática, sendo defendido, neste âmbito, o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos desde os primeiros anos de escolaridade. Por outro lado, a visualização tem sido cada vez mais valorizada no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, na medida em que se está a abandonar a conotação de mero fim ilustrativo, para passar a ser reconhecida como uma componente fundamental do raciocínio, da resolução de problemas e da demonstração. Assim, este estudo pretende compreender como se caracteriza o pensamento algébrico de alunos do 6.º ano de escolaridade no âmbito de contextos visuais. Com base nesta problemática, foram definidas as seguintes questões de investigação: (1) Que aspetos do pensamento algébrico são evidenciados em contextos visuais?; (2) Que tipo de estratégias utilizam os alunos no processo de generalização nestes contextos?; (3) Que dificuldades são evidenciadas pelos alunos nestes contextos?; (4) Que razões poderão explicar estas dificuldades?

Para a concretização deste estudo, optou-se por uma investigação de natureza qualitativa, seguindo um design de estudo de caso, de natureza descritiva e interpretativa, tendo sido estudados dois alunos em contexto turma. Elaborou-se uma proposta didática, baseada no trabalho desenvolvido por Vale e colaboradores no Projeto Matemática e Padrões no ensino básico: perspetivas e experiências curriculares de alunos e professores, e no Programa de Matemática do Ensino Básico, organizada em: contagens visuais; estudo de sequências de repetição e de crescimento; e problemas com padrões. A recolha de dados foi realizada numa turma de 6.º ano de escolaridade, em que a investigadora assumiu o papel de observadora participante, técnica que foi complementada com entrevistas, questionários, gravações áudio e vídeo e análise documental.

A análise dos dados permitiu verificar que, tarefas de exploração de padrões em contextos figurativos revelaram-se potenciadoras do desenvolvimento do pensamento algébrico nos três aspetos que o compõem: padrões e relações; generalização; e simbolização. Constatou-se, ainda, que tarefas desta natureza proporcionam a utilização de variadas estratégias de generalização, algumas de natureza visual e outras de natureza não visual. Os alunos que suportaram o seu raciocínio no contexto figurativo conseguiram obter mais sucesso e revelaram maior compreensão das relações entre as variáveis dependente e independente.

Palavras-chave: Pensamento algébrico, Visualização, Generalização, Proposta didática

ABSTRACT

Algebra has been recognized as fundamental in the mathematics curriculum, being stated the relevance of the development of algebraic thinking in students from early years. On the other hand, there has been a growing appreciation of visualization in the teaching and learning of Mathematics, once the connotation with mere illustrative purposes is being abandoned, to be recognized as a fundamental component of reasoning, problem solving and proof.

Thus, this study aims to understand how algebraic thinking is characterized in 6th grade students working in visual contexts. To understand this problem, the following research questions were defined: (1) What aspects of algebraic thinking are evident in visual contexts?; (2) What kind of strategies students use in the process of generalization in visual contexts?; (3) What difficulties are evidenced by students in these contexts?; (4) What reasons may explain these difficulties?

To implement this study, we opted for a qualitative research, following a case study design, of descriptive and interpretative nature, in which two students were studied in the class context. A didactical proposal was elaborated, based on the proposal presented by Vale and colleagues, developed throughout the Project Mathematics and Patterns in basic education: perspectives and curricular experiences of students and teachers, and also based on the Mathematics Curriculum for Basic Education, organized in: visual counting; study of repetition and growth patterns; and patterning problems. Data collection was carried out in a 6th grade class, in which the researcher assumed the role of participant observer, technique completed with interviews, questionnaires, audio and video recordings and document analysis.

Data analysis has shown that tasks involving the exploration of patterns in figurative contexts proved to enhance the development of algebraic thinking in the three aspects, comprising: patterns and relationships; generalization; and symbolization. It was also found that, tasks of this nature provide different strategies of generalization, some of visual nature and others of non-visual nature. Students who bore his reasoning in the figurative context achieved more success and showed better understanding of the relationships between the dependent and independent variables.

Keywords: Algebraic thinking, Visualization, Generalization, Didactical proposal

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS

DGIDC – Direção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular

ME – Ministério da Educação

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics

PMEB – Programa de Matemática do Ensino Básico

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO

Neste capítulo, constituído por três secções, apresenta-se o tema em estudo, salientando-se a sua pertinência, define-se o problema, bem como as questões que o orientam e, por fim, expõe-se a organização geral do documento.

Pertinência do estudo

Com a generalização do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) no ano letivo 2009/2010, verificaram-se diversas alterações no currículo português de Matemática destes níveis de ensino, em particular ao nível da Álgebra, sendo introduzida como tema matemático no 2.º ciclo, a par dos Números e Operações, da Geometria e da Organização e Tratamento de Dados. Assim, o pensamento algébrico passou a ser um dos quatro eixos fundamentais em torno dos quais se desenvolve o processo de ensino-aprendizagem. Nesta linha, já Kaput (1999) vinha defendendo a introdução do pensamento algébrico no currículo de Matemática logo a partir dos primeiros anos de escolaridade. Esta valorização da Álgebra, desde cedo, vai de encontro ao que é referido pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) na publicação *Princípios e Normas para a Matemática Escolar,* ao considerar que a Álgebra se relaciona com os números, com a geometria e a análise de dados, contribuindo para unificar o currículo e sendo considerada um fio condutor curricular desde os primeiros anos de escolaridade (NCTM, 2007). Surge uma nova visão da Álgebra, que se distancia da visão tradicional que a conotava com a resolução de equações e a simplificação de expressões algébricas (Kaput, 1999; NCTM, 2007), passando a ser vista como uma forma de pensamento acerca de situações matemáticas (Kieran, 2007).

Verifica-se que no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) é dada especial atenção ao pensamento algébrico, evidenciado no 2º e 3º ciclos através do tema Álgebra, mas também em vários objetivos delineados para o 1º ciclo. Darley e Leapard (2010) consideram o pensamento algébrico como uma prioridade na aula de Matemática de hoje, sendo importante o desenvolvimento das capacidades dos alunos para pensar algebricamente.

É reconhecido que o trabalho com padrões permite a uma aprendizagem mais significativa da Matemática, contribuindo para a construção de uma imagem positiva da mesma, tornando os alunos mais confiantes e confortáveis na atividade que desenvolvem (Vale, Barbosa, Borralho, Barbosa, Cabrita, Fonseca & Pimentel, 2011a; Smith, Hillen & Catania, 2007). A exploração de tarefas que envolvam o estudo de padrões tem vindo a ser recomendada para a introdução da Álgebra nos primeiros anos (Driscoll, 1999; NCTM, 2007; Stacey & Macgregor, 2001), sendo um importante veículo para o desenvolvimento do pensamento algébrico (NCTM, 2007). O trabalho com padrões tem especial impacto na capacidade de generalizar e consequentemente no desenvolvimento do pensamento algébrico, tendo vindo a ser defendido por vários autores (Orton & Orton, 1999; Ponte, 2005a; Vale, et al., 2011a) afirmando-se, por isso como um caminho para abordar a Álgebra.

É de salientar que o trabalho com padrões figurativos permite desenvolver nos alunos a capacidade de generalizar e de representar relações (Orton, Orton & Roper, 1999). Esta ideia é consistente com o que Vale, Pimentel, Alvarenga e Fão (2011b) referem, defendendo que tarefas apresentadas em contextos figurativos são um bom ponto de partida para o desenvolvimento do pensamento algébrico considerando a visualização como crucial na aprendizagem da Matemática. É reconhecido o potencial dos padrões figurativos de crescimento na procura de generalizações (Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2010) e no desenvolvimento do pensamento algébrico (Billings, 2008; Billings, Tiedt & Slater, 2007) assim como é reconhecida a sua importância na transição da aritmética para a álgebra (Vale et al., 2011a). Verifica-se que existe um realce no trabalho em contexto visual como forma do desenvolvimento do pensamento algébrico, sendo defendido por Mason (1996) que os alunos deveriam recorrer à visualização para facilitar a generalização.

A introdução da Álgebra como tema matemático no 2.º ciclo representa um desafio para os professores deste nível de ensino, na medida em que o propósito principal de ensino prende-se com "desenvolver nos alunos o pensamento algébrico, bem como a sua capacidade de representar simbolicamente situações matemáticas e não matemáticas e de resolver problemas em contextos diversos" (ME-DGIDC, 2007, p. 40). Tendo em conta que o principal propósito do tema Álgebra é o desenvolvimento do pensamento algébrico, que por sua vez se centra na generalização e na simbolização (Kaput, Blanton, & Moreno, 2008), afigura-se um grande desafio para os professores de matemática, já que são reconhecidas as dificuldades dos alunos na generalização de padrões e na formulação da respetiva expressão algébrica da mesma (English & Warren, 1998). Consciente desta realidade, surge a motivação para o aprofundamento desta temática, especificamente do desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do 2.º ciclo, com incidência em contextos visuais, quer pelo repto lançado pelo Programa de Matemática do Ensino Básico aos professores, quer pela motivação pessoal da investigadora, que adveio do destaque dado à aprendizagem da Álgebra. Desta forma, o desenvolvimento deste estudo, para além da relevância ao nível da literatura explanada, tem relevância ao nível pessoal, já que permitirá aprofundar o conhecimento na área da Educação Matemática e contribuirá para o desenvolvimento profissional da investigadora.

Problema e questões do estudo

Atendendo às ideias explicitadas, nomeadamente a valorização da Álgebra e do pensamento algébrico patente nos mais recentes documentos curriculares, e o contributo das tarefas centradas na exploração de padrões em contextos figurativos para o desenvolvimento do mesmo, surge o problema deste estudo: como se caracteriza o pensamento algébrico de alunos do 6.º ano de escolaridade no âmbito de contextos visuais. Partindo desta problemática, foram enunciadas algumas questões de investigação que orientam este estudo:

1) Que aspetos do pensamento algébrico são evidenciados em contextos visuais?

2) Que tipo de estratégias utilizam os alunos no processo de generalização nestes contextos?

3) Que dificuldades são evidenciadas pelos alunos nestes contextos?

4) Que razões poderão explicar estas dificuldades?

Procurar-se-á dar resposta a estas questões com base no trabalho desenvolvido por alunos de uma turma do 6.º ano de escolaridade, em particular por dois alunos dessa turma. Esta investigação tem por base uma proposta didática com tarefas que envolvem contagens visuais, estudo de sequências de repetição e de crescimento em contextos figurativos, e problemas com padrões, com a finalidade de promover a capacidade de generalizar desenvolvendo assim o pensamento algébrico.

Organização geral

Esta dissertação encontra-se organizada em sete capítulos, seguidos das Referências Bibliográficas e dos Anexos.

Inicia-se com o Capítulo I, *Introdução*, no qual se reflete sobre o tema em estudo e a sua pertinência sendo também apresentado o problema que se pretende investigar e as questões que o orientam, finalizando com uma descrição da organização do trabalho.

No Capítulo II, *Enquadramento Teórico*, apresenta-se a fundamentação teórica que sustentou o estudo. Abordam-se as componentes do pensamento algébrico, como os padrões e relações, a generalização e a simbolização, fazendo também um enquadramento curricular do mesmo. De seguida, salienta-se o contributo da visualização para o desenvolvimento do pensamento algébrico, fazendo-se uma abordagem ao conceito de visualização. Posteriormente, discute-se a relação entre a visualização e a capacidade de generalizar, fazendo referência a estratégias de generalização e às dificuldades e fatores que influenciam a capacidade de generalizar. Por fim, apresenta-se a proposta didática utilizada neste estudo, cujo propósito é o desenvolvimento do pensamento algébrico.

No Capítulo III, *Metodologia*, apresentam-se e fundamentam-se as opções metodológicas, esclarecendo o papel da investigadora assim como os critérios de seleção dos casos. De seguida são explanados os métodos de recolha dos dados, a forma como decorreu a seleção e a implementação das tarefas e descrevem-se as fases do estudo e os procedimentos adotados. Finaliza-se o capítulo com a explicação do processo de análise dos dados.

Seguem-se os Capítulos IV, V e VI, referentes à análise e interpretação dos dados. No Capítulo IV é feita uma descrição do trabalho desenvolvido pela turma onde decorreu o estudo. Nos Capítulos V e VI apresenta-se o trabalho desenvolvido pelos alunos-caso ao longo da exploração das tarefas, com enfoque nas estratégias usadas e nas dificuldades sentidas.

No Capítulo VII, *Discussão e Conclusões*, apresentam-se as conclusões do estudo, respondendo às questões inicialmente definidas. Termina-se com uma breve reflexão sobre a investigação desenvolvida, analisando as implicações na prática profissional da investigadora e identificando algumas limitações deste estudo. Esta reflexão integra, ainda, algumas recomendações para investigações futuras.

CAPÍTULO II – ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo realiza-se um enquadramento teórico das principais temáticas que sustentam o estudo, dividindo-se em três secções: o pensamento algébrico; contributo da visualização para o desenvolvimento do pensamento algébrico; e proposta didática para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Algumas destas secções apresentam-se segmentadas em tópicos considerados pertinentes para um bom entendimento da temática abordada.

O pensamento algébrico

O que é o pensamento algébrico

A Álgebra tem sido identificada com a manipulação de símbolos, nomeadamente a resolução de equações e a simplificação de expressões algébricas, sendo esta uma visão tradicional da mesma (Kaput, 1999; NCTM, 2007). Numa perspetiva de evolução da Álgebra, surgem outras conceções como a que apresenta Kieran (2007) que defende uma visão mais abrangente ao afirmar que:

> Álgebra não é apenas um conjunto de procedimentos envolvendo os símbolos em forma de letra, mas consiste também na atividade de generalização e proporciona uma variedade de ferramentas para representar a generalidade das relações matemáticas, padrões e regras (e.g. Mason, 2005). Assim, a Álgebra passou a ser encarada não apenas como uma técnica, mas também como uma forma de pensamento e raciocínio acerca de situações matemáticas. (p. 5)

Neste sentido, surge o conceito de pensamento algébrico, sendo defendida a sua introdução na matemática escolar logo nos primeiros anos (Kaput, 1999). Segundo Kaput (1999), a Álgebra deve ser entendida de forma diferente da visão tradicional, considerando fundamental que o desenvolvimento do pensamento algébrico esteja acessível a todos os alunos sendo, para isso, necessária a criação de um ambiente propício na sala de aula, que lhes permita aprender com compreensão. Tendo por base esta perspetiva, este autor entende que a Álgebra se associa à capacidade de generalização e de expressar em toda a matemática, desde os primeiros anos, recorrendo progressivamente a uma linguagem mais formal podendo surgir na aritmética, em situações de modelação ou na geometria. Considera, ainda, que a Álgebra se apresenta em cinco aspetos diferentes: generalização e formalização de padrões como aritmética generalizada; manipulação de símbolos guiada sintaticamente (manipulação simbólica); estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações; estudo de funções, relações e variação conjunta; modelação e linguagem. A compreensão da matemática requer que os alunos tenham experiências que vão para além da aritmética e da fluência de cálculo, de modo a poderem entender a estrutura mais profunda subjacente à matemática (Blanton & Kaput, 2011). Para isso, é importante que sejam proporcionadas experiências que ajudem os alunos a reconhecer e articular estruturas e relações e a usar essas percepções do raciocínio matemático como objetos para raciocinar matematicamente. Na matemática elementar, este tipo de experiências relaciona-se com a emergência do pensamento algébrico, proporcionando a compreensão da generalidade, associada à matemática e não apenas à exploração de situações de aprendizagem computacionais.

Blanton e Kaput (2005) caracterizam o pensamento algébrico como o "processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade" (p. 413). Assim, a generalização apresenta-se como um aspeto fundamental do pensamento algébrico (Blanton & Kaput, 2005; Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2007; Vale, Pimentel, Alvarenga, & Fão, 2011b). Para Vale et al. (2011a) o pensamento algébrico é transversal no currículo, correspondendo à simbolização na sua forma de representar e analisar situações matemáticas aquando do uso dos símbolos algébricos, ao estudo de estruturas como a compreensão de relações e funções e à modelação. Para isso, é necessário o domínio da simbologia para representar matematicamente o problema, a utilização de processos para obter o resultado sempre com a preocupação de interpretar e validar esse resultado. Darley e Leapard (2010) consideram o pensamento algébrico como uma prioridade na aula de matemática de hoje, devendo os professores estabelecer as bases para desenvolver as capacidades dos estudantes para pensar algebricamente. Segundo Kaput (2008), o pensamento algébrico apresenta dois aspetos fundamentais: a generalização e a expressão de generalizações de forma progressiva em sistemas de símbolos convencionais; e a ação sintaticamente conduzida sobre a simbolização em sistemas organizados de símbolos. Para este autor, estes aspetos surgem nas três vertentes da Álgebra por ele definidas:

> (1) Álgebra como o estudo de estruturas e sistemas abstraídos de cálculos e relações, inclusive os decorrentes da aritmética (Álgebra como aritmética generalizada) e no pensamento quantitativo; (2) Álgebra como o estudo de funções, relações e variação conjunta; (3) Álgebra como a aplicação de um conjunto de linguagens de modelação dentro ou fora do domínio matemático. (Kaput, 2008, p. 11)

Assim, para além da generalização, também a simbolização está no cerne do pensamento algébrico (Kaput et al. 2008) na medida em que este é composto por processos de simbolização que servem generalizações e o raciocínio com generalizações.

Driscoll (1999) considera como fundamental ao pensamento algébrico a capacidade de identificar padrões e reorganizar dados para apresentar situações em que os valores das variáveis dependente e independente se relacionam em regras funcionais bem definidas. Na mesma linha, para Van de Walle, Karp e Bay-Williams (2010) o pensamento algébrico envolve a generalização a partir de experiências com números, a formalização dessas ideias através de um sistema de símbolos significativo e a exploração de padrões e funções. Deste modo, pode dizer-se que o pensamento algébrico envolve a exploração de padrões e relações, a generalização e o uso da simbolização, aspetos que se passa a analisar com maior detalhe.

Padrões e Relações

A Matemática tem sido descrita, nas últimas décadas, como a *ciência dos padrões* (Devlin, 2002), facto que realça o reconhecimento da importância dos padrões na Matemática. Por exemplo, Davis e Hersh (1995) consideram que "o próprio objetivo da matemática é, em certa medida, descobrir a regularidade onde parece vingar o caos, extrair a estrutura e invariância da desordem e confusão" (p. 167) e Zazkis e Liljedahl (2002) entendem que "os padrões são o coração e a alma da Matemática" (p. 379). Assim, a exploração de padrões é uma atividade central em toda a Matemática (Lee & Freiman, 2006). Devlin (2002), acrescenta que a atividade de um matemático é "examinar padrões abstratos – padrões numéricos, padrões de formas, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc." (p. 9). Isto significa que os padrões não se confinam à análise de situações de repetição, apresentam-se como transversais, quer pelos conteúdos quer pelas capacidades que desenvolvem em alunos de qualquer nível, possibilitando o estabelecimento de uma profunda e ampla variedade de conexões entre todos os tópicos da matemática e fora dela (Vale, et al., 2011a)

Definir o que é um padrão não é fácil (Orton, 1999), pois tem a ele associadas definições muito diferentes conforme a utilização que é pretendida (Vale, Palhares, Cabrita, & Borralho, 2006). Trata-se de um conceito com uma natureza multifacetada e abrangente, o que justifica o facto de não se encontrar uma definição formal na literatura ou uma abordagem específica na história da Matemática (Smith, 2003). Contudo, verifica-se que a ideia de regularidade ou repetição está presente nas perspetivas de alguns autores como a de Vale et al. (2006) que referem que "genericamente, padrão é usado quando nos referimos a uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detetam regularidades", ou na de Sawyer (1955, citado por Orton, 1999, p. 149) que define padrão como "qualquer tipo de regularidade que pode ser reconhecida pela mente", ou de Smith (2003) que entende que estamos perante um padrão quando "vemos repetição ou imaginamos a possibilidade dessa repetição" (p. 137). Existem conceitos que são fundamentais quando se fala de padrões como repetição, regularidade, continuação, os quais estão presentes na definição de Barbosa (2010) que considera "que um padrão é todo o arranjo de números ou formas onde são detetadas regularidades passíveis de serem continuadas" (p. 47), a qual se adotará neste estudo.

Segundo Vale et al. (2011a), a utilização de padrões no ensino da Matemática permite aos alunos, para além da construção de uma imagem mais positiva da Matemática e do desenvolvimento da criatividade, uma aprendizagem significativa e um maior envolvimento. Smith et al. (2007) também relatam as vantagens da exploração de tarefas que envolvam padrões na relação dos alunos com a matemática, verificando que estes se tornaram mais confiantes e confortáveis em relação à disciplina, sendo encorajados a ter uma participação mais ativa. De uma forma geral, pode dizer-se que o trabalho com padrões apoia a "aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem conjeturas, previsões e também generalizações" (Vale, et al., 2011a, p. 9).

A exploração de tarefas que envolvam padrões tem vindo a ser recomendada como uma abordagem inicial da Álgebra desde os primeiros anos (Driscoll, 1999; NCTM, 2007; Stacey & Macgregor, 2001). Verifica-se esta associação em vários documentos curriculares. Por exemplo, em *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007), considera-se os padrões como um meio para o desenvolvimento do pensamento algébrico, sendo que um dos seus objetivos para a Álgebra, em todos os níveis de ensino, é *Compreender padrões, relações e funções*. Encontra-se, ainda, a referência ao facto de as experiências sistemáticas com padrões ajudarem a compreender o conceito de função, através do estabelecimento de relações entre as variáveis subjacentes a um dado padrão. Assim, a exploração de padrões, como forma de expressar a generalização, tem-se afirmado como um caminho para a Álgebra (Orton & Orton, 1999; Radford, 2008), sendo consensual entre vários autores que este tipo de trabalho possibilita o desenvolvimento da capacidade de generalizar e consequentemente o pensamento algébrico (Orton & Orton, 1999; Vale, et al., 2011a). Vale et al. (2011a) consideram que "trabalhar com padrões ajuda os alunos a procurar regularidades e relações e encoraja-os a generalizar" (p. 16). Trata-se de um contexto privilegiado para trabalhar com variáveis e incógnitas, compreender a equivalência de expressões algébricas, melhorar a manipulação simbólica, explorar uma variedade de expressões e equações, aspetos que estão intimamente relacionados com o pensamento algébrico (Lee & Freiman, 2006). No entanto, é necessário sublinhar que, apesar das atividades que envolvem problemas com padrões serem adequadas à introdução de conceitos algébricos elementares, podem implicar algumas dificuldades caso os alunos não estejam familiarizados com o trabalho com padrões (Vale & Pimentel, 2005).

Há uma grande diversidade de padrões, que variam entre padrões numéricos, padrões figurativos, padrões geométricos, padrões lineares, padrões quadráticos, padrões em procedimentos computacionais, padrões de repetição, padrões de crescimento, entre outros (Zazkis & Liljedahl, 2002). No entanto, qualquer um pode ser descrito relativamente à forma como pode ser repetido ou prolongado, independentemente dos objetos que estão envolvidos na sua estrutura. Neste estudo é dada especial atenção aos padrões visuais/figurativos como contexto privilegiado de trabalho, abordando, em particular, padrões de repetição e padrões de crescimento, lineares e não lineares.

Um padrão visual/figurativo é composto por figuras que, como salientam Rivera e Becker (2005), representam muito mais que apenas desenhos, na medida em que possuem atributos ou apresentam relações entre elas. Orton et al. (1999) defendem que o trabalho com este tipo de padrões permite desenvolver nos alunos a capacidade de generalizar e de representar relações. Afirmam, ainda, que a apresentação de padrões em contextos visuais/figurativos ou concretos podem trazer benefícios, para alguns alunos, como a contextualização da tarefa, propiciando uma melhor compreensão e a simplificação da mesma. Contudo, reconhecem que se alguns alunos beneficiam com este contexto concreto, outros sentem mais dificuldades, facto que se relaciona com as suas capacidades visuais. Para Lee e Freiman (2006), o primeiro passo na exploração deste tipo de padrões é *ver* o padrão, afirmando também que os de tipo numérico, apesar de poderem ser interessantes, não são propícios ao trabalho inicial de ver um padrão, pois são menos visuais e dificilmente permitem uma multiplicidade de formas de interpretação (Lee & Freiman, 2006). Segundo Vale et al. (2011a), os padrões figurativos podem conduzir a diferentes modos de *ver* e à descoberta de diferentes relações, dando lugar "a expressões diferentes (pois traduzem modos diferentes de ver) mas que são equivalentes" (p. 29). A exploração de tarefas que impliquem a generalização na descoberta e estudo de padrões em contextos figurativos/visuais são potencialidades essenciais para o pensamento algébrico (Vale, 2012).

Seguidamente apresenta-se uma síntese de ideias sobre padrões de repetição e de crescimento, com enfoque em contextos figurativos.

Padrões de repetição e padrões de crescimento

Um padrão de repetição apresenta uma unidade que se repete, tendo uma estrutura cíclica que se obtém através da repetição dessa unidade mínima (Warren & Cooper, 2008b), ou seja, apresenta um "motivo identificável que se repete de forma cíclica indefinidamente" (Vale, et al., 2011a, p. 20). Threlfall (1999) identifica esta unidade mínima/motivo como a unidade de repetição, considerando a sua percepção por parte dos alunos importante já que é um exemplo de uma das características do pensamento algébrico, a capacidade de generalizar.

Para a exploração de padrões de repetição, Warren e Cooper (2006) propuseram uma sequência organizada em seis fases, com vista à evolução dos alunos. Desta forma, devem: (1) copiar um padrão; (2) continuar um padrão, em ambas direções; (3) identificar a unidade de repetição; (4) completar um padrão, podendo continuar ou preencher espaços em branco; (5) criar um padrão; (6) traduzir um padrão para um contexto diferente.

Reconhecer num padrão deste tipo a unidade de repetição envolve, conjuntamente, uma abordagem conceptual e procedimental. Em situações de continuação de um padrão de repetição, por parte dos alunos, Threlfall (1999) afirma que podem ter diferentes comportamentos, já que alguns poderão pensar de forma a ter unidades de repetição completas e outros poderão pensar em subdividir a unidade de repetição. Como exemplo refere: "se existirem 16 espaços para continuar e o padrão é vermelho, azul, azul, vermelho, azul, azul, etc. Nesta situação, os últimos elementos podem ser tratados de forma diferente: deixar em branco ou preencher" (p. 24), dependendo do modo como os alunos interpretam a unidade de repetição. O trabalho com padrões de repetição é importante já que estes servem de contexto para outros conteúdos, para além de permitirem generalizar e formular regras, contribuindo assim para o desenvolvimento da "pré-álgebra". A complexidade de um padrão de repetição altera conforme a quantidade de atributos que estão presentes na sua estrutura (e.g. cor, tamanho, forma, orientação, o número de vezes que aparece), podendo ser apenas um ou diversos, bem como o modo como variam, podendo manter alguns atributos constantes e modificar os outros. Desde muito cedo, as crianças poderiam trabalhar com padrões de repetição, mas deveria ser realizada uma exploração aprofundada, abrangendo ideias matemáticas, que permitiria desenvolver processos de generalização onde o pensamento algébrico é fundamental. Assim, a exploração deste tipo de padrão assume-se como um trabalho prévio ao realizado com padrões de crescimento (Vale, et al., 2011a)

Um padrão de crescimento apresenta unidades distintas, os termos, sendo que cada um está dependente da posição que ocupa no padrão (Warren & Cooper, 2008b), mudando de forma previsível em relação ao anterior (Billings, et al. 2007; Vale, et al., 2011a). Trata-se de uma sequência que se prolonga de forma regular, podendo ser constituída por números ou formas (Moyer-Packenham, 2005). Warren e Cooper (2008a) documentam que, de uma forma geral, os alunos apresentam maiores dificuldades no trabalho com padrões de crescimento, do que com os padrões de repetição. Afirmam que, esta situação poderá estar relacionada com o facto de, em sala de aula, ser privilegiada a exploração de padrões de repetição. Contudo, os padrões habitualmente explorados na introdução à álgebra formal são predominantemente padrões de crescimento de natureza visual (Warren & Cooper, 2008a). Funcionam como um catalisador para a utilização de diferentes abordagens, visuais e não visuais, suscitando diferentes formas de representação. Fornecem um contexto significativo para pensar algebricamente na medida em que os alunos analisam a mudança e as relações inerentes no padrão, generalizando sobre essas relações, ou seja, são motivados a pensar nos padrões de crescimento como funções em vez de se concentrarem apenas na variação relativa a um dos conjuntos (Billings, 2008). Billings (2008), na sua descrição acerca de um estudo envolvendo a exploração de padrões figurativos de crescimento, considera que este tipo de padrões fornecem um contexto bastante rico para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Observa que ferramentas como construir o padrão, analisar a variação ao longo dos termos e utilizar simbologia para representar e comunicar a generalização tornaram-se bastante úteis na criação, interpretação e representação de generalizações. Neste sentido, os padrões figurativos de crescimento apresentam-se com uma significativa importância na transição da aritmética para a álgebra. Segundo Warren e Cooper (2008b) existem três motivos fundamentais para a exploração de padrões figurativos de crescimento: (1) são a representação visual dos padrões com números; (2) podem ser usados como uma introdução informal do conceito de variável; e (3) podem ser usados para gerar expressões equivalentes.

Os padrões de crescimento podem ser lineares, se for possível a sua tradução através de uma expressão polinomial do 1.º grau, ou não lineares, caso não seja possível a sua tradução numa expressão dessa natureza (Vale, et al., 2011a). Os padrões lineares mudam sempre a mesma quantidade, o que torna constante a diferença entre termos consecutivos, já os não lineares não apresentam uma variação constante entre termos consecutivos. No caso particular dos quadráticos é constante a diferença entre as diferenças de termos consecutivos (Hargreaves, Threlfall, Frobisher, & Shorrocks-Taylor, 1999). Orton e Orton (1999) afirmam ter claras evidências de que os alunos apresentam mais sucesso na exploração de padrões lineares do que nos padrões quadráticos, uma vez que têm tendência a usar um raciocínio recursivo, mais difícil de aplicar no segundo caso, já que a diferença não é constante. Habitualmente, os padrões lineares são os mais utilizados na sala de aula, no entanto podem também ser usados padrões de tipo não linear como os que envolvem quadrados de números (Vale, et al. 2006). Warren e Cooper (2008a), num estudo envolvendo crianças com oito anos de idade e a exploração, em contexto figurativo, de padrões de repetição e de crescimento, relatam que os alunos revelam dificuldades na reversibilidade de pensamento, principalmente por duas razões: baseou-se na relação entre o número de ordem e o termo, ou seja, na relação entre a variável dependente e a variável independente; exige uma boa compreensão das relações numéricas.

Generalização

A generalização surge como uma componente essencial do pensamento algébrico (Blanton & Kaput, 2005; Schliemann et al. 2007; Vale, et al., 2011a) podendo também afirmar-se que, globalmente, integra o pensamento matemático (Driscoll, 1999; Mason, 1996), pois permite ver para além das particularidades de uma determinada situação. Mason (1996) afirma mesmo que a generalização é o coração da matemática, sublinhando que não ocorre pensamento matemático se os alunos não tiverem por hábito generalizar e expressar as suas generalizações.

Sendo considerada um dos grandes focos da Matemática, muitos investigadores têm evidenciado interesse em caracterizar a generalização. Segundo Kaput (1999) generalizar é continuar um raciocínio ou comunicação para além do caso ou casos que estão em estudo, reconhecendo, de forma explícita, o que de semelhante existe entre eles ou elevando o raciocínio ou comunicação a um nível onde o foco deixa de ser a situação inicial e passa a ser o padrão, o procedimento, as estruturas e a relação entre eles. Radford (2006) considera que o processo de generalização de padrões assenta na compreensão do que existe de comum em alguns termos em particular alargando de seguida a todos os termos da sequência. Trata-se de encontrar uma propriedade ou relação invariante, compreender a regularidade, e perceber que se aplica a um contexto mais lato.

Vários autores têm identificado no âmbito da generalização diferentes níveis. Por exemplo, Radford (2008) distingue entre generalização aritmética e generalização algébrica, afirmando que, apesar de haver generalização em ambos os níveis, a generalização algébrica permite atingir resultados que não seriam possíveis de conseguir com a aritmética. Este tipo de generalização inicia-se com a identificação de uma regularidade local (*R*) em alguns membros da sequência *(S)*, o que implica que exista um reconhecimento entre o que se mantém igual e o que é diferente. De seguida, estende-se a generalização a todos os termos da sequência. Na fase final do processo de generalização *R* permitirá deduzir expressões para todos os elementos, que permitam o cálculo de qualquer termo da sequência. Também Stacey (1989) identifica dois tipos de generalização: generalização próxima, quando se obtém o termo pretendido através da contagem ou do desenho, utilizando uma estratégia recursiva; e a generalização distante quando não é possível a utilização de desenhos ou da contagem sendo necessário compreender a lei de formação de sequência e gerar uma regra geral.

A capacidade de generalizar é desenvolvida primeiramente a partir de tarefas que envolvam o estudo de padrões. Mason (1996) considera que, para facilitar a generalização, os alunos deveriam ter a oportunidade de explorar padrões recorrendo à visualização e à manipulação de figuras, sendo que esta atividade implica a observação do padrão e a sua descrição, o que constitui uma abordagem relevante para a transição da aritmética para a álgebra. Van de Walle et al. (2010) consideram a exploração de padrões figurativos de crescimento (aos quais chamam de padrões de crescimento físicos) como um dos métodos mais interessantes e de maior valor na procura de generalizações, entendendo que uma das formas de o fazer é pedir que os alunos analisem um dos termos da sequência e encontrem uma estratégia de contagem, sem recorrer à simples contagem um a um. Em geral, o trabalho com padrões apoia os alunos na procura de regularidades e relações e encoraja-os a generalizar, dando forma e significado aos símbolos algébricos, o que contribui para a compreensão da Álgebra no seu todo.

English e Warren (1998), tendo como base o trabalho desenvolvido com padrões figurativos de crescimento, como abordagem à Álgebra, identificaram capacidades e processos que os alunos devem desenvolver para melhorarem a capacidade de generalizar. Consideram como uma capacidade fundamental a habilidade numérica, já que vai permitir descobrir relações nos padrões. Identificam ainda como essencial, para o sucesso nesta abordagem com padrões, o pensamento flexível e articulado e a compreensão da equivalência. Verificaram que os alunos com sucesso articulavam o pensamento de forma a facilitar as suas generalizações algébricas e que a flexibilidade de pensamento era particularmente importante na transposição de um caso específico para a regra geral, sendo igualmente importante a noção de equivalência e o reconhecimento de equivalência nas generalizações produzidas. Smith et al. (2007) também identificam como importante esta flexibilidade de pensamento. Afirmam que no seu estudo, que envolvia padrões figurativos de crescimento lineares e não lineares, os alunos eram desafiados a encontrar diferentes formas de ver, de descrever e de generalizar os padrões apresentados. Isso permitia que compreendessem que existem múltiplas formas de pensar, encorajando a flexibilidade de pensamento, capacidade fundamental na resolução de futuros problemas da mesma natureza.

Blanton e Kaput (2005) consideram ser necessária a transformação de tarefas aritméticas rotineiras em tarefas que requeiram pensamento algébrico. Trata-se pois da algebrização de problemas aritméticos de forma a criar oportunidades de introduzir o pensamento algébrico. Kieran (2007) realça como fundamentais as questões que o professor coloca na exploração das tarefas tentando, através de sequências estruturadas de operações, focar a atenção dos alunos em aspetos fulcrais da estrutura e da sua generalização. Esta ideia é consistente com o que Billings et al. (2007) consideram, ao referir que, na análise de padrões de crescimento figurativos, o tipo de questões formuladas vai influenciar os alunos na forma como analisam e veem o padrão, sendo que as mesmas vão proporcionar aos alunos pensar sobre as relações inerentes no mesmo.

Vale e Pimentel (2005) documentam que, do trabalho por elas desenvolvido centrado em problemas com padrões, envolvendo a generalização, têm verificado que a maioria dos alunos opta por abordagens numéricas. Afirmam que, nestes casos, revelaram dificuldades na resolução não conseguindo generalizar ou chegaram a uma lei de formação incorreta. Contudo, verificaram também que os alunos que se socorrem de abordagens visuais ou mistas (numéricas e visuais) obtiveram mais sucesso. Tendo em vista uma sensibilização para a descoberta de "regularidades, propriedades e relações numéricas desenvolvendo o que é designado por sentido do número e podendo ser facilitador para o estudo da álgebra nos anos mais elementares" (p. 19), defendem que estas tarefas que envolvem problemas com padrões devem ser precedidas do reconhecimento de padrões de natureza variada.

A simbolização

A simbolização, a par da generalização, tem um papel central no pensamento algébrico (Kaput, et al. 2008). Para Ponte, Branco e Matos (2008) "raciocinar envolve sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento" (p. 1), sendo que na Álgebra, esse encadeamento é realizado através de símbolos que podem ser sinais ou letras do alfabeto. Segundo Davis e Hersh (1995) os símbolos permitem designar ideias com rigor e clareza, tendo também como função a abreviatura dos mesmos. Consideram que essa clareza implica que o significado de cada símbolo e de cada sequência de símbolos esteja completamente definido e seja inequívoco.

Tal como na Aritmética se pretende desenvolver o sentido de número, Arcavi (2006) propõe para a Álgebra o desenvolvimento do sentido de símbolo. Para este autor, o sentido de símbolo é composto por seis características: (1) familiarização com os símbolos, que abrange a sua compreensão e um sentido estético do seu poder – quando e como os símbolos podem e devem ser usados com o objetivo de exibir relações, generalidades e demonstrações; (2) capacidade de manipular e ler através de expressões simbólicas, como dois aspetos complementares na resolução de problemas algébricos; (3) consciência que é possível estabelecer de forma precisa relações simbólicas que exprimam a informação dada ou desejada; (4) capacidade de selecionar uma representação simbólica e, caso seja necessário, refletir sobre ela para a melhorar; (5) consciência da necessidade de rever o significado dos símbolos durante a realização da tarefa (aplicação de um procedimento, resolução de um problema ou verificação de um resultado), comparando esses significados com a nossa intuição, com os resultados esperados e com o contexto do problema; e (6) consciência de que os símbolos podem desempenhar papéis distintos em contextos diferentes e desenvolver um sentido intuitivo dessas diferenças. Este autor considera que se podem formular tarefas para o desenvolvimento do sentido de símbolo na sala de aula. A estruturação e a implementação destas tarefas em sala de aula apresentam-se como um desafio interessante para aqueles que desenvolvem o currículo, para que estas sejam implementadas na Álgebra desde os anos iniciais.

Para Kaput et al. (2008) a simbolização ocorre em toda a atividade matemática desde uma básica contagem até numa investigação matemática avançada. Contudo, estes autores distinguem três tipos de atividade de simbolização: (1) algébrica; (2) quase-algébrica; e (3) não algébrica. Uma atividade de simbolização é considerada algébrica quando a "simbolização está ao serviço da expressão de generalizações ou raciocínio sistemático com generalizações simbólicas, usando sistemas de símbolos algébricos convencionais" (p. 49). Uma atividade de simbolização é quase-algébrica quando tem as características definidas anteriormente mas usa qualquer tipo de símbolos: tradicional, aritmético, informal ou idiossincrático. Por sua vez, uma simbolização é considerada não algébrica quando não é usada ao serviço da generalização e do raciocínio com generalizações.

Sendo as variáveis uma ferramenta essencial para expressar generalizações (English & Warren, 1998; Schoenfeld & Arcavi, 1988) é fundamental que os alunos compreendam o conceito de variável para terem sucesso em Álgebra. "A compreensão do conceito (de variável) fornece a base para a transição da aritmética para a álgebra e é necessária para um uso significativo em toda a matemática avançada" (Schoenfeld & Arcavi, 1988, p. 150). Contudo, este conceito é difícil de descrever sendo usado de diferentes formas conforme o contexto, o que dificulta a sua compreensão por parte dos alunos (Schoenfeld & Arcavi, 1988). Usiskin (1988) considera que estas diferentes formas de utilização do conceito de variável estão relacionadas com as diferentes conceções da Álgebra. Assim, apresenta quatro perspetivas para a Álgebra: Álgebra como aritmética generalizada, sendo a variável entendida como um padrão generalizado; Álgebra como o estudo de procedimentos para resolver certo tipo de problemas surgindo a variável como incógnita; Álgebra como estudo de relações entre quantidades em que a variável se apresenta como um argumento ou parâmetro; e Álgebra como o estudo de estruturas, em que a variável se apresenta como um objeto arbitrário. É por isso fundamental que numa abordagem inicial ao pensamento algébrico, suceda um salto conceptual do trabalho com números para pensar com variáveis. English e Warren (1998) relatam que os alunos sentem mais facilidade em expressar uma generalização verbalmente do que simbolicamente. Trigueros e Ursini (2003) consideram que "o desenvolvimento da linguagem algébrica e a sua utilização requer o desenvolvimento do conceito de variável como um único conceito multifacetado que inclui diferentes aspetos" (p. 1). Estas autoras foram mais longe e propuseram uma categorização para o conceito de variável, apresentando as seguintes categorias (tabela 1): variável como incógnita; variável como número generalizado; e variável em relações funcionais.

Tabela 1 - Categorização para o conceito de variável (Trigueros & Ursini, 2003)

Variável	Conceptualização e representação	Interpretação dos símbolos	Manipulação
Como incógnita	De uma incógnita numa situação particular e/ou numa equação.	Como incógnita específica numa equação.	Fator, simplificação, expansão, transpor ou equilibrar numa equação.
Como número generalizado	De um número generalizado envolvido em métodos gerais ou regras deduzidas de padrões numéricos e/ou geométricos e/ou famílias de problemas similares.	Como generalização em expressões algébricas ou em expressões de métodos gerais	Fator, simplificação e expansão para rearranjar expressões
Em relações funcionais	De relações funcionais (correspondência e variação) através de tabelas, gráficos ou representações analíticas.	Representando correspondência e variação conjunta em representações analíticas, tabelas e gráficos	Fator, simplificação, expansão para rearranjar uma expressão, substituir valores para determinar intervalos de variação, valores máximo/ mínimo e comportamentos globais das relações.

Ponte et al. (2008) entendem que a aprendizagem da Álgebra deve visar a compreensão dos seus conceitos fundamentais, incidindo no desenvolvimento do pensamento algébrico, de forma a que os raciocínios formulados pelos alunos sejam cada vez mais abstratos e complexos.

Para isso, torna-se fundamental continuar a valorizar a simbolização mas deve-se procurar que a sua apropriação se realize "em contextos de trabalho significativos, quer de cunho matemático (estudo de relações e regularidades), quer relativo a situações extra-matemáticas (modelação e variação)" (p. 95). Para Pereira e Saraiva (2010):

> A aprendizagem da Álgebra envolve saber trabalhar com os símbolos, mas de forma significativa — um processo que não é fácil nem é linear. Recordem-se, por exemplo, as dificuldades reveladas por muitos alunos quando tentam dar sentido a uma expressão algébrica, ou a uma letra nessa expressão, ou quando atribuem significados concretos às letras, ao transitarem da linguagem natural para a algébrica, ou quando tentam escrever simbolicamente uma generalização (p. 28)

Van de Walle et al. (2010) entende que o facto de os alunos não possuírem uma forte compreensão dos símbolos que utilizam pode contribuir para o insucesso destes na Álgebra. Considera ainda que os alunos não conseguem compreender nem utilizar os símbolos de forma correta em questões da vida real sem uma instrução significativa em dois tópicos importantes: o sinal igual e as variáveis.

São vários os autores que reconhecem o potencial da exploração de padrões no desenvolvimento do sentido de símbolo. Radford (2006) sugere a exploração de padrões como atividade introdutória ao simbolismo algébrico e Vale (2011), baseando-se em vários estudos já realizados, afirma que as tarefas com padrões têm-se "revelado potenciadoras no desenvolvimento de capacidades de generalizar e em promover o pensamento algébrico e, em particular, o simbolismo que lhes está associado" (p. 186). Por sua vez, Beigie (2011), tendo em conta que a transição entre os números (aritmética) e as variáveis (álgebra) envolve um processo de abstração, considera que os padrões algébricos que englobem contagens em contextos visuais (neste estudo considerados padrões figurativos de crescimento) proporcionam as condições ideais para se dar o salto do trabalho com os números para as variáveis, atribuindo mais facilmente significado aos símbolos utilizados.

O pensamento algébrico no Currículo

A evolução da Álgebra e a consciencialização da sua importância na Matemática escolar, sustentam a inclusão do desenvolvimento do pensamento algébrico no currículo de Matemática desde os primeiros anos de escolaridade (Kaput, 1999).

O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2007) seguiu esta tendência incluindo a Álgebra como tema programático no 2.º e 3.º ciclos desta etapa educativa. No 1.º ciclo, apesar de não se encontrar uma referência explícita à Álgebra, existe já uma tentativa de iniciação ao pensamento algébrico, que o referido documento considera um dos eixos fundamentais em torno do qual se desenvolve a aprendizagem da Matemática. As orientações emanadas por este documento reforçam algumas linhas de mudança ao nível da Álgebra, relativamente ao Programa de Matemática até então em vigor:

> A alteração mais significativa em relação ao programa anterior é o estabelecimento de um percurso de aprendizagem prévio no 1.º e 2.º ciclos que possibilite um maior sucesso na aprendizagem posterior, com a consideração da Álgebra como forma de pensamento matemático, desde os primeiros anos. (ME-DGIDC, 2007, p. 7)

Como já se referiu, apesar de a Álgebra não estar identificada como tema específico no 1.º ciclo, encontram-se referências claras ao desenvolvimento do pensamento algébrico, neste nível, procurando-se que exista uma continuidade no 2.º ciclo:

> Os alunos do 1.º ciclo desenvolvem o pensamento algébrico quando, por exemplo, investigam sequências numéricas e padrões geométricos. No 2.º ciclo, ampliam e aprofundam esse trabalho, explorando padrões, determinando termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e uma lei de formação pelo estudo da relação entre termos. Os alunos desenvolvem igualmente a capacidade de identificar relações e de usar a linguagem simbólica para as descrever, e começam a expressar relações matemáticas através de igualdades e desigualdades. (ME-DGIDC, 2007, p. 40).

É de salientar a importância dada pelo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) ao pensamento algébrico, já que o propósito principal de ensino do tema Álgebra, em particular, no 2.º ciclo é "desenvolver nos alunos o pensamento algébrico, bem como a sua capacidade de representar simbolicamente situações matemáticas e não matemáticas e de resolver problemas em contextos diversos" (p. 40). Verifica-se, ao nível das indicações metodológicas, a preocupação em que desenvolva um trabalho de investigação de regularidades assim como a generalização das propriedades das operações aritméticas para o desenvolvimento do pensamento algébrico (ME-DGIDC, 2007). Ao analisar os objetivos específicos do Programa (ME-DGIDC, 2007), neste âmbito, constata-se que existe uma ênfase no trabalho com sequências e regularidades:

> Identificar e dar exemplos de sequências e regularidades numéricas e não numéricas; Determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação; Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação; Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica; Representar simbolicamente relações descritas em linguagem natural e reciprocamente; Interpretar diferentes representações de uma relação e relacioná-las. (p. 41)

Ao nível das orientações curriculares internacionais, o documento *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007), uma referência importante na matemática educacional, reconhece a importância da Álgebra no currículo de Matemática, considerando-a um tema unificador do mesmo, e defende que a competência algébrica é importante ao longo da vida. Por isso, é considerado que "todos os alunos deveriam aprender álgebra" (p. 39), apelando à introdução da mesma desde os primeiros anos de escolaridade. Verifica-se que são apresentados quatro tópicos fundamentais na Norma Álgebra:

> Os programas do ensino do pré-escolar ao 12.º ano deverão habilitar todos os alunos para: Compreender padrões, relações e funções; Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos; Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; Analisar a variação em diversos contextos. (NCTM, 2007, p. 39)

Ao analisar as "Normas" do NCTM do 6.º ao 8.º ano, verifica-se que é dada significativa ênfase à Álgebra. Os quatro aspetos descritos anteriormente surgem desenvolvidos de forma específica para estes níveis, conforme se mostra na tabela 2:

Tabela 2 – Objetivos para os níveis 6-8 no âmbito da Álgebra *(NCTM, 2007)*

Compreender padrões, relações e funções;	Representar, analisar e generalizar uma diversidade de padrões usando tabelas, gráficos, palavras e, quando possível, regras simbólicas. Relacionar e comparar diferentes formas de representação de uma relação. Identificar funções como sendo lineares ou não lineares e comparar as suas propriedades através de tabelas, gráficos ou equações.
Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;	Desenvolver uma compreensão conceptual inicial das diferentes aplicações das variáveis. Explorar relações entre expressões simbólicas e gráficos de linhas, prestando especial atenção ao significado de intersecção e declive. Usar álgebra simbólica para representar situações e resolver problemas especialmente aqueles que envolvem relações lineares. Reconhecer e produzir formas equivalentes para expressões algébricas simples e resolver equações lineares.
Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;	Modelar e resolver problemas contextualizados usando várias representações como gráficos, tabelas e equações.
Analisar a variação em diversos contextos	Usar gráficos para analisar a natureza das variações nas relações lineares.

Verifica-se assim a importância e expressão curricular do pensamento algébrico nos currículos de Matemática. Este facto comprova que a competência em Álgebra é fundamental, não só na Matemática mas no dia a dia, já que, segundo Ponte (2006), quem não tiver uma capacidade razoável de trabalhar com números e operações e de entender a linguagem abstrata da Álgebra, fica seriamente limitado nas suas opções escolares, profissionais e no exercício da cidadania democrática.

Contributo da visualização para o desenvolvimento do pensamento algébrico

A visualização e as representações visuais

A forma como as ideias matemáticas são representadas é fundamental para o modo como se compreende e utiliza essas mesmas ideias. O papel das representações tem vindo a ser valorizado na aprendizagem da Matemática, tendo mesmo sido destacada pelo NCTM uma

“Norma” intitulada Representação (NCTM, 2007), considerada como um importante processo matemático. Segundo este documento “o termo representação refere-se tanto ao processo como ao resultado – por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma e à forma, em si mesma” (p. 75), sendo que a sua utilização, pelos alunos, poderá ajudar a tornar as ideias matemáticas mais concretas e acessíveis à reflexão.

Vale (2009), baseando-se em vários autores (e.g. Behr, Harel, Post & Lesh 1992; Lesh, Post & Beher, 1987; Tripathi, 2008) distingue as representações em cinco categorias que se evidenciam durante a aprendizagem matemática: contextual (situações da vida real); concreto (manipulável); semi-concreto (pictorial); verbal (linguagem); simbólico (notação). “Cada uma das representações é uma manifestação de um aspeto do conceito e envolve diferentes níveis cognitivos que devemos alimentar nos alunos” (p. 43). Considera, assim, que as representações não são estáticas, tendo sido alargadas pela introdução da tecnologia na sala de aula. Por isso, será mais apropriado fazer uma reclassificação das representações semi-concretas e concretas em representações visuais. Outro autor que reconhece a utilização de uma ampla variedade de representações visuais em Matemática é Dreyfus (1991), identificando: pictoriais, que representam diretamente objetos; simbólicas, quando representa a situação matemática de uma forma simbólica; estáticas; e dinâmicas, já que transmitem a ideia de uma transformação ativa. Este autor considera que o mesmo objeto matemático pode ter diferentes formas em diferentes visualizações.

Por sua vez, Vale (2009) faz referências às representações mentais, entendendo que representam esquemas internos utilizados para interagir com o mundo exterior. Esta autora considera que, uma das formas pela qual uma representação mental pode surgir é através da visualização. Defende ainda que, em contexto matemático, a representação de um conceito é a criação de uma imagem do mesmo. Tendo em conta que uma representação matemática, muitas das vezes, apenas representa um dos aspetos do conceito matemático, é essencial o uso de múltiplas representações para a compreensão do mesmo. Assim, para se ter sucesso em matemática, será importante ter várias representações mentais dos conceitos, representações essas que devem ser ricas, ou seja, que contenham variados aspetos do conceito em conexão.

Atualmente verifica-se que a visualização está a adquirir um papel central na aprendizagem de Matemática e no fazer matemática, deixando de estar conotada com um fim meramente ilustrativo, para passar a ser reconhecida como uma componente chave do raciocínio, da resolução de problemas e da demonstração (Arcavi, 2003). No entanto, o termo visualização tem sido utilizado na literatura de diferentes formas e com diferentes significados, tornando necessária a sua clarificação. Para Arcavi (2003) a visualização é:

> A capacidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre desenhos, imagens, nas nossas mentes, no papel ou com ferramentas informáticas, com o propósito de descrever e comunicar informação, pensar sobre, de prever ideias desconhecidas e compreensões avançadas. (p.217)

Zazkis, Dubinsky e Dautermann (1996) definiram visualização como uma ação que estabelece uma relação entre uma construção interna e algo a que se acede pelos sentidos. Esta relação pode ser estabelecida em dois sentidos. Por um lado, ser uma construção mental que se associa a objetos ou fenómenos percebidos externamente, ou ser uma construção de objetos ou fenómenos que se identificam com objetos ou processos da mente, usando para isso um meio externo. Há nestas duas definições uma associação da visualização a um processo bidirecional entre a compreensão e o meio externo.

Presmeg (1986) faz referência à existência de imagens visuais, que considera ser um quadro mental que possui informação visual ou espacial. Entende existirem pessoas que são "visualizadores" na medida em que preferem usar métodos visuais na procura de soluções para problemas matemáticos os quais poderiam ser resolvidos quer através de estratégias visuais quer utilizando estratégias não visuais. Propôs, ainda, uma classificação para imagens mentais em cinco tipos: Imagem concreta (imagens na mente), imagem de padrão (relação representada num esquema visual-espacial), imagem da memória de fórmulas, imagem cinestética (imagem que envolve atividade física), imagem dinâmica.

No que se refere à perceção visual, ou seja, ao modo como o mundo físico pode ser visto e apreendido, Duval (1998) considera que existem diferentes formas de *ver* uma figura/objeto. Sugere neste âmbito o reconhecimento através da apreensão percetual e da apreensão discursiva. Quando a figura é vista como uma simples forma, como um todo, trata-se de uma apreensão percetual, quando a figura é vista como a constituição de várias subconfigurações, está-se perante uma apreensão discursiva. Por isso, é fundamental distinguir entre a forma icónica de *ver* as figuras e a interpretação matemática que se faz das mesmas.

Na literatura, têm também sido discutidas limitações e dificuldades ao nível da visualização em contexto educativo. Arcavi (2003) propõe uma classificação das dificuldades que envolvem a visualização em sala de aula, apresentando três categorias: culturais, cognitivas e sociológicas. As dificuldades culturais estão relacionadas com o fato de não existir uma incorporação e valorização da visualização como parte integrante da atividade matemática. As dificuldades cognitivas relacionam-se com o facto de o pensamento visual facilitar ou tornar mais complexa a compreensão de conceitos. As dificuldades sociológicas prendem-se com as questões de ensino, podendo ser considerado mais difícil ensinar recorrendo a estratégias visuais, já que para muitos professores as representações analíticas são mais eficientes do que as visuais, privilegiando as primeiras.

Vale (2009) considera que, como forma de ultrapassar algumas das dificuldades dos alunos com as representações, o ensino deveria:

> promover uma articulação entre as diferentes representações de modo a tornar os estudantes mais flexíveis e criativos e a promover uma melhor compreensão dos conceitos. Algumas das estratégias que os professores podem adotar para fomentar as representações visuais nos seus alunos podem passar por levá-los a exprimir o que veem através de outras formas de representação, como sejam, descrever padrões em tabelas utilizando expressões numéricas adequadas. (p. 50).

Esta autora refere ainda que, sendo implementadas estas estratégias, com o decorrer do tempo, os alunos passarão a utilizar as representações visuais, independentemente de ser pedido ou apresentado, tornando-se ferramentas úteis na resolução de problemas.

Relação entre a visualização e a capacidade de generalizar

Rivera e Becker (2008) afirmam que, em tarefas que envolvam padrões figurativos, a perceção visual é uma das capacidades mais importantes, sendo caracterizada pelo ato de ver e distinguida entre sensorial ou cognitiva. A perceção sensorial permite ver um objeto apenas como um objeto em si mesmo, enquanto que a perceção cognitiva vai além do sensorial, possibilitando o reconhecimento de factos ou propriedades relacionadas com o objeto. Aplicando estes factos ao contexto dos padrões figurativos/visuais, pode afirmar-se que quando os alunos interpretam as figuras de uma sequência como meros objetos estão a percecionar de forma sensorial, enquanto que quando são capazes de reconhecer relações nas figuras, compreendendo a estrutura do padrão, e que juntas originam a sequência, manifestam perceção cognitiva.

Quando Duval (1998) afirma que existem diferentes modos de *ver* uma figura está a referir-se à perceção cognitiva da mesma. A mudança da apreensão percetual, ou seja a observação dos objetos como um todo, para a apreensão discursiva, ou seja a observação dos objetos por partes, é indicadora de uma modificação na perceção cognitiva da figura (Rivera & Becker, 2008).

Para Vale et al. (2011a), *ver* de formas diferentes pode ajudar os alunos de níveis elementares a fazer generalizações que só poderiam concretizar com uma matemática mais desenvolvida. Os mesmos autores defendem que é primordial que os alunos compreendam a relevância da disposição visual na descoberta de estratégias de cálculo mais simples e intuitivas, sendo as tarefas em contextos figurativos um bom ponto de partida para o pensamento algébrico baseado na generalização de padrões. Barbosa (2011), no âmbito de um estudo centrado na resolução de problemas que envolvia a exploração de padrões em contextos visuais, com alunos do 6.º ano, refere a importância das tarefas que permitem a aplicação de estratégias de generalização diferentes, de forma a que os alunos compreendam o potencial das estratégias visuais e consigam criar relações entre o contexto visual e o numérico. Assim, verifica-se que o desenvolvimento do pensamento algébrico pode ser favorecido pela utilização de tarefas em contextos figurativos (Billings, et al. 2007; Vale, et al., 2011a), podendo os alunos recorrer à visualização para facilitar a generalização (Mason, 1996). Para Beigie (2011) o contexto figurativo, nomeadamente o trabalho com padrões geométricos (neste estudo considerados padrões figurativos de crescimento), desempenha um papel fundamental na descoberta de expressões algébricas, na medida em que proporcionam um ambiente ideal para fazer o salto abstrato de números para variáveis. Friel e Markworth (2009), tendo em conta a crescente ênfase no pensamento algébrico, consideram ser necessária uma valorização do raciocínio visual, que combinado com uma análise de padrões geométricos (padrões figurativos de crescimento) permitirá um desenvolvimento consistente do pensamento algébrico dos alunos.

Rivera e Becker (2008) também defendem que a investigação em padrões e generalização demonstra que, ao observar um mesmo padrão, existe uma tendência para este ser visto de diferentes formas pelos observadores, o que leva à produção de diferentes generalizações. Os mesmos autores, através de estudos efetuados com alunos com idades compreendidas entre os 11 e os 14 anos, concluíram que aqueles que generalizam numericamente sem um forte suporte visual têm dificuldade em dar significado às expressões geradas. Vale et al. (2011a) consideram que a falta de experiências com padrões em contextos figurativos pode levar a dificuldades na transição da aritmética para a álgebra.

Lannin (2005) realizou um estudo com alunos do 6.º ano, em que pretendia compreender as estratégias de generalização desenvolvidas pelos participantes e as suas justificações, utilizando tarefas com padrões. Este autor refere que, durante as discussões, e de uma forma geral, os alunos foram capazes de apresentar generalizações adequadas e justificar a utilização de exemplos genéricos, tendo verificado que aqueles que utilizaram esquemas visuais (contextos figurativos) foram mais bem-sucedidos em apresentar argumentos válidos para as suas justificações.

Rivera e Becker (2008) identificam diferentes formas de generalizar com padrões lineares figurativos: generalização construtiva e desconstrutiva. A generalização construtiva (figura 1) é induzida como o resultado de partes não sobrepostas que formam a figura inicial, podendo ser uma forma construtiva linear padronizada ou uma forma construtiva linear não padronizada. Quando os alunos observam a figura, vendo a sobreposição de subconfigurações, sendo necessário um processo de subtração das partes sobrepostas, tem-se um caso de generalização desconstrutiva (figura 2). Vários estudos têm evidenciado que os alunos apresentam maior tendência para utilizar generalizações de tipo construtivo do que de tipo desconstrutivo, já que esta última envolve um nível cognitivo superior no que refere à visualização (Barbosa, 2010; Rivera & Becker, 2008; Taplin, 1995).

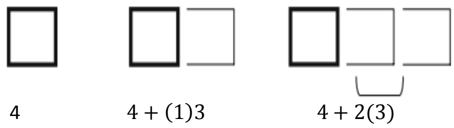


Figura 1. Generalização construtiva de um padrão figurativo (Rivera & Becker, 2008)

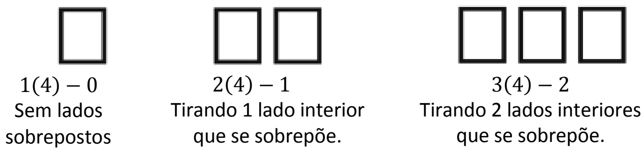


Figura 2. Generalização desconstrutiva de um padrão figurativo (Rivera & Becker, 2008)

Para generalizar um padrão é necessário usar um modo de ação, ou seja, aplicar uma estratégia. Estas podem ser de natureza diversificada. Presmeg (1986) considera uma estratégia visual quando as imagens criadas são fundamentais para encontrar a solução do problema, podendo recorrer ou não a diagramas, mesmo que sejam utilizadas outras estratégias, por exemplo de natureza algébrica. García-Cruz e Martinón (1997), baseando-se em Presmeg, consideram como estratégias visuais aquelas em que o desenho desempenha um papel crucial no processo de abstração. Identificam, também, as estratégias numéricas como sendo aquelas em que o papel principal no processo da abstração é desempenhado por uma sequência numérica. Neste estudo, e tendo em conta que este conceito foi já utilizado por Vale e Pimentel (2005), usa-se, também, a categorização de estratégias mistas quando as estratégias utilizadas pelos alunos evidenciam o recurso às imagens apresentadas/criadas, mas numa perspetiva de facilitação do cálculo.

Rivera e Becker (2005) num estudo realizado com alunos do 9.º ano verificaram que aqueles que generalizavam de uma forma numérica, desenvolviam a generalização sem valorizarem o contexto figurativo e baseando-se nos valores numéricos já conhecidos ou calculados. Os alunos que generalizavam de modo figurativo percebiam as relações existentes propostas pelo contexto figurativo, apresentando mais sucesso nas suas justificações. As regras elaboradas eram uma clara indicação da interpretação das figuras, sendo que as generalizações desenvolvidas expressavam o modo de construção da sequência, realçando o que se mantinha uniforme e invariante. Constataram que "aqueles que generalizavam de forma figurativa entenderam claramente o papel desempenhado pelos símbolos para expressar relações generalizadas em termos explícitos" (p. 201). Becker e Rivera (2005) num outro estudo realizado com alunos do 9.º ano identificaram, para além da generalização numérica e figurativa, também a pragmática. Verificaram que os alunos que empregavam a generalização numérica usavam a tentativa e o erro sem saberem o que representavam os coeficientes no padrão linear. Os alunos que utilizavam a generalização figurativa centravam-se nas relações entre os números na sequência linear. Os alunos que utilizavam a generalização pragmática recorriam aos dois tipos de estratégias, numéricas e figurativas, sendo capazes de ver nas sequências propriedades e relações.

Estratégias de generalização

São vários os estudos realizados com o objetivo de analisar e desenvolver as estratégias evidenciadas pelos alunos na generalização com recurso a padrões. Estes estudos são diferentes quanto ao contexto de trabalho, podendo ser numérico ou visual, quanto ao tipo de padrão utilizado, de repetição e de crescimento, assim como quanto aos participantes que vão desde anos elementares a professores em formação (Barbosa, 2010; Lannin, 2005; Lannin, Barker, & Townsend, 2006; Sasman, Olivier, & Linchevski, 1999; Stacey, 1989).

Stacey (1989), num estudo efetuado com alunos entre os 9 e os 13 anos, utilizando padrões de crescimento, identificou quatro estratégias de generalização utilizadas pelos participantes: (1) contagem, em que o termo da sequência solicitado se obtinham contando os elementos existentes no respetivo desenho; (2) diferença, na qual os alunos determinavam a diferença entre termos consecutivos e, para generalizar, utilizavam múltiplos dessa diferença; (3) *objeto inteiro* em que usavam como unidade um dos termos da sequência e generalizavam, efetuando múltiplos desse termo, tendo por base um raciocínio de proporcionalidade direta; e (4) linear, estratégia em que utilizavam um modelo linear para encontrar a solução, ou seja, uma expressão polinomial de 1.º grau, identificando operações aritméticas a usar, reconhecendo a importância da sua ordem.

Sasman et al. (1999) realizaram um estudo com alunos do 8.º ano, com base em tarefas de generalização em contextos diferentes, numérico e figurativo. Quatro das tarefas eram puramente numéricas, apresentadas sob a forma de tabelas, e as restantes tinham um suporte figurativo. Neste estudo, identificaram várias estratégias de generalização, nomeadamente: (1)

recursiva, quando os alunos se concentravam na diferença; (2) multiplicação proporcional, referente à utilização do raciocínio de proporcionalidade direta, mas, muitas vezes, aplicada de forma errada; (3) decomposição do valor da variável independente, de forma a tentar obter o termo pretendido através da adição do valor dos vários termos resultantes da decomposição, sendo representado por $f(n) = f(a) + f(b) + f(c)$ onde $a + b + c = n$; (4) método da diferença, em que os alunos encontravam a diferença entre termos consecutivos e faziam a sua multiplicação; (5) recursiva alargada, em que adaptavam a recursão para uma estratégia viável na procura de valores mais distantes, sendo representada por $f(n) = (n - k)d + f(k)$, onde d é a diferença entre termos consecutivos; e (6) regra da função, em que os alunos procuravam uma regra explícita que traduzisse a função.

Lannin (2005) desenvolveu um estudo com 25 alunos do 6.º ano, para compreender as estratégias de generalização por eles desenvolvidas e as suas justificações, recorrendo a tarefas com padrões. Neste estudo, e tendo por base investigações anteriores (English & Warren, 1998; Healy & Hoyles, 1999; Stacey, 1989; Swafford & Langrall, 2000), organizou as estratégias de generalização em explícitas e não explícitas. Na primeira categoria, incluiu estratégias que permitiam o cálculo direto de um valor da variável dependente, sendo dado o valor da variável independente, nas não explícitas, agrupou estratégias que não envolviam esse cálculo. Dentro das estratégias explícitas distinguiu as subcategorias: (1) *objeto inteiro,* em que se recorria à proporcionalidade direta, utilizando-se uma parte da sequência como unidade que era multiplicada para obter uma unidade maior (e.g. 3 maçãs custam 8 euros, 9 maçãs custam 24 euros); (2) tentativa e erro, quando o aluno tentava adivinhar uma regra sem ter em conta a razão pela qual poderia funcionar; e (3) contextual, se o aluno construisse uma regra relacionando-a com técnicas de contagem baseadas na análise da construção do padrão apresentado. Para as estratégias não explícitas apresentou duas subcategorias: (1) contagem, em que o aluno continuava a sequência e efetuava a contagem dos elementos no desenho, e (2) recursiva, quando o aluno se baseava em termos anteriores para descobrir o termo seguinte.

Lannin et al. (2006) estudaram as estratégias de generalização algébrica utilizadas por alunos do 5.º ano e os fatores que as poderiam influenciar. Identificaram quatro estratégias de generalização: (1) explícita, quando o aluno construía uma regra que permitia o cálculo imediato de qualquer termo da sequência, dada a sua ordem; (2) *objeto-inteiro,* quando o aluno usava uma parte da sequência como unidade, construindo outro termo a partir desse, usando múltiplos dessa unidade, o que poderia levar a uma generalização errada pois, muitas vezes, era necessário efetuar um ajuste; (3) segmentação (chunking) em que o aluno recorria a um raciocínio recursivo, escolhendo um termo da sequência já conhecido, e obtinha o novo termo, adicionando ao conhecido o múltiplo da diferença entre termos consecutivos; (4) recursiva, quando o aluno descrevia a relação entre termos consecutivos da variável independente, recorrendo a um raciocínio recursivo.

Barbosa (2011), partindo da análise de categorias apresentadas por alguns investigadores (Lannin et al, 2006; Orton, 1999; Rivera & Becker, 2008; Stacey, 1989), propôs uma categorização das estratégias de generalização tendo por base uma investigação realizada com alunos do 6.º ano, no âmbito da exploração de padrões em contextos figurativos. Identificou, a partir deste trabalho, as seguintes categorias: (1) contagem, quando era desenhada uma figura e contados os seus elementos; (2) termo unidade, ao considerar um termo da sequência como unidade, usando múltiplos da mesma. Esta estratégia poderia ser aplicada sem ajuste, com ajuste numérico ou com ajuste contextual; (3) diferença, onde se identificou a subcategoria recursiva (continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos), e a subcategoria múltiplo da diferença (usar a diferença entre os termos consecutivos como fator multiplicativo), a qual poderia ser sem ajuste ou com ajuste; (4) explícita, se os alunos descobrissem uma regra com base no contexto do problema; e (5) tentativa e erro, se tentassem adivinhar a regra fazendo sucessivas tentativas. Aquando do seu estudo, esta autora concluiu que as estratégias de generalização mais utilizadas foram a contagem, quando se tratava de situações de generalização próxima, e a explícita, em casos de generalização distante. Contudo, Orton e Orton (1999) referem que os alunos têm maior tendência para generalizar recursivamente do que recorrendo a uma relação entre as variáveis dependente e independente.

Dificuldades e fatores que influenciam a generalização

Na literatura são identificados alguns fatores que podem influenciar a escolha das estratégias de generalização, independentemente da sua adequação. Barbosa (2010) refere a ordem de grandeza dos valores propostos nas tarefas, que podem condicionar o tipo de estratégia usada, tratando-se de uma generalização próxima ou distante. Destaca também as características dos números atribuídos às variáveis, que podem motivar a utilização de um raciocínio proporcional. Lannin et al. (2006) identificaram três categorias de fatores neste âmbito: fatores sociais, fatores cognitivos e fatores relacionados com a estrutura da tarefa. Os fatores sociais advêm das interações e influências dos colegas e do professor. Os fatores cognitivos dizem respeito às estruturas mentais do aluno. Estas podem assimilar novo conhecimento à estrutura existente ou acomodar a estrutura mental para se adaptar ao novo conhecimento. Em relação ao pensamento algébrico, as estruturas cognitivas envolvem o conhecimento prévio das operações matemáticas, as estratégias utilizadas noutras tarefas e a capacidade de visualizar a estrutura do padrão, em relação ao modelo matemático criado. Os fatores referentes à estrutura da tarefa relacionam-se com a sua natureza e os valores utilizados. Estes autores referem ainda que, no estudo que efetuaram, verificaram que, dentro da estrutura da tarefa, a capacidade de visualização de uma situação algébrica também influenciou a escolha da estratégia por parte dos alunos. Tarefas em que o aluno consiga facilmente observar a mudança entre termos leva à utilização de uma estratégia recursiva. A representação visual também pode ajudar os alunos a utilizar a estratégia explícita. Estas representações visuais estão diretamente ligadas com as estratégias de contagem utilizadas pelos alunos. Concluíram que algumas tarefas facilitam o reconhecimento de certas relações que levam à utilização de estratégias de generalização particulares. Assim, algumas tarefas promovem o uso do raciocínio recursivo, enquanto outras podem incentivar a utilização de um raciocínio explícito. Verificaram que, quando os valores apresentados são próximos, independentemente do tipo de tarefa e da representação visual da situação, os alunos geralmente utilizam regras baseadas no raciocínio recursivo. Normalmente, os alunos que se baseiam na visualização da situação revelam compreensão da relação entre a regra elaborada e o contexto apresentado, enquanto que os alunos que se baseiam no contexto numérico revelam pouca noção dessa relação. Quando os valores apresentados são múltiplos dos valores conhecidos da sequência, existe uma tendência para a aplicação desadequada da estratégia *objeto-inteiro* em padrões lineares crescentes e da segmentação em padrões lineares decrescentes. Referem ainda ter verificado que alunos com dificuldades de visualização aplicam de forma incorreta a estratégia *objeto-inteiro,* enquanto que alunos que revelam capacidades de visualização reconhecem a necessidade de ajustar a estratégia *objeto-inteiro* ao contexto apresentado. Finalmente, verificaram que, quando os valores dados são distantes, estimulam a utilização de estratégias explícitas. Contudo, os alunos com dificuldades de visualização socorrem-se da estratégia tentativa e erro para realizar generalizações, baseando o seu raciocínio nas relações numéricas, desvalorizando as relações que surgem do contexto apresentado.

Sasman et al. (1999) sublinham a importância de refletir sobre a utilização de figuras transparentes e figuras não transparentes em contextos figurativos, já que podem influenciar a generalização. Numa figura transparente a regra está, de forma clara, incorporada na estrutura da figura, enquanto que numa figura não transparente a regra não é facilmente observada nas figuras que compõem a sequência, podendo tornar mais complexa a tarefa de generalizar. Estes autores fazem também referência à utilização de "números sedutores" numa sequência, sendo estes múltiplos de termos conhecidos, que podem despoletar o recurso a estratégias diferentes daquelas que seriam usadas com “números não sedutores”.

Driscoll (1999) aponta três situações que podem constituir um obstáculo ao raciocínio dos alunos e assim provocar erros na generalização: a rapidez com que estes procuram uma expressão geral, trabalhando poucos exemplos; a análise da sequência conduzir a conclusões que não são corretas, pois não refletiram sobre as relações que estabeleceram, nem na sua real importância; a generalização a partir de propriedades erradas, como a utilização da proporcionalidade direta de forma incorreta. O autor considera que estas situações surgem como desafios para os professores na sua procura em proporcionar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos seus alunos. English e Warren (1998), num estudo envolvendo padrões figurativos de crescimento e tabelas de dados, relatam dificuldades dos alunos na generalização de padrões, especialmente na formulação da expressão algébrica da mesma. Essas dificuldades, evidenciadas pelos alunos menos proficientes, manifestaram-se na escolha de estratégias inapropriadas, nomeadamente na utilização do raciocínio recursivo sem fazerem uso de notação algébrica na generalização. Contudo, os alunos com mais capacidades foram capazes de identificar uma relação funcional no padrão e assim utilizar a notação algébrica para generalizar. Barbosa (2011), no estudo supracitado, também refere que os alunos utilizaram de forma incorreta o raciocínio proporcional aquando da generalização. A autora relaciona estes erros com a não formação de uma imagem mental do problema, verificando que os alunos recorreram somente a propriedades numéricas sem qualquer ligação ao contexto.

Proposta didática para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico

A finalidade básica da aula de Matemática, segundo Mason e Johnston-Wilder (2006), é que os alunos aprendam algo sobre um determinado tópico, sendo que para isso são planeadas tarefas. Para Doyle (1988) as tarefas utilizadas em sala de aula são a base para aprendizagem dos alunos. Uma tarefa matemática é aquilo que se pede aos alunos para fazer, e que constitui a atividade na sala de aula, desde cálculos, a representações até à manipulação de símbolos (Mason & Johnston-Wilder, 2006). Já Stein e Smith (2009) referem que uma tarefa é todo o segmento da atividade existente em sala de aula, destinada ao desenvolvimento de uma ideia matemática em particular, que poderá integrar vários problemas relacionados ou um único problema que permita desenvolver um trabalho prolongado. Estas autoras consideram que a mesma tarefa pode ser abordada de diferentes formas, sendo que cada uma dessas formas requer, dos alunos, níveis de exigência cognitiva diferentes, que podem ir desde o nível reduzido, que se baseia na memorização de procedimentos, até níveis mais elevados como seja a utilização da abordagem "procedimentos com conexões" e da abordagem "fazendo matemática", que envolve exploração de relações. Contudo, Stein e Smith (2009) referem ainda que, as tarefas passam por várias fases, como se mostra na figura 3, podendo mudar de natureza de uma fase para a outra. Neste estudo, seguiu-se esta sequência de fases na medida em que as tarefas foram recolhidas de várias fontes, tendo de seguida sido adaptadas e apresentadas à turma. Os alunos realizaram as tarefas propostas, o que se traduziu em aprendizagem por parte destes.

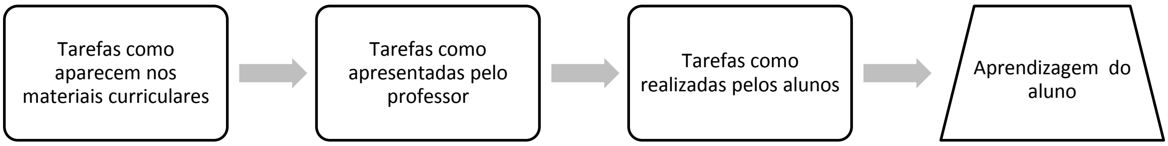


Figura 3. O quadro das tarefas matemáticas (Stein & Smith, 2009)

Para Ponte (2005b) as tarefas determinam as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos. Assim, a formulação de tarefas adequadas por parte do professor permitirá enriquecer a atividade do aluno. Contudo, a seleção de boas tarefas não é suficiente. É também muito importante o modo como o professor as propõe e as conduz durante a sua realização na sala de aula. Este autor defende, igualmente, a diversificação de tarefas, na medida em que propostas de natureza diferente permitem alcançar objetivos curriculares diferentes. Contudo, a seleção e a articulação das tarefas vai para além da mera diversificação. As tarefas devem, no seu conjunto, possibilitar uma trajetória de aprendizagem coerente de forma a que os alunos construam conceitos fundamentais, compreendam procedimentos matemáticos, dominem notações e formas de representação e estabeleçam conexões (ME-DGIDC, 2007; Ponte, 2005b). Vale (2009) também defende a diversificação das tarefas a fornecer aos alunos, considerando que a sua escolha é decisiva para caracterizar o trabalho que se desenvolve e deve ser realizada de forma criteriosa. Contudo, o papel do professor no seu desenvolvimento é crucial, e, neste sentido, as tarefas devem ser acompanhadas de um questionamento adequado, o qual é decisivo para a aprendizagem dos alunos (Vale, 2009). Esta ênfase na diversificação de tarefas desafiantes, na forma como são implementadas pelo professor, também é preconizado pelo documento *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) e pelo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2007).

É necessário ter em atenção que uma tarefa não deve ser aplicada isoladamente. "Uma tarefa pode dar um contributo importante para a aprendizagem, mas é o conjunto das tarefas propostas que é decisivo para que todos os objetivos de uma certa unidade sejam atingidos"

(Ponte, 2009, p. 103) Para se proporcionar um trajeto de trabalho benéfico à aprendizagem, as tarefas devem ser apresentadas aos alunos em sequências coerentes, ou seja, numa cadeia de tarefas (Ponte, 2009).

Simon (1995) desenvolveu um modelo esquemático do carácter cíclico e inter-relacional de saber, do pensar, da tomada de posições e da atividade do professor, a que designou *Ciclo de Ensino da Matemática*. Este autor procurou caracterizar o processo pelo qual o professor decide o conteúdo, o design e a sequência das tarefas matemáticas a implementar. O *Ciclo de Ensino da Matemática,* para além de retratar uma visão da tomada de decisão do professor em relação ao conteúdo e às tarefas, tendo em conta uma perspetiva construtivista, e os desafios da aula de matemática, salienta também a importante interação entre os planos do professor e a construção coletiva das atividades em sala de aula. Dentro deste ciclo, Simon (1995) salienta a *trajetória hipotética de aprendizagem* que é formada por três componentes: (1) os objetivos de aprendizagem do aluno; (2) as tarefas matemáticas que irão promover a aprendizagem; e (3) as hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos. Este autor considera que, segundo este modelo, a elaboração de uma hipotética trajetória de aprendizagem, antes do processo de ensino em sala de aula, é a forma do professor planear a atividade da aula. Simon e Tzur (2004), na revisão da construção de uma *trajetória hipotética de aprendizagem*, consideram que, enquanto que os objetivos de aprendizagem dos alunos orientam as outras componentes, as hipóteses sobre o processo de aprendizagem e a seleção de tarefas estão inter-relacionadas: as tarefas são selecionadas tendo por base as hipóteses e as hipóteses baseiam-se nas tarefas propostas. A construção de uma *hipotética trajetória de aprendizagem* assenta em quatro pressupostos: (1) baseia-se na compreensão do conhecimento do aluno; (2) é um veículo para a planificação da aprendizagem de conceitos particulares; (3) as tarefas desenvolvem ferramentas que promovem a aprendizagem de conceitos matemáticos, sendo por isso consideradas uma parte fundamental do processo de ensino; e (4) o professor está regularmente envolvido na alteração de qualquer aspeto da trajetória de aprendizagem, devido à sua natureza hipotética e incerta (Simon & Tzur, 2004).

Vale e colaboradores (2011a) apresentam uma proposta didática, desenvolvida no âmbito do Projeto *Matemática e Padrões no ensino básico: perspetivas e experiências curriculares de alunos e professores*, constituída por um conjunto de tarefas envolvendo padrões em contexto figurativo, com a grande finalidade de desenvolver o pensamento algébrico. Estas tarefas permitem diferentes abordagens e implicam processos de pensamento de ordem superior, como analisar, continuar, conjeturar, justificar e representar. Nesta proposta pedagógica, as tarefas, de natureza exploratória e investigativa, promovem a capacidade para generalizar impulsionando assim o desenvolvimento do pensamento algébrico. Vale (2009), de acordo com Simon e Tzur (2004), considera que a hipotética trajetória de aprendizagem conduziu a esta proposta didática que se organiza em várias fases. Assim, a sequência de tarefas está estruturada em: (1) contagens visuais, que se dividem em tarefas de contagens visuais básicas e tarefas de contagens visuais noutros contextos; (2) sequências, de repetição e de crescimento, em que há a descoberta e generalização de padrões; e (3) problemas padrão. As ideias expressas nesta proposta didática podem ser resumidas pelo esquema seguinte (figura 4):

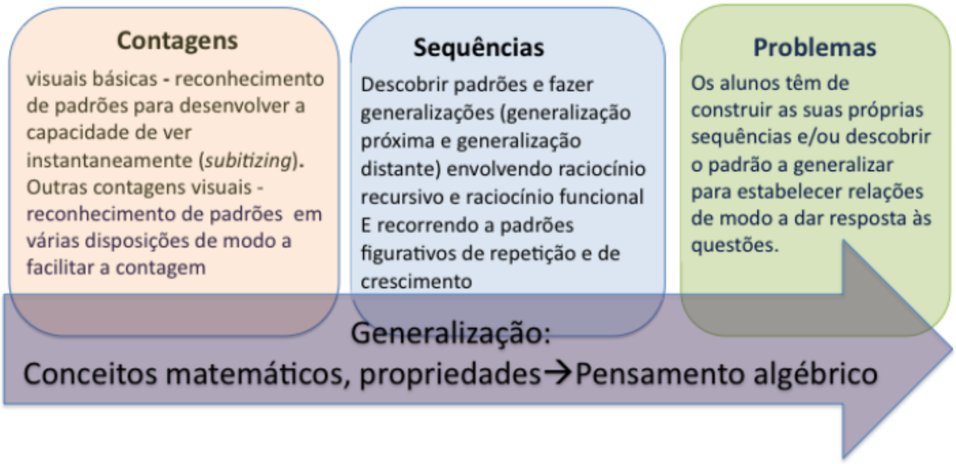


Figura 4. Ideias expressas na proposta didática (Vale, Pimentel, Alvarenga, & Fão, 2011b)

Ao nível das contagens visuais, são apresentadas tarefas que possibilitam experiências prévias de contagem, com suporte visual, e que são requisitos para o posterior trabalho com sequências (Vale, et al., 2011a). Pretende-se desenvolver nos alunos "a capacidade de contagem rápida para que adquiram a necessária flexibilidade de pensamento para identificar e escolher a melhor maneira de ver, de acordo com os propósitos pretendidos" (Vale, et al. 2011b, p. 4). Nestas tarefas "de contagem, apenas a sequência de contagem é um procedimento rotineiro. O significado associado à contagem é uma ideia chave a partir da qual outros conceitos numéricos podem ser desenvolvidos" (Vale, et al., 2011a, p. 30). Vale et al. (2011a) consideram ser fundamental que as crianças desenvolvam a sua capacidade de "ver instantaneamente" através do reconhecimento de padrões visuais. Todo este trabalho é essencial para prosseguir com as contagens visuais noutros contextos onde são propostas tarefas em que se espera que os alunos encontrem diferentes formas de ver e, assim, compreendam a relevância do arranjo visual na descoberta de expressões numéricas mais simples e intuitivas. Este tipo de tarefas serão o ponto de partida para o desenvolvimento do pensamento algébrico e põem em evidência uma capacidade fundamental o subitizing.

Segundo Clements (1999) subitizing é “ver instantaneamente quantos são”, é a “apreensão percetual direta da numerosidade de um grupo” (Clements, 1999, p. 400). Este autor refere a existência de dois tipos de subitizing: percetual e conceptual. No primeiro dá-se o reconhecimento do número sem usar outro processo matemático, tendo por base a ideia de fazer unidades para contar. As crianças mais pequenas usam-no para construírem a sua ideia de cardinalidade. No subitizing conceptual existe o reconhecimento de um padrão como a composição das partes que formam um todo, sendo um exemplo as peças de dominó, entre outros materiais. Este autor, baseando-se em Steffe e Cobb, refere que a utilização de padrões no subitizing conceptual ajuda no desenvolvimento do sentido abstrato do número e de estratégias aritméticas nas crianças. A capacidade de efetuar o subitizing pode ser influenciada por diferentes fatores. Por exemplo, o arranjo espacial do padrão pode dificultar o subitizing. Normalmente, os arranjos retangulares são considerados mais fáceis, pelas crianças para fazer o subitizing, seguindo-se os arranjos lineares e os circulares. A disposição aleatória é considerada como mais difícil para realizar subitizing. Fosnost e Dolk (2001) consideram que quantidades de cinco ou menos elementos normalmente permitem a realização de subitizing, sendo entendidas como um todo sem recorrer a qualquer processo matemático. Clements (1999) considera que deve ser incentivada a aprendizagem do subitizing, afirmando que as atividades que promovem o subitizing conceptual desenvolvem também a imagem já que, na apresentação das suas estratégias, os alunos recorrem às imagens mentais criadas.

Vale et al. (2011a) entendem que esta capacidade de ver instantaneamente é muito importante devendo ser estimulada e ensinada. Considerando o trabalho com números, Van de Walle et al. (2010) identifica quatro tipos de relações que as crianças devem desenvolver: (1) relações espaciais em que existe um reconhecimento instantâneo de conjuntos de objetos em arranjos padronizados, sem contagem (subitizing); (2) relações com números de *um* ou *dois mais* e de *um* ou *dois menos*; (3) números de referência, como o 5 e o 10; e (4) relações parte-parte-todo, em que um número é reconhecido como sendo constituído por duas ou mais partes. No trabalho com padrões em contexto figurativo, como caminho para a generalização, estes autores valorizam a análise dos termos da sequência e a procura de estratégias de contagem sem o recurso à simples contagem um a um. Dentro das estratégias de contagem, consideram que os alunos podem utilizar: contagem por saltos; contagem por diferentes grupos; contagem um a um; contagem por grupos e grupos de uma unidade; e contagem por grupos de dez e o restante um a um. Para além da contagem um a um e da contagem saltos, Fosnot e Dolk (2001) acrescentam a utilização de dobros.

Após, surgem tarefas com sequências que envolvem padrões de repetição e de crescimento tendo como objetivo reconhecer, descobrir, continuar, completar e generalizar padrões. Por fim, propõem tarefas com um conjunto de problemas onde os alunos terão que descobrir a sequência, já que esta não é apresentada de forma explícita, e explorá-la para chegarem à solução. Podem surgir, para além dos padrões de repetição e de crescimento, padrões que levem a invariantes e possibilitem o estabelecimento de propriedades numéricas ou geométricas. As diferentes formas de resolver cada tarefa é uma oportunidade à discussão de ideias e à sua justificação (Vale, et al., 2011a). Neste estudo adotou-se esta proposta didática tendo sido implementada na fase empírica do mesmo. No desenvolvimento da primeira fase desta proposta didática, contagens, pretende-se o desenvolvimento da capacidade de contagem rápida, a qual tem por base o subitizing, revelando-se pertinente uma reflexão sobre o mesmo.

CAPÍTULO III – METODOLOGIA

Neste capítulo apresentam-se e fundamentam-se as opções metodológicas adotadas nesta investigação. Explicita-se o papel da investigadora, a forma como foram selecionados os participantes e são apresentados os métodos de recolha dos dados. É feita, também, uma descrição da seleção e da aplicação das tarefas, da calendarização do estudo terminando com uma explicitação do processo de análise dos dados.

Opções metodológicas

O objetivo desta investigação é compreender como se caracteriza o pensamento algébrico de alunos do 6.º ano no âmbito de contextos visuais, nomeadamente o tipo de estratégias identificadas no processo de generalização e as dificuldades evidenciadas pelos alunos no que refere ao pensamento algébrico nestes contextos. Dadas as características do problema em estudo, optou-se por uma metodologia qualitativa já que o foco do estudo não está em generalizar resultados mas sim compreender de forma aprofundada um fenómeno particular, como o pensamento algébrico. Segundo Patton (2002), os métodos qualitativos ajudam na análise de questões em profundidade e pormenor, já Bogdan e Biklen (1994) acrescentam que os investigadores qualitativos tentam "compreender o processo mediante o qual as pessoas constroem significados e descrever em que consistem estes mesmos significados" (p. 70). Também Vale (2004) refere que a investigação qualitativa é adotada quando se pretende a descrição e explicação detalhada de fenómenos, privilegiando os processos mais do que os produtos.

Segundo Bogdan e Biklen (1994) a investigação qualitativa possui cinco características fundamentais: (1) o ambiente natural é a fonte direta dos dados, sendo o investigador o principal instrumento de recolha de dados; (2) os dados recolhidos são de natureza descritiva; (3) o foco do investigador está centrado no processo mais do que nos resultados; (4) os dados são analisados de forma indutiva; e (5) o investigador está interessado no significado das ações, ou seja, na perspetiva dos participantes. Justifica-se, mais uma vez, a escolha de uma metodologia qualitativa já que estas características estão presentes neste estudo, na medida em que decorreu no ambiente natural que é a sala de aula de Matemática, sendo a investigadora observadora participante, tendo recolhido dados descritivos a partir de diferentes fontes. Durante o estudo privilegiou-se a compreensão dos processos mais do que dos resultados, ou seja, procurou-se compreender em profundidade a forma como os participantes desenvolveram o pensamento algébrico, procedendo-se à análise dos dados de forma indutiva, o que levou a uma categorização dos mesmos, permitindo assim descrever as estratégias utilizadas pelos alunos, assim como as suas dificuldades.

O design a ser escolhido numa investigação depende de vários fatores, como a natureza das questões em estudo, o controlo que o investigador tem sobre os acontecimentos e o foco do estudo estar ou não centrado em fenómenos que ocorrem na investigação (Yin, 2009). Segundo Yin (2009), o design de estudo de caso é um método adequado quando: (a) se colocam questões com a finalidade de saber o 'como' e o 'porquê'; (b) o investigador tem pouco controlo sobre os acontecimentos e (c) o estudo centra-se em fenómenos contemporâneos inseridos num determinado contexto real. Aplica-se quando se pretende compreender um fenómeno em profundidade e quando não existe um controlo sobre comportamentos relevantes, tendo-se que recorrer a uma ampla variedade de evidências que surgem de variadas fontes, como a observação, as entrevistas, os documentos e os artefactos (Yin, 2009). Para Ponte (1994) o *design de estudo de caso* adequa-se quando se pretende investigar uma entidade bem definida, procurando compreendê-la em profundidade, buscando o que tem de singular e próprio.

É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única em muitos aspetos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global do fenómeno de interesse.

> O estudo de caso apresenta um forte cunho descritivo, apoiando-se numa descrição o mais completa possível em que o investigador procura compreender a situação tal como ela é. Contudo, pode também existir uma interrogação sobre a situação comparando-a com outras já existentes, apresentando assim um profundo alcance analítico. A realização de um estudo de caso "pode, deste modo, ajudar a gerar novas teorias e novas questões para futura investigação" (Ponte, 1994, p. 3).

Tendo em conta os aspetos descritos anteriormente, dentro da metodologia qualitativa, optou-se pela realização de um estudo de caso, já que se pretendia compreender o desenvolvimento do pensamento algébrico, procurando-se responder a questões de natureza explicativa, sem se visar um controlo sobre os fenómenos ocorridos, tendo-se desenvolvido a investigação num contexto específico, a aula de matemática.

Os estudos de caso podem ser realizados com diferentes propósitos e, neste sentido, alguns autores apresentam diferentes tipologias para os mesmos. Stake (2009) considera três tipos de estudo de caso: (1) estudo de caso intrínseco, quando o caso surge de forma natural pois existe um interesse intrínseco em compreender melhor aquele caso em particular; (2) estudo de caso instrumental, quando o estudo do caso em si permite alcançar um conhecimento mais profundo sobre determinada teoria ou compreender melhor outro fenómeno; e (3) estudo de caso coletivo, quando se entende que um conjunto de caso permitirá uma melhor compreensão de um dado fenómeno, ou seja, trata-se de um estudo instrumental contendo vários casos, devendo existir uma coordenação entre os diversos estudos individuais. Tendo em conta esta categorização, neste trabalho realizou-se um estudo de caso instrumental, uma vez que o objetivo não era a compreensão de um caso específico mas, a partir dela, compreender um fenómeno mais abrangente que é a caracterização do pensamento algébrico de alunos do 6.º ano no âmbito de contextos visuais. Este estudo foi desenvolvido numa turma de 6.º ano de escolaridade, tendo sido escolhidos dois alunos, que constituíram os casos, tendo, no entanto, sido sempre considerado o contexto turma.

Papel da investigadora

Num estudo de caso, o investigador pode assumir vários papéis, nomeadamente professor, observador participante, entrevistador, leitor, contador de histórias, defensor, artista, conselheiro, avaliador, entre outros (Stake, 2009). Para Vale (2004), neste tipo de design, o investigador assume-se como o principal instrumento na recolha e análise de dados cabendo-lhe a tomada de decisões, como que dados recolher, quem entrevistar ou observar, ou que documentos analisar.

Neste estudo, que incidiu numa turma do 6.º ano de escolaridade e particularmente sobre dois alunos definidos como casos, a investigadora assumiu o duplo papel de professora e investigadora. Apesar de não ser a professora de Matemática da turma, aquando da aplicação do estudo assumiu esse papel. Esta opção foi tomada em consonância com o professor titular, que considerou preferível não ter influência na aplicação das tarefas do estudo para que a investigadora pudesse intervir como entendesse. Contudo, existia já uma relação estreita com a turma, uma vez que a investigadora era a professora de Ciências da Natureza. Este facto permitiu ter um conhecimento aprofundado das características dos alunos da turma e o estabelecimento de relações de confiança que possibilitaram o desenrolar da investigação de forma natural, criando um ambiente propício à aplicação do estudo. Esta proximidade entre a investigadora e os participantes permitiu vivenciar, de forma interna, todas as situações que ocorreram ao longo do estudo, facilitando a compreensão e apreensão de significados. Assim, considera-se que este duplo papel contribuiu para a validade do estudo, na medida em que decorreu em contexto natural, surgindo de forma espontânea momentos de extrema riqueza para a investigação, como questões e diálogos que decorreram da aplicação das tarefas.

Considerando o papel de professora, procurou-se promover um bom ambiente de trabalho, no qual os alunos sentissem liberdade de expressão, encorajando-os a colocar questões, a formular conjeturas, a argumentar e justificar os seus raciocínios. Procurou-se também ter um papel moderador e orientador das discussões geradas, de forma a não condicionar o raciocínio dos alunos e as resoluções das tarefas.

Relativamente ao papel de investigadora, assumiu-se que esta constituiria o principal meio de recolha, interpretação e análise dos dados, agindo como observadora participante. Para isso, pesquisou, selecionou e planificou tarefas, estruturando uma intervenção baseada na proposta didática desenhada por Vale e colaboradores (2011a), já descrita no Capítulo II deste trabalho. O facto da investigadora ser a professora de Ciências da Natureza da turma, facilitou a sua integração no contexto, sendo encarada como um elemento naturalmente integrante e não como um elemento estranho ao contexto, evitando uma possível inibição das ações habituais dos alunos. Apesar da proximidade entre a investigadora e os sujeitos ter vantagens, na medida em que permite uma forte ligação com todas as situações que decorrem ao longo da aplicação do estudo, é de referir que também traz condicionantes, nomeadamente no registo sistemático de todas as observações. Assim, a investigadora procurou dosear a observação e a participação de forma a estar envolvida "na atividade como um *insider* e ser capaz de refletir como um *outsider*" (Eisenhart, 1988, citado por Ponte, 1994, p. 10). Para garantir a imparcialidade do estudo, é fundamental que o investigador seja capaz de se distanciar como observador da realidade e não a influenciar (Santos, 2002).

Este duplo papel de professora/investigadora revelou-se árduo e revestiu-se de complexidade, uma vez que foi necessário gerir muito bem todas as funções inerentes a cada um dos papéis. Apesar do envolvimento completo por parte da investigadora poder pôr em causa a objetividade da investigação, considerou-se que esta foi a forma mais adequada de perceber e interpretar os fenómenos que surgiram ao longo do estudo. Como forma de evitar a subjetividade, houve a preocupação por parte da investigadora de recorrer a diversas técnicas de recolha de dados, tendo assim acesso a múltiplas fontes de evidência, fazendo uma análise cuidada de toda a informação, o que conferiu uma maior validade e rigor à investigação.

Participantes e escolha dos casos

O estudo realizou-se durante o ano letivo 2011/2012, numa Escola Básica Integrada situada numa freguesia do distrito de Braga e incidiu sobre uma turma de 6.º ano de escolaridade. A preferência pelo 6.º ano deveu-se ao facto de no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-

DGIDC, 2007), nomeadamente nos percursos temáticos de aprendizagem, estar definido para este ano de escolaridade o tópico *Relações e Regularidades*. Apesar de nesse ano letivo a investigadora apenas lecionar a disciplina de Ciências da Natureza, o estudo foi aplicado nas aulas de Matemática, já que o professor titular disponibilizou as suas turmas para que o estudo fosse aplicado. Tendo em conta que a investigadora era a professora de Ciências da Natureza das turmas em causa, o critério de seleção entre as três turmas foi a compatibilidade de horário da investigadora e das aulas de Matemática dos alunos. A escolha do Tópico *Relações e Regularidades* prendeu-se com motivações e interesses pessoais, nomeadamente o gosto pessoal pela Álgebra e a necessidade de um aprofundamento a nível profissional deste tópico da Matemática. Para isso, contribuiu a crescente enfâse da Álgebra patente nos mais recentes documentos (ME-DGIDC, 2007; NCTM, 2007), assim como a defesa da introdução do pensamento algébrico no currículo de Matemática logo nos anos iniciais (Kaput, 1999).

Tendo como referência Bogdan e Biklen (1994), seguiu-se uma abordagem objetiva, tendo-se explicitado os interesses do estudo, na tentativa de que os participantes colaborassem de forma empenhada no mesmo. Para isso, foi pedida autorização à Direção da Escola para a realização da investigação (Anexo 1), assim como aos Encarregados de Educação (Anexo 2), esclarecendo os objetivos do estudo e a dinâmica do mesmo e garantindo o anonimato dos participantes (Stake, 2009). Todo este processo foi realizado em parceria com o professor de Matemática da turma, que esteve presente na reunião efetuada com os Encarregados de Educação, aquando da apresentação do estudo. Para além disso, a investigadora também explicou aos alunos o que pretendia, descrevendo as diferentes fases da investigação, de forma a que a sua aplicação decorresse de forma natural.

Na realização de um estudo de caso não se recorre à lógica de amostragem aleatória, procura-se antes definir critérios para que o(s) caso(s) escolhido(s) permita(m) compreender, ao máximo, o problema em estudo e que, ao mesmo tempo, acolha a investigação e seja de fácil acesso (Stake, 2009). Vale (2004), baseando-se em vários autores, afirma que:

> O estudo de caso não utiliza uma amostragem aleatória e numerosa, mas sim criteriosa ou intencional, baseada na suposição de que, se queremos descobrir, compreender, e obter conhecimento sobre determinado fenómeno, então devemos escolher uma amostra a partir da qual possamos aprender o máximo possível. (p. 196)

Assim, tendo em conta as características do estudo, procurou-se definir um número de casos que permitisse compreender o fenómeno em estudo e que constituísse uma dimensão de trabalho a que a investigadora pudesse dar resposta. Inicialmente decidiu-se acompanhar três alunos no contexto da turma, tendo, no entanto, todos os alunos da turma realizado as 10 tarefas implementadas. Contudo, o número de alunos caso foi alterado ao longo do estudo. Após uma primeira análise dos dados, verificou-se a replicação dos mesmos já que alguns aspetos se repetiam nos diferentes casos, tendo-se optado por acompanhar mais de perto apenas dois alunos.

A escolha dos casos é crucial neste tipo de investigação e deve ser orientada pela necessidade de aceder a informação rica e detalhada acerca do que se pretende estudar. O investigador deve usar critérios bem definidos para que a amostra escolhida permita compreender detalhadamente os fenómenos (Stake, 2009). Assim, na seleção dos alunos caso foram definidos os seguintes critérios: assiduidade; razoável capacidade de comunicação; e diferentes níveis de desempenho. A classificação dos alunos pelo nível de desempenho foi realizada com a colaboração do professor de Matemática da turma, já que este apresentava um conhecimento aprofundado deste parâmetro. Para além destes critérios foram ainda considerados a predisposição para participar no estudo e a facilidade em reunir com a investigadora.

Durante o primeiro e o segundo períodos letivos, a investigadora foi conhecendo as características dos alunos, tendo recolhido um conjunto de informações com base nos registos biográficos, na aplicação de um questionário (Anexo 3) e nas observações efetuadas nas aulas de Ciências da Natureza. A seleção dos três alunos que iriam constituir os casos foi realizada no segundo período, tendo o estudo apenas sido aplicado no terceiro período, já que o tópico *Relações e Regularidades* tinha sido planificado para este momento. Contudo, no terceiro período, e durante a aplicação do estudo, um dos casos foi abandonado. Assim, dos três alunos selecionados, definiram-se como casos o Daniel e o André. Os nomes atribuídos a estes alunos são fictícios, de forma a garantir o seu anonimato. Para que os alunos caso não fossem condicionados no decorrer do seu trabalho, e para não desmotivar os restantes alunos, a turma não foi informada do papel desempenhado por estes na investigação. Assim, toda a turma participou de forma empenhada na resolução das tarefas propostas, conseguindo-se obter um ambiente natural na sala de aula no decorrer da investigação.

Métodos de recolha dos dados

Os dados são "materiais em bruto que os investigadores recolhem do mundo que se encontram a estudar; são os elementos que formam a base de análise" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 149). A fase de recolha de dados é bastante importante existindo uma grande variedade de fontes que dão lugar à emergência de dados de natureza diversa e que estão interligados na investigação

(Bogdan & Biklen, 1994; Vale, 2004). Segundo Yin (2009) a construção de um estudo de caso implica a utilização de múltiplas fontes de evidência, podendo assumir a forma de entrevistas, observação, artefactos ou até análise documental.

Assim, neste estudo, foram recolhidos dados através das seguintes técnicas: observação participante; entrevista; questionário; registos em áudio e vídeo; e análise de documentos. Esta multiplicidade de métodos de recolha de dados teve a intenção de atingir um conhecimento profundo do fenómeno em estudo, facilitando assim a triangulação dos dados, o que confere validade aos resultados (Denzin & Lincoln, 2003).

Observação participante

A observação é considerada a melhor técnica de recolha de dados em investigações desta natureza. Importa dar especial atenção aos aspetos que se pretende clarificar já que não se consegue registar tudo o que se observa (Vale, 2004). A natureza de uma observação varia conforme o grau de envolvimento do investigador. Este pode assumir uma atitude passiva, estando apenas a observar sem se envolver ou pode ter um papel de interveniente ativo durante a observação, interagindo com os sujeitos (Vale, 2004). Este último caso constitui a observação participante. Para Vale (2004) neste tipo de observação, o investigador assume um papel ativo envolvendo-se nos acontecimentos com grande proximidade, criando assim situações que fornecem dados complementares em relação aos que resultam da observação naturalista.

Neste estudo foi privilegiada a observação participante já que a investigadora assumiu também o papel de professora da turma aquando da implementação do estudo. Foram conduzidos diálogos recorrentes com os participantes, quer para os apoiar na resolução das tarefas, quer para compreender as suas perspetivas e alguns dos registos realizados. Como observadora participante, a investigadora/professora assumiu-se também como principal instrumento de recolha de dados. Este duplo papel levou a uma cuidada planificação da observação, uma vez que se tornava difícil efetuar os registos no momento da observação. Para facilitar este procedimento, foi criado um guião de observação (Anexo 4), onde a investigadora efetuou registos decorrentes da observação no momento da aplicação das tarefas, os quais eram completados imediatamente após as aulas ou poucas horas depois, constituindo as notas de campo. Procurou-se que estes registos descrevessem da forma mais fiel e completa possível a aula, sendo também registadas interpretações da investigadora. Contudo, consciente da dificuldade de registar todos os fenómenos ocorridos, procedeu-se a gravações vídeo e áudio de cada uma das sessões como forma de minimizar este constrangimento.

Vale (2004) considera que existem vantagens na interação entre a observação e a entrevista. Estas duas fontes de recolha de dados enriquecem-se mutuamente para além de serem de grande utilidade para a análise dos mesmos. “As entrevistas dão orientações para as observações do investigador, enquanto que as observações sugerem ideias para as entrevistas” (Vale, 2004, p. 181). Assim, a observação das aulas teve, também, um papel preponderante na formulação de questões orientadoras que integraram as entrevistas realizadas posteriormente.

Entrevista

A entrevista permite obter algumas informações que não se podem observar, como pensamentos e intenções, procurando assim a perceber a perspetiva do entrevistado o que a torna numa das formas mais eficientes de recolha de dados (Vale, 2004). A entrevista “é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspetos do mundo” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 134). Na investigação qualitativa, a entrevista é frequentemente utilizada como forma de complementar as observações, permitindo que o investigador aceda a informações que não conseguiu observar (Yin, 2009).

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a entrevista qualitativa varia conforme o grau de estruturação, que é influenciado pelo controlo que o investigador tem sobre as respostas dos sujeitos. Podem variar entre não estruturadas, semi-estruturadas e estruturadas (Vale, 2004). Neste estudo foram realizadas três entrevistas a cada um dos alunos caso, de forma individual. Optou-se por conduzir entrevistas semiestruturadas, elaboradas com base nas questões orientadoras do estudo, assim como em aspetos emergentes da resolução das tarefas. Assim, antes da realização de cada entrevista, a investigadora analisava as notas de campo, que incluíam as evidências registadas no guião de observação, as folhas de resolução das tarefas, que incluíam um questionário sobre as mesmas e, sempre que necessário, visualizava as gravações das aulas, de modo a formular um conjunto de questões que permitissem orientar a entrevista e assim melhor compreender os raciocínios dos alunos, as suas perspetivas e os significados das suas resoluções. Foram realizadas três entrevistas com cada um dos alunos caso, no final de cada etapa da sequência didática, que ocorreram ou no intervalo da hora do almoço ou no final do dia. Assim, a primeira entrevista incidiu nas tarefas com contagens visuais, a segunda debruçou-se sobre as tarefas que envolviam sequências e a terceira nos problemas com padrões. Durante a entrevista, que apresentava duração variável, conforme as tarefas analisadas, foi facultada aos alunos a respetiva folha de resolução sem qualquer apontamento. Todas as entrevistas foram gravadas em áudio e posteriormente transcritas e tiveram como finalidade compreender o raciocínio dos alunos.

Questionários

Para Vale (2004) os questionários apresentam a mesmo intenção das entrevistas, sendo totalmente estruturados, com questões abertas ou fechadas, proporcionando respostas diretas sobre determinadas informações, quer factuais quer de atitudes. Neste estudo, aplicou-se um questionário inicial (Anexo 3) a toda a turma para melhor compreender a sua relação com a Matemática e com a disciplina de Matemática. Em cada uma das tarefas, após a sua resolução, foi apresentado um pequeno questionário (anexo 5 a anexo 14) onde se procurava recolher mais informações sobre as dificuldades dos alunos e a forma como tinham efetuado a resolução. Como a proposta didática estava organizada em três fases, no final de cada fase foi aplicado um questionário sobre as tarefas realizadas com o propósito de perceber as tarefas que os alunos gostaram mais/menos e consideraram mais/menos difíceis. Assim, foram utilizados mais três questionários: questionário sobre contagens visuais (Anexo 15); questionário sobre as sequências (Anexo 16); e questionário sobre problemas de padrão (Anexo 17). Após a sua aplicação, estes questionários foram analisados e interpretados de forma a melhor compreender a perspetiva dos participantes sobre as tarefas implementadas.

Registos em áudio e vídeo

Patton (2002) considera as gravações uma fonte essencial na recolha de dados. Neste estudo, tal como foi referido anteriormente, foram efetuados registos áudio das entrevistas e das sessões de resolução das tarefas, sendo que estas também foram videogravadas. O objetivo destas gravações foi captar aspetos que tivessem passado despercebidos à investigadora, pelo facto de estar também a desempenhar o papel de professora da turma, permitindo completar as notas de campo decorrentes da observação.

Contudo, Lincoln e Guba (2000) entendem que os registos áudio e vídeo devem ser usados de forma pontual pois poderão condicionar os participantes. Assim, consciente das implicações que estes aparelhos poderiam ter na ação dos alunos, a investigadora teve alguns cuidados para que fossem por eles encarados como naturais. Assim, antes de se iniciar o estudo, foi explicado aos alunos da turma que se iria proceder a gravações áudio e vídeo, clarificando o papel daqueles elementos. Para além disso, esperava-se que a relação de proximidade que a investigadora tinha com os alunos facilitasse a aceitação das gravações áudio e vídeo, de forma a serem mais facilmente aceites. As expectativas foram cumpridas já que apenas na primeira aula os alunos se demonstraram preocupados com a presença da câmara e do gravador. Nas sessões seguintes a apreensão dissipou-se, notando-se um ambiente de descontração. O facto de a câmara estar fixa, também facilitou na abstração da presença do material de registo. As sessões também foram gravadas em áudio para assegurar que todos os diálogos e dúvidas colocadas eram gravadas. Todos estes registos, áudio e vídeo, foram visualizados e ouvidos pela investigadora sendo transcritas as partes consideradas mais importantes, de modo a completar os relatórios de observação, enriquecendo as notas de campo. As entrevistas foram gravadas em áudio e posteriormente transcritas e analisadas.

Análise documental

Os documentos são uma fonte de dados relevante em quase todo o tipo de estudos de caso, podendo existir uma diversidade de documentos a ser analisados. A grande finalidade do recurso a documentos é certificar e complementar evidências resultantes de outras fontes (Yin, 2009). Para Stake (2009) os dados obtidos através do estudo de documentos devem ser usados da mesma forma que aqueles que são obtidos a partir de observações e entrevistas, servindo mesmo como substitutos de registos de atividade que o investigador não poderia observar diretamente. Pode dizer-se que englobam todos os materiais que permitam recordar e preservar o contexto, como registos, transcrições, relatórios, notas, jornais, entre outros (Vale, 2004). Todos os registos efetuados ao longo da investigação, Bogdan e Biklen (1994) denominam de notas de campo, dizendo que são “o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150). Nesta investigação foram analisados diversos tipos de documentos como documentos produzidos pelos alunos, documentos relacionados com o percurso escolar e notas da investigadora.

Foram analisados os registos produzidos pelos alunos, nomeadamente as resoluções das tarefas propostas, com o objetivo de compreender o seu raciocínio, em particular as estratégias utilizadas na resolução das mesmas, bem como as dificuldades evidenciadas. Analisou-se, também, as respostas aos questionários que surgiam após cada tarefa, de forma a perceber como os alunos tinham reagido à mesma e identificar as suas dificuldades. O questionário inicial (Anexo 3), aplicado a toda a turma, incidente sobre a sua relação com a Matemática e com a disciplina de Matemática, facilitou a caracterização dos alunos neste âmbito. Os documentos relacionados com o percurso escolar analisados foram o Projeto Curricular de Turma, os registos de avaliação dos alunos, os registos biográficos que ajudaram na caracterização da turma e de cada aluno, assim como na escolha dos alunos caso. As notas de campo da investigadora foram realizadas com base em todos os registos efetuados pela mesma ao longo do estudo, onde se procurou descrever fielmente situações ocorridas durante as observações das sessões, focando comentários, reações, questões colocadas pelos participantes e o tempo gasto na resolução das tarefas, bem como situações ocorridas durante as entrevistas ou resultantes de conversas informais com os alunos.

A escolha e aplicação das tarefas

As tarefas aplicadas neste estudo basearam-se na proposta didática apresentada por Vale e colaboradores no âmbito do desenvolvimento do pensamento algébrico (Vale, et al., 2011a) desenvolvida no contexto do Projeto Matemática e Padrões no ensino básico: perspetivas e experiências curriculares de alunos e professores. Nesta proposta didática, salienta-se que tarefas de natureza exploratória e investigativa promovem a capacidade de generalizar, recorrendo à exploração de padrões em contextos figurativos e à exploração de diferentes modos de generalização relacionados com o modo de ver esses padrões. Está organizada em: contagens visuais; sequências que envolvem padrões de repetição e de crescimento, tendo como objetivo reconhecer, descobrir, continuar, completar e generalizar padrões; e problemas de padrão, nos quais os alunos terão que descobrir a sequência, já que esta não é apresentada de forma explícita, e explorá-la para chegarem à solução.

Tendo por base esta proposta didática e o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007), nomeadamente o tópico Relações e Regularidades do 2.º ciclo, procedeu-se à seleção de várias tarefas de fontes diversas como documentos curriculares, artigos científicos e livros da especialidade, nomeadamente: *Matemática nos primeiros anos - Tarefas e Desafios para a sala de Aula* (Pimentel, Vale, Fão, Alvarenga, & Freire, 2010); *Examining secondary studenst's algebraic reasoning: flexibility and strategy used* (Townsend, 2005); *Padrões em Matemática: ma proposta didática no âmbito do novo programa do ensino básico* (Vale, et al., 2011a); *Matemática no 1.º e 2.º ciclos: propostas para a sala de aula* (Vale, Fão, Alvarenga, Geraldes, Sousa, & Pimentel, 2008); Uma proposta didática envolvendo padrões – Material de apoio ao PMEB (Vale, Pimentel, Alvarenga, & Fão, 2011b). Posteriormente foram adaptadas ao nível de ensino em questão, tendo-se elaborado uma primeira sequência de tarefas para este estudo. Esta proposta inicial foi analisada por um painel de especialistas, constituído por três investigadores na área da Didática da Matemática e um grupo de professores de Matemática que se encontravam a lecionar o 6.º ano de escolaridade, entre os quais o professor da turma onde o estudo foi aplicado, tendo em consideração os seguintes aspetos: adequação da linguagem à faixa etária dos alunos; adequação aos objetivos do estudo; potencialidade e pertinência na promoção de diferentes formas de contagem, no que refere à diversidade das situações propostas, no desenvolvimento da capacidade de generalizar, dos contextos figurativos apresentados; conformidade com o Programa de Matemática do Ensino Básico. Depois deste feedback procedeu-se à elaboração da proposta didática final que seria aplicada no estudo.

A sequência era composta por dez tarefas, estando as mesmas organizadas em três fases: contagens visuais, sequências e problemas de padrão. O número de tarefas definidas esteve condicionado ao número de aulas que o professor da turma disponibilizou. Como se tratava de um número reduzido de aulas, as tarefas foram aplicadas também no Laboratório de Matemática, oferta educativa da Escola que era frequentada por todos os alunos, funcionando como complemento das aulas da disciplina. Por esse motivo, houve dias em que foram observadas duas sessões. Aquando da implementação das tarefas, apesar do professor da disciplina estar na sala de aula, a exploração foi realizada pela investigadora, sem qualquer intervenção por parte do professor. Todos os alunos da turma participaram ativamente, realizando as tarefas individualmente, apesar de estarem dispostos em pares nas mesas de trabalho. No final de cada tarefa, os alunos respondiam a um questionário, apresentado no final da folha, que incidia sobre a resolução e as dificuldades que sentiram. Antes de iniciar a implementação das tarefas, foi apresentado um PowerPoint (Anexo 18) em que se explicava aos alunos a importância da justificação dos seus raciocínios em cada questão, salientando que poderiam recorrer a várias formas para o fazer, como cálculos, desenhos, tabelas, entre outras. Assim, a dinâmica utilizada em cada uma das sessões de exploração das tarefas foi: apresentação da tarefa recorrendo a um PowerPoint, onde eram esclarecidas as dúvidas; resolução da tarefa; resposta ao questionário; e discussão da tarefa com a apresentação do trabalho de alguns alunos.

Tendo em conta que o número de sessões observadas seriam sete, definiram-se duas sessões para a exploração de tarefas sobre contagens visuais, três sessões para o trabalho com sequências, envolvendo padrões de repetição e de crescimento, e duas sessões que se debruçaram sobre problemas com padrões. Na primeira sessão foram aplicadas três tarefas relativas às contagens visuais. A tarefa *Qual tem mais estrelas?* (Anexo 5) e a tarefa *Dados* (Anexo 6), mobilizando experiências prévias de contagem, com suporte visual, e que têm como principal objetivo o desenvolvimento da capacidade de contagem rápida e da capacidade de ver instantaneamente. A tarefa *Os Grãos de café* (Anexo 7), tem como finalidade o reconhecimento de padrões, em várias disposições, de modo a facilitar a contagem, motivando também o recurso ao subitizing. As duas primeiras tarefas visaram o desenvolvimento da capacidade de *ver instantaneamente* que poderia ser aplicada nas tarefas seguintes. Na segunda sessão foram aplicadas duas tarefas, *Os berlindes do Carlos* (Anexo 8) e *A coleção de moedas* (Anexo 9). Também procuravam promover a compreensão da relevância dos arranjo visuais na descoberta de expressões numéricas equivalentes, sendo, neste sentido, muito semelhantes à tarefa imediatamente anterior. Na terceira sessão foi aplicada a tarefa *Nenúfares e rãs* (Anexo 10), que implica o estudo de uma sequência que envolve um padrão de repetição, tendo como grande objetivo desenvolver a capacidade de generalizar. Esperava-se que os alunos analisassem o padrão e induzissem processos de generalização próxima ou distante podendo, para isso, recorrer a diferentes tipos de estratégias. Na quarta sessão explorou-se a tarefa Smiles (Anexo 11), que envolve uma sequência com um padrão de crescimento linear, procurando desenvolver a capacidade de generalizar, quer para valores próximos, quer distantes. A multiplicidade de formas como poderiam ser interpretadas as figuras que constituíam a sequência possibilitava o recurso a diferentes estratégias. Na quinta sessão, aplicou-se a tarefa *Os Z's* (Anexo 12) que, na sua estrutura e objetivos, era muito semelhante à tarefa anterior, apresentando uma diferença apenas no tipo de padrão apresentado já que se trata de um padrão de crescimento quadrático. Na sexta e sétima sessões foram aplicadas, respetivamente, as tarefas *Os lugares* (Anexo 13) e *A moldura* (Anexo 14) que se inserem na tipologia dos problemas com padrões e têm como finalidade a exploração de uma sequência que não é evidenciada de forma explícita, contemplando igualmente questões de generalização próxima e distante. Todas as tarefas foram apresentadas em contexto figurativo, pressuposto assumido na proposta didática de Vale colaboradores (2011a), partindo do princípio que a visualização é uma ferramenta que pode facilitar a generalização.

Assim, as dez tarefas implementadas distribuíram-se pelas sete sessões observadas, segundo a planificação apresentada na tabela 4. Esta fase concentrou-se em duas semanas pois, tratando-se de um tópico do Programa, teve que se respeitar a planificação feita para a disciplina.

Tabela 3 - *Planificação das tarefas aplicadas em cada sessão*

Sessões		Tarefas	Tempo	Data
1.ª Sessão	Contagens visuais	Qual tem mais estrelas? Dados Os grãos de café	1 bloco de 90’	7 de maio de 2012
2.ª Sessão	Contagens visuais	Os berlindes do Carlos A coleção de moedas	1 bloco de 90’	9 de maio de 2012
3.ª Sessão	Sequências – padrões de repetição	Nenúfares e rãs	1 bloco de 90’	9 de maio de 2012
4.ª Sessão	Sequências – padrões de crescimento	Smiles	1 bloco de 90’	11 de maio de 2012
5.ª Sessão	Sequências – padrões de crescimento	Os Z’s	1 bloco de 90’	14 de maio de 2012
6.ª Sessão	Problemas com padrões	Os lugares	1 bloco de 90’	16 de maio de 2012
7.ª Sessão	Problemas com padrões	A moldura	1 bloco de 90’	16 de maio de 2012

Fases do Estudo e Procedimentos

O estudo decorreu entre setembro de 2011 e julho de 2013, tendo contado com a participação de alunos do 6.º ano de escolaridade, de uma Escola Básica Integrada situada numa aldeia do distrito de Braga.

A primeira fase do estudo, decorreu entre setembro de 2011 e abril de 2012. Começou-se pela preparação do mesmo, em que se procedeu à elaboração de um projeto de tese, tendo-se, de seguida, procedido a uma recolha bibliográfica. Todo este processo foi importante para delinear os principais objetivos do estudo, assim como para elaborar uma revisão de literatura inicial. Posteriormente, formalizou-se o acesso à escola e à turma. Assim, no início do ano letivo, a investigadora informou a Direção da Escola sobre a investigação que pretendia desenvolver e quais os seus objetivos. Como nesse ano letivo lecionava nessa escola somente a disciplina de Ciências da Natureza, foi ultrapassado esse constrangimento através da colaboração de um colega que lecionava o 6.º ano de escolaridade e que disponibilizou de imediato as suas turmas para que a investigação pudesse decorrer. Assim, ainda durante o primeiro período, procedeu-se à formalização dos pedidos de autorização para a realização do estudo à Direção do Agrupamento de Escolas (Anexo 1), o qual teve um parecer favorável. Foi também solicitada a autorização dos Encarregados de Educação (Anexo 2) tendo-se calendarizado uma reunião, realizada no início do mês de janeiro, que contou com a presença do professor de matemática da turma e da diretora de turma, na qual se explicitou os objetivos do estudo, a forma como o mesmo iria decorrer. Nesta fase, procedeu-se também à caracterização da turma, com base em registos de natureza biográfica e relativos ao percurso escolar dos alunos, e na aplicação de um questionário sobre a Matemática a toda a turma (Anexo 3). Estas informações revelaram-se pertinentes na escolha dos alunos caso. De seguida, passou-se à seleção das tarefas e à elaboração da proposta didática final. Por fim, procedeu-se à seleção dos alunos-caso, usando um conjunto de critérios previamente definidos.

A fase seguinte, estudo em ação, decorreu durante o mês de maio de 2012. Neste período procedeu-se à aplicação das tarefas e gravação das sessões observadas. Como se referiu anteriormente, o número de sessões observadas foi condicionado pelo número de aulas disponibilizadas pelo professor titular, tendo em conta a planificação delineada para a disciplina. Assim, foram cedidas cinco aulas tendo sido observadas sete sessões, recorrendo a duas aulas do Laboratório de Matemática. A aplicação das tarefas decorreu num espaço de duas semanas, de forma a respeitar a planificação da disciplina, sendo que nos dias em que havia Laboratório de Matemática existiam duas sessões observadas. Nesta fase, procedeu-se também à realização de entrevistas aos alunos caso, num total de três por aluno, de acordo com a organização da proposta didática: a primeira após a 2.ª sessão; a segunda após a 5.ª sessão; e a terceira no final da 7.ª sessão. Durante esta fase, a investigadora procedeu à visualização e audição das gravações das sessões, transcrevendo os momentos mais relevantes. Destaca-se ainda que, com o início da recolha de dados, iniciou-se também a análise dos mesmos.

A última fase do estudo correspondeu à conclusão da análise de dados, feita de forma detalhada, revelando-se, por isso, bastante extensa. Realizou-se a descrição dos casos, recorrendo à análise e interpretação das evidências recolhidas, através dos diversos métodos de recolha de dados utilizados: observação, entrevistas, questionários, gravações áudio e vídeo, e análise documental. Gradualmente, foi-se procedendo também à redação do corpo da dissertação, sendo realizada a consulta de bibliografia considerada fundamental para a conclusão de alguns capítulos do documento, nomeadamente para finalizar a revisão de literatura de forma a que esta sustentasse toda a ação e opções metodológicas assumidas.

Por forma a sintetizar as fases do estudo e os procedimentos adotados em cada uma delas, apresenta-se a calendarização do estudo na tabela 5, que diferencia as três fases anteriormente descritas.

Tabela 4 - *Calendarização do estudo*

Data	Fases	Procedimentos
setembro de 2011 a abril de 2012	Preparação do estudo	Definição dos objetivos do estudo; Início da revisão de literatura;
	Acesso à escola e à turma	Pedido de autorização à Direção da Escola; Pedido de autorização aos Encarregados de Educação; Caracterização da turma; Apresentação do estudo aos alunos da turma; Aplicação do questionário à turma sobre a Matemática;
	Escolha das tarefas	Seleção das tarefas que compõem a proposta didática; Submissão da proposta didática a um painel de especialistas e professores de Matemática; Definição das tarefas da proposta didática tendo em conta as características da turma;
	Escolha dos alunos caso	Seleção dos alunos para desenvolver os estudos de caso;
maio de 2012	Estudo em ação	Aplicação das tarefas e gravação das sessões observadas; Realização das entrevistas aos alunos; Visualização das gravações; Início da análise dos dados;
junho de 2012 a julho de 2013	Redação da dissertação	Continuação da análise dos dados; Redação do corpo da dissertação. Revisão final de literatura;

Análise dos dados

A análise de dados constituiu um processo de busca e organização sistemático dos dados recolhidos através de diversas técnicas, como: observação, entrevista, questionário, gravações áudio e vídeo e análise documental. Numa investigação de natureza qualitativa é necessário recorrer a uma grande variedade de fontes de evidência, o que dá lugar a um grande volume de informação, rica em detalhes descritivos (Patton, 2002). Isto implica a estruturação e sistematização dos dados, aos quais é necessário dar sentido para tornar compreensível o fenómeno em estudo, de forma a ser possível apresentá-lo a outros (Bogdan & Biklen, 1994; Vale, 2004). Stake (2009) refere que numa investigação qualitativa privilegia-se a análise indutiva, que se traduz na procura de padrões ou categorias que surgem das observações das entrevistas ou da análise documental, facilitando a atribuição de significado aos acontecimentos.

Para Huberman e Miles (1994) a análise de dados é um processo cíclico e interativo, apresentando três fases que se encontram interligadas: (1) redução dos dados, em que o universo potencial dos dados é reduzido, selecionando e transformando os dados por forma a tirar conclusões; (2) apresentação dos dados, recorrendo a tabelas, imagens, gráficos, para apresentar a informação de forma simples e compreensível; e (3) conclusões e verificação, em que o investigador se envolve na interpretação, detetando regularidades e construindo significados para os dados apresentados. Nesta investigação, a análise de dados seguiu o modelo proposto por estes autores.

Assim, em primeiro lugar, procedeu-se à redução dos dados que teve início aquando da fase de recolha dos mesmos, através da seleção dos elementos mais relevantes. Os dados recolhidos através das observações, das entrevistas, dos questionários, dos documentos e das gravações áudio e vídeo foram organizados e sujeitos a uma leitura atenta e cuidada, sendo-lhes atribuído significado com o objetivo de encontrar respostas às questões que orientaram a investigação. Enquanto eram recolhidos os dados procedeu-se também à análise dos mesmos, na medida em que foram ouvidas e observadas as gravações áudio e vídeo como forma de completar os relatórios de observação, permitindo elaborar registos pertinentes que completaram também as notas de campo. A análise destas notas bem como das folhas de registo das tarefas, que incluíam questionários sobre as mesmas, contribuíram para a estruturação das entrevistas a realizar aos alunos caso. Nesta investigação, a análise e a recolha dos dados estiveram intimamente relacionadas, já que, à medida que os dados foram recolhidos foi decorrendo também o processo de análise, contudo, este teve mais expressão após a conclusão da fase de recolha dos dados. Optou-se por organizar a análise de dados por tarefa, procurando evidências de modo a construir significados, através do trabalho dos alunos selecionados como caso, mas também do trabalho realizado pela turma. Antes da análise de cada tarefa, realizou-se a transcrição das entrevistas, visualizou-se as gravações das sessões observadas e ouviu-se as gravações áudio, sendo transcritas as partes consideradas pertinentes. Foram consultadas as notas de campo, que incluíam as evidências registadas no guião de observação e as folhas de resolução das tarefas, que apresentavam a respetiva resolução das tarefas e as respostas ao questionário. O desenrolar de todo este processo levou à recolha de uma grande quantidade de dados, os quais tiveram que ser reduzidos. Como forma de proceder a essa redução, procurou-se reconhecer regularidades e padrões que permitissem a construção de categorias de análise (Bogdan & Biklen, 1994). Assim, os domínios considerados nesta categorização foram: estratégias de contagem, estratégias de generalização, natureza das estratégias, nível de generalização e tipo de generalização, tendo para os mesmos sido estabelecidos indicadores de análise, conforme se apresenta na tabela 5.

Tabela 5 - *Categorias e indicadores de análise*

Categorias de análise			Descrição	Referências
Estratégias de contagem	Contagem um a um		O aluno conta cada elemento.	Adaptado de: Clements, 1999; Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2010
	Subitizing percetual		O aluno reconhece o número de imediato sem usar outro processo matemático.	
	Subitizing conceptual		O aluno reconhece uma disposição padronizada de um número como a composição das partes que formam um todo.	
Estratégias de generalização	Contagem		O aluno desenha a figura e conta os seus elementos.	Adaptado de Barbosa, 2011; Lannin, 2005; Lannin, Barker, & Townsend, 2006; Sasman, Olivier, & Linchevski, 1999; Stacey, 1989
	Recursiva		O aluno continua a sequência, baseando-se nos termos anteriores para construir os seguintes.	
	Tentativa e Erro		O aluno testa valores na regra descoberta anteriormente até verificar as condições pretendidas.	
	Parte unidade	Sem ajuste	O aluno recorre à proporcionalidade direta e utiliza uma parte ou termo da sequência como unidade, multiplicando-a para encontrar valores mais distantes.	
		Com ajuste	O aluno recorre à proporcionalidade direta e utiliza uma parte ou termo da sequência como unidade multiplicando-a para encontrar valores mais distantes fazendo um ajuste do resultado.	
	Múltiplo da diferença	Sem ajuste	O aluno usa múltiplos da diferença entre termos consecutivos sem ajustar o resultado.	
		Com ajuste	O aluno usa múltiplos da diferença entre termos consecutivos fazendo um ajuste do resultado baseando-se no contexto	
	Explícita		O aluno identifica a regra de construção da sequência permitindo-lhe o cálculo imediato de qualquer termo, sendo dado o número de ordem	
Natureza das estratégias	Não visuais		As imagens apresentadas/criadas não são fundamentais para encontrar a solução do problema.	Adaptado de: García-Cruz & Martinón, 1997; Presmeg, 1986
	Visuais		As imagens apresentadas/criadas são fundamentais para encontrar a solução do problema.	
	Mistas		Evidencia o recurso às imagens apresentadas/criadas mas numa perspetiva de facilitação do cálculo.	
Nível de generalização	Próxima		O termo é descoberto rapidamente através de uma abordagem recursiva ou recorrendo a desenhos.	Adaptado de: Stacey, 1989
	Distante		Não é possível a utilização de desenhos ou de uma abordagem recursiva, sendo necessário identificar a lei de formação.	
Tipo de generalização	Construtiva		A regra surge da identificação de partes não sobrepostas que formam a figura inicial.	Adaptado de: Rivera & Becker, 2008
	Desconstrutiva		A regra surge da identificação de partes que se sobrepõem, sendo necessário subtrair esses elementos.	

Todo o processo desenvolvido refletiu uma análise de natureza indutiva, já que as categorias emergiram a partir dos dados recolhidos bem como da revisão de literatura efetuada, tendo sido refinados à medida que a análise decorria. A organização e condensação dos dados levou à elaboração de uma análise de cada tarefa implementada, de forma detalhada para cada um dos alunos constituídos como caso, sendo também realizada uma análise, mas de forma mais geral, para a turma.

A apresentação dos dados procurou, de uma forma simples, apresentar evidências das situações ocorridas recorrendo aos registos dos alunos, exibindo excertos das folhas de registo das tarefas, apresentando transcrições e sintetizando a informação através de tabelas. Apresentou-se a informação de forma organizada de modo a facilitar a sua interpretação.

Finalmente procedeu-se à fase de elaboração e verificação das conclusões. À medida que se foram analisando os dados, começou-se a produzir significados, sendo identificadas regularidades e padrões, surgindo conclusões vagas e imperfeitas que, com o decorrer do processo, se foram tornando explícitas e fundamentadas. Contudo, as conclusões só foram redigidas após a recolha dos dados e depois de concluída toda a análise dos mesmos. A fundamentação das conclusões teve como base a revisão de literatura elaborada, a qual, na fase final, foi revista de forma a suportar a parte empírica deste estudo. Todo o processo de análise dados permitiu a elaboração das conclusões que levaram à compreensão do fenómeno e permitiu dar respostas às questões do estudo.

Numa investigação, devem ser definidos critérios de qualidade que permitam atestar a validade do mesmo (Vale, 2004). A validade de um estudo está associada a uma combinação de qualidades às quais Lincoln e Guba (1985, referidos por Vale, 2004) chamam de veracidade. Estes autores propõem quatro critérios a ter conta para garantir a qualidade de um estudo: confirmabilidade, fidefignidade, credibilidade e transferibilidade.

Para Lincoln e Guba (1985 referidos por Vale, 2004), a confirmabilidade pretende garantir que as conclusões emergiram daquela investigação e não das ideias preconcebidas do investigador. Para atestar a confirmabilidade procedeu-se a uma análise pormenorizada e rigorosa de cada tarefa implementada para cada um dos alunos caso, atendendo ao contexto turma em que estavam inseridos, apresentando-se nessa análise evidências das situações ocorridas.

A fidedignidade tem como objetivo assegurar que o estudo apresentaria os mesmos resultados se fosse repetido por outro investigador (Vale, 2004). Erlandson, Harris, Skipper e Allen (1993, referidos por Vale, 2004) afirmam que, mais importante do que saber se outros investigadores obteriam os mesmos resultados, é perceber se estão de acordo com eles e se estes fazem sentido. Assim, de forma a garantir a fidedignidade do estudo explicitaram-se de forma clara o papel da investigadora e todos os procedimentos efetuados, fazendo uma descrição do contexto do estudo e recorrendo a múltiplas fontes de dados.

Para Vale (2004), a credibilidade é uma questão crucial já que procura assegurar se os resultados do estudo fazem sentido quer para os participantes quer para outros leitores. Como forma de assegurar a credibilidade, tendo em conta Vale (2004), recorreu-se a um conjunto de procedimentos: observação persistente, de forma a compreender e a interpretar os acontecimentos em contexto envolvido por um processo de análise constante; materiais adequados revistos por um painel de especialistas; reflexão com a orientadora e o professor titular da turma sobre o decorrer do estudo; envolvimento dos participantes na confirmação dos dados, sendo os resultados discutidos com o professor de Matemática da turma; triangulação dos dados, na medida em que se recorreu a fontes diversificadas na recolha dos mesmos.

A transferibilidade refere-se à transferência das conclusões a outras situações (Lincoln e Guba, 1985, referidos por Vale, 2004). Contudo, numa perspetiva qualitativa, não se pretendeu com este estudo uma generalização dos resultados já que, atendendo a Ponte (1994), na realização de um estudo de caso procura-se compreender a especificidade de um fenómeno, ou seja, proporcionar um maior conhecimento sobre um caso específico e não conhecer as propriedades gerais de uma população. Assim, neste estudo, a transferibilidade está relacionada com a forma como determinados elementos dos resultados poderão ser aplicados a outras situações (Gravemeijer, 1994b referido por Vale, 2004). Para isso, realizou-se uma descrição pormenorizada do contexto do estudo, dos participantes, da forma como o mesmo foi desenvolvido, para permitir uma melhor compreensão dos resultados.

CAPÍTULO IV – A TURMA

Neste capítulo apresentam-se aspetos relacionados com a turma que participou no estudo. Procede-se a uma caracterização geral da mesma, evidenciando também a sua relação com a Matemática. De seguida, descrevem-se alguns episódios relevantes decorrentes da realização das tarefas.

Caracterização geral

O estudo decorreu numa turma do 6.º ano de escolaridade, numa escola básica integrada de uma freguesia do distrito de Braga, onde as principais atividades económicas são a agricultura, a indústria e o comércio.

A turma era constituída por 17 alunos, seis do sexo feminino e onze do sexo masculino. No ano letivo anterior, todos tinham pertencido à mesma turma sendo a primeira vez que estavam a frequentar o 6.º ano de escolaridade. Apenas um aluno apresentava uma retenção no 1.º ciclo. A maioria provinha da freguesia onde se situava a escola. Somente dois dos alunos não tinham irmãos, sendo os agregados familiares pequenos, com o máximo de três filhos. Os alunos pertenciam a uma turma que frequentava o ensino artístico, em regime articulado, na área do Ensino da Música.

As habilitações académicas da maioria dos encarregados de educação correspondia ao 2.º ciclo do ensino básico. As profissões dos pais estavam maioritariamente relacionadas com Serviços, pertencendo a um estrato social médio. Uma grande percentagem das mães assumia o papel de Encarregada de Educação, provavelmente pelo facto de se poderem deslocar à escola com maior facilidade, comparativamente com os pais. No entanto, quando eram convocadas reuniões em horários extralaborais era frequente comparecer o casal.

Oito dos alunos da turma pensavam prosseguir os seus estudos e tirar um curso superior, cinco pretendiam obter um diploma do ensino secundário e dois ambicionavam tirar um Curso Profissional. Na escola, os locais de estudo da maior parte dos alunos era a Biblioteca e as salas de aula. Muitos utilizavam o computador na Escola e em casa, sendo que, a grande maioria, tinha acesso à internet em casa. Todos os alunos da turma frequentavam por iniciativa própria, e/ou em alguns casos por indicação dos professores, a biblioteca da escola.

Relação com a matemática

Nesta turma são vários os alunos que afirmam gostar da disciplina de Matemática, sendo que doze a referem como sendo uma das suas disciplinas favoritas, contudo, vários apresentavam dificuldades. Justificam o seu gosto pelo facto de ser uma disciplina "divertida, onde a criatividade é infinita", que "se pode aprender de forma divertida", aprendendo "a linguagem matemática e a fazer contas". Justificam, também, gostar de Matemática porque gostam de "pensar e resolver problemas" e "fazer contas", mas admitem ser uma disciplina difícil. Reconhecem a importância da Matemática no seu futuro, associando isso quer ao gosto pela disciplina, quer ao próprio conceito de Matemática, que relacionam com os conteúdos aprendidos, nomeadamente o cálculo e a resolução de problemas, e com o raciocínio. Afirmam ser "um mundo de contas", "onde é para fazer contas e problemas" e ajuda a "ter mais raciocínio". Contudo, verifica-se alguma dificuldade em definir a conceção que têm sobre esta área do saber já que três alunos não responderam à questão "o que é para ti Matemática?". Esta associação do conceito de Matemática aos conteúdos lecionados também é visível quando questionados sobre o que pensam quando ouvem a palavra Matemática. Os alunos responderam que pensam em cálculos, contas, problemas, exercícios, números, os símbolos das operações e até em aprender coisas novas. O que mais gostam de fazer em Matemática são cálculos, exercícios de aplicação, problemas, aprender "coisas novas", de "pensar, porque desenvolve o pensamento". Em contrapartida, referiram que não gostam de não compreender a matéria, alguns de "só dar matéria e não fazer exercícios", outros afirmam não gostar de exercícios muito fáceis porque exigem pouco, enquanto outros afirmam gostar de tudo.

Nas respostas anteriores os alunos expressaram sentimentos positivos face à Matemática. Contudo, quando questionados sobre como se sentem perante uma tarefa, foram identificados dois grupos na turma, um que se mostrava muito à vontade e outro que revelava algum incómodo. A maioria afirma sentir-se bem perante uma tarefa porque aprendiam coisas novas, porque, quer seja fácil ou difícil, têm que conseguir fazer, já que gostam de pensar e gostam de as resolver. Em contrapartida, seis alunos revelam algum receio perante tarefas matemáticas, afirmando ficar nervosos e stressados porque não sabem o que é e temem errar, dois disseram mesmo ter medo do grau de dificuldade. É de salientar que estes alunos que revelaram desconforto perante uma tarefa matemática são alunos que evidenciam dificuldades na disciplina.

Assim, embora se identifiquem estes receios perante a resolução de tarefas matemáticas, de uma forma geral, a turma apresenta uma boa relação com a Matemática, revelando gosto e entusiasmo pela disciplina.

Exploração das tarefas

Nesta secção apresenta-se o trabalho desenvolvido pelos alunos da turma ao longo da implementação das tarefas, sendo feita uma análise da exploração das tarefas com incidências nas estratégias utilizadas e nas dificuldades reveladas.

Tarefa 1: Qual tem mais estrelas?

A tarefa *Qual tem mais estrelas?* (Anexo 5) insere-se nas experiências prévias de contagem, com suporte visual, e tem como principal objetivo o desenvolvimento da capacidade de contagem rápida e da capacidade de ver instantaneamente. A disposição espacial das estrelas apresentadas nos cartões, promove o reconhecimento de padrões que poderão conduzir a diferentes modos de ver e consequentemente a diferentes formas de contagem.

Os alunos realizaram a tarefa individualmente, trabalhando de forma autónoma, num clima de sossego e concentração. Verificou-se que estavam motivados, empenhando-se na resolução da tarefa. Durante o seu desenvolvimento, que durou cerca de vinte minutos, a investigadora foi circulando pela sala apercebendo-se que os alunos realizavam a tarefa sem dificuldades aparentes. Depois de realizada a tarefa, passou-se à discussão em grande grupo, tendo para isso sido utilizado o quadro interativo. Vários alunos apresentaram a sua resolução e explicaram o seu raciocínio, tendo a turma compreendido as diferentes propostas.

Na resolução desta tarefa, apenas um aluno usou a contagem um a um para descobrir o número de estrelas de cada cartão, aplicando assim uma estratégia não visual já que não recorreu a imagens mentais. Todos os outros alunos utilizaram subitizing conceptual para encontrar o número de estrelas, tendo reconhecido padrões na disposição dos elementos, identificando que o todo resulta da composição de várias partes. Nestes casos recorreram a uma estratégia de natureza visual já que as imagens foram fundamentais para a resolução da tarefa. Contudo, viram as figuras de formas diferentes. Os vários arranjos surgiram da conceptualização de cada aluno das relações parte-parte-todo. V.I. observou cada padrão decompondo-o em grupos verticais (figura 5), enquanto que M.R. usou uma estratégia similar mas formando grupos horizontalmente. P.L., como a maioria dos alunos, formou agrupamentos segundo a disposição das estrelas sugeridas nos cartões, tendo assim por base a proximidade dos elementos (figura 5). Destaca-se C.P. que apresentou uma estratégia mista (figura 5) pois, apesar de recorrer ao subitizing conceptual, formou os grupos de modo a encontrar números de referência como o dois e o cinco, na perspetiva de facilitar o cálculo mental (figura 6).

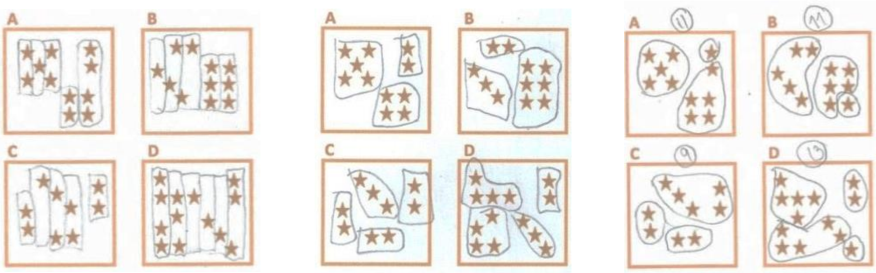


Figura 5. Resolução apresentada, respetivamente, por V.I., P.L. e C.P., na tarefa “Qual tem mais estrelas?”

Fiz grupos de 5 estrelas e de 2 estrelas, porque a tabuada do 2 e do 5 são as mais ou umas das mais fáceis para mim.

Figura 6. Justificação apresentada por C.P. para a escolha da estratégia de resolução.

O cartão que a maioria dos alunos considerou ter conduzido a uma contagem mais rápida foi o C, por ter um menor número de estrelas, o que permitiu uma aplicação mais fácil do subitizing. Quase todos os alunos referiram o cartão D como sendo aquele em que demoraram mais tempo a efetuar a contagem, apresentando como justificação a distribuição e a quantidade de estrelas.

Relativamente às dificuldades apresentadas nesta tarefa verificou-se que alguns alunos referiam que tiveram dificuldades em explicar o seu raciocínio enquanto que outros relataram que tiveram dificuldade em efetuar a contagem. Destes, um teve mais dificuldades nos cartões B e D e os restantes tiveram dificuldades em contar o número de estrelas do cartão D.

Tarefa 2: Dados

A tarefa Dados (Anexo 6) cumpre objetivos similares à anterior. A disposição dos dados e das respetivas pintas poderão conduzir a diferentes modos de ver e consequentemente a diferentes expressões numéricas que traduzam o processo de contagem.

Após o esclarecimento de todas as dúvidas os alunos resolveram a tarefa, individualmente, num ambiente sossegado e de forma empenhada. No final, procedeu-se à exploração/discussão da tarefa em grande grupo, com auxílio do quadro interativo, tendo-se verificado que os alunos encontraram várias expressões numéricas diferentes e que compreenderam as diferentes formas de “ver” que levaram à sua formulação.

Todos os alunos reconheceram automaticamente o número de pintas de cada dado sem ter que as contar, recorrendo ao subitizing percetual. Cada dado tinha um número de pintas igual ou a inferior a seis, apresentando assim quantidades e distribuições espaciais que permitiam a mobilização do subitizing, sendo assim cada dado entendido como um todo. Contudo, visualizaram o conjunto dos dados de diferentes formas o que levou à construção de diferentes expressões numéricas.

M.D., como quase todos os alunos da turma, reconheceu dobros no conjunto dos dados, emparelhando dados com o mesmo número de pintas (figura 7). No entanto, tendo em conta a expressão numérica apresentada, verifica-se que M.D. viu a figura na horizontal (figura 7), já C.T. viu a figura numa disposição vertical (figura 7), enquanto que A.A. viu a figura também por subconjuntos mas agrupando as partes iguais (figura 7). Como exemplos de alunos que não recorreram aos dobros temos G.C. que visualizou cada dado individualmente juntando-os numa disposição horizontal (figura 8).

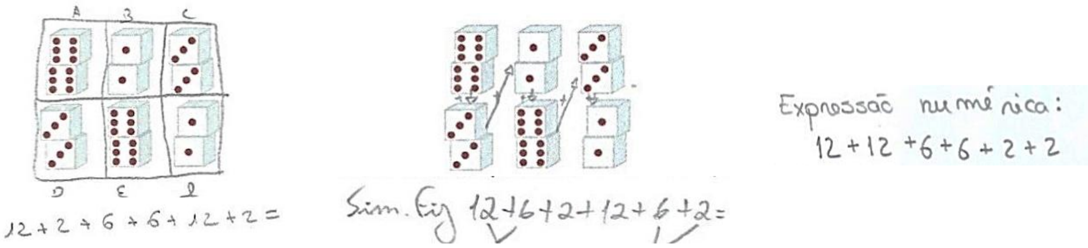


Figura 7. Resolução apresentada, respetivamente, por M.D., C.T e A.A. na tarefa “Dados”

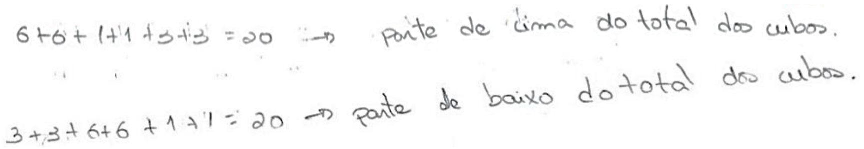


Figura 8. Resolução apresentada por G.C. na tarefa “Dados”

P.L. optou por agrupar todos os dados com a mesma quantidade, recorrendo à multiplicação para elaborar a expressão numérica (figura 9).

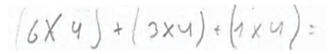


Figura 9. Resolução apresentada por P.L. na tarefa “Dados”

A expressão numérica de P.L. (figura 9) permite verificar que não existe uma correta interpretação da imagem. Revela a existência de seis grupos de 4, três grupos de 4 e um grupo de 4 quando, na figura, são identificados quatro grupos de 6, quatro grupos de 3 e quatro grupos de 1. Esta situação poderá dever-se ao facto de os alunos estarem habituados a trabalhar em contexto numérico em que, segundo a propriedade comutativa, a ordem dos fatores não altera o valor do produto. Revela que estão habituados a manipular os números de forma descontextualizada, o que é o caso nesta situação.

Na base destes raciocínios, apesar da forma de ver ser diferente, temos o subitizing conceptual pois identificam que o todo resulta da composição das partes, partes essas que foram reconhecidas com o subitizing percetual. A maioria dos alunos referiram que não tiveram dificuldades na resolução da tarefa. Os restantes apontaram como dificuldade a interpretação do enunciado e apenas um aluno referiu que teve dificuldades na contagem. Apesar de alguns alunos revelarem alguma tendência para o trabalho em contexto numérico descontextualizado da representação apresentada na tarefa, a maioria recorreu a estratégias de contagem visuais, já que a distribuição das pintas influenciou a contagem.

Tarefa 3: Os grãos de café

A tarefa *Os grãos de café* (Anexo 7) insere-se no âmbito das contagens visuais tendo como finalidade o reconhecimento de padrões, em várias disposições, de modo a facilitar a contagem. As tarefas anteriores contribuíram para o desenvolvimento da capacidade de *ver instantaneamente* que poderá ser mobilizada na resolução desta proposta.

A implementação e desenvolvimento da tarefa não decorreu num ambiente tão sossegado como seria de esperar, pois os alunos começaram a evidenciar inquietude com a proximidade do final da aula. Mesmo assim, demonstraram empenho e interesse na sua resolução. Sendo esta a terceira tarefa proposta na aula, não foi possível realizar a sua discussão no mesmo dia devido à falta de tempo, tendo esta fase ficado adiada para a aula seguinte. Ao longo da resolução da tarefa verificou-se que, tal como nas sessões anteriores, os alunos tinham dificuldades em explicar o seu raciocínio, solicitando muitas vezes a presença da investigadora na tentativa de validarem as suas justificações

Na resolução da tarefa, A.O. efetuou a contagem um a um para descobrir o número de grãos de café, utilizando assim uma estratégia de natureza não visual, já que não recorreu à imagem para formular o seu raciocínio. Salienta-se que este aluno já tinha recorrido a esta estratégia na primeira tarefa. Todos os outros alunos recorreram ao subitizing conceptual para encontrar o número de grãos de café, reconhecendo padrões na sua disposição e identificando o todo como resultado da composição de várias partes. Nesta primeira abordagem à figura (questão 1) verificou-se que quase todos a viram numa disposição linear. De entre estes, houve igual número de alunos a visualizar a figura numa disposição linear na horizontal (figura 10), na vertical (figura 10) e na diagonal (figura 10). Apenas C.T. manteve a coluna central, formando grupos de 3 com os restantes grãos de café (figura 10). A estratégia usada por C.T. evidencia a ideia de simetria.

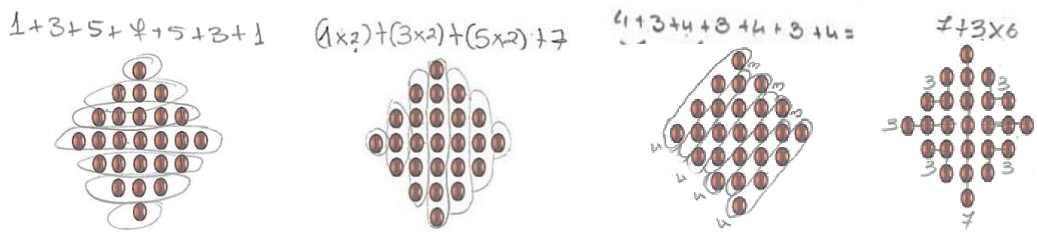


Figura 10. Resolução apresentada, respetivamente, por R.B., S.B., F.M. e C.T., na tarefa “Os grãos de café”

A visualização da figura numa disposição linear voltou a repetir-se na questão 2. Apesar de os alunos que visualizaram a figura numa disposição linear na horizontal serem em maior número. Salienta-se que, mesmo na disposição linear na horizontal e na vertical, foram evidenciadas diferentes formas de ver. Na disposição linear na horizontal, analisando a expressão numérica, verifica-se que G.C. viu dobros na imagem (figura 11), juntando conjuntos com igual número de elementos, enquanto que R.B. viu a figura linha a linha (figura 11). O mesmo se verificou na disposição linear na vertical, tendo alguns alunos visto na figura dobros e outros registado os valores coluna a coluna. Salienta-se que M.R. apresentou uma estratégia de natureza mista (figura 11). Apesar de recorrer ao subitizing conceptual, formou os grupos de modo a encontrar um número de referência, o cinco, na perspetiva de facilitar o cálculo mental.

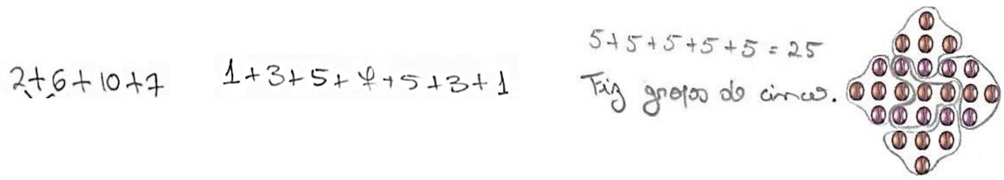


Figura 11. Resolução apresentada, respetivamente, por G.C., R.B. e M.R. na tarefa “Os grãos de café”

Analisando as expressões numéricas que vão surgindo nas diferentes resoluções (por exemplo figura 10), verifica-se que continuam a surgir situações em que estas não correspondem ao contexto figurativo apresentado, revelando a inexistência de paralelismo entre a componente visual e a componente numérica. Apesar de em termos numéricos conduzir ao número total de berlindes, não traduz a visualização da imagem apresentada pelos alunos.

Na resolução da terceira questão, alguns alunos conseguiram concluir que as diferentes expressões resultaram de diferentes processos de contagem. Os restantes apenas referiram que as expressões numéricas representavam o número 25, sem estabelecerem uma relação com a contagem e com as diferentes formas de ver a figura.

Metade dos alunos consideraram que chegaram mais rapidamente ao resultado com a primeira expressão que formularam e a outra metade considera que foi com a segunda expressão. Analisando essas expressões verifica-se que a disposição linear na horizontal foi a forma de ver que consideraram mais rápida na descoberta do número de grãos de café, porque essa forma de ver a figura conduziu a cálculos mais fáceis. Mais de metade dos alunos afirmou não ter sentido dificuldades na realização da tarefa. Os restantes apontaram como dificuldades a compreensão do enunciado da questão dois, na resolução da questão três e apenas um sentiu dificuldades na contagem.

Tarefa 4: Os berlindes do Carlos

A tarefa *Os berlindes do Carlos* (Anexo 8) insere-se nas contagens visuais, tendo como finalidade o reconhecimento de padrões em várias disposições de modo a facilitar a contagem. A disposição espacial dos berlindes potencia diferentes formas de visualização e, consequentemente, a formulação de diferentes expressões numéricas que traduzam o processo de contagem. Procura promover a compreensão da relevância do arranjo visual na descoberta de expressões numéricas mais simples e intuitivas, sendo neste sentido muito semelhante proposta anterior (Os grãos de café).

Após a agitação inicial da entrega/apresentação da tarefa e do esclarecimento de dúvidas, os alunos trabalharam individualmente, de forma autónoma e empenhada, tendo reagido bem à proposta.

Na parte final da resolução da tarefa, notou-se que os alunos começaram a ficar mais agitados pois procuravam saber quantas formas de contar os berlindes tinham os colegas conseguido encontrar. Tal como nas tarefas anteriores, foi realizada a discussão em grande grupo, tendo vários alunos vindo ao quadro apresentar a sua resolução, explicando o seu raciocínio. Após este momento de discussão, a investigadora apresentou uma outra forma de visualizar o conjunto de berlindes através da expressão numérica que lhe estava associada, de forma a antecipar a questão da próxima tarefa. Neste caso, os alunos deviam identificar, através da expressão numérica, a forma como a figura tinha sido visualizada. Assim, a investigadora apresentou a expressão numérica $6 \times 6 - 2 \times 4$, a partir da qual alguns alunos descobriram que correspondia a um quadrado 6×6 berlindes, ao qual seriam retirados os berlindes em falta para completar o quadrado.

Na resolução desta tarefa surgiram várias expressões numéricas que resultaram de diferentes formas de visualizar a figura, tendo os alunos recorrido ao subitizing conceptual para encontrar o número de berlindes. Contudo, viram a disposição dos berlindes de modos diferentes já que o padrão foi reconhecido através da composição de diferentes agrupamentos.

Na questão 1, a maioria dos alunos visualizou na figura arranjos retangulares, identificando diferentes agrupamentos. S.L. e A.A. (figura 12) viram a figura decomposta em disposições retangulares formando grupos de 8 e de 12. A.O. agrupou os berlindes em quadrados de dimensões 2x2 (figura 12). P.L. foi o único a ver a figura, com base numa disposição retangular (dois quadrados de dimensões 4x4) com sobreposição, tendo necessidade de proceder a um ajuste no cálculo, retirando os elementos repetidos (figura 12).

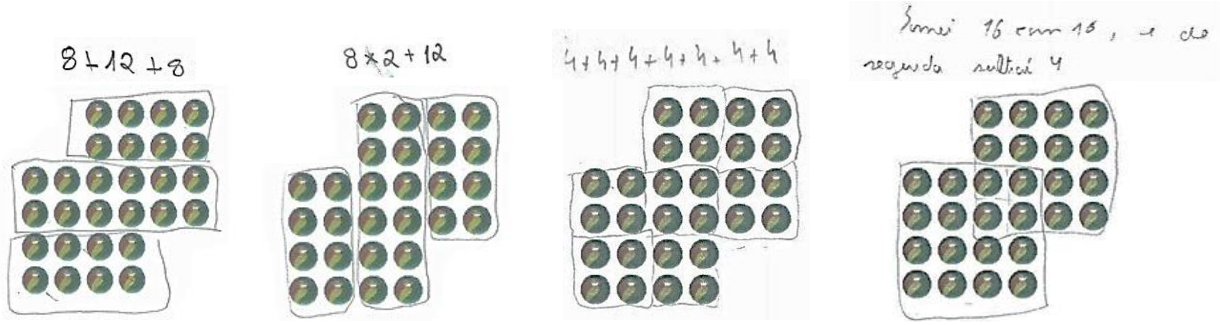


Figura 12. Resolução apresentada, respetivamente, por S.L., A.A., A.O. e P.L. na tarefa "Os berlindes do Carlos"

Outros alunos procuraram formar grupos com o mesmo número de elementos. M.R. decompôs a figura em catorze grupos de 2 elementos (figura 13) e G.C. visualizou os berlindes distribuídos em dois grupos com 14 elementos (figura 13). Por fim, destaca-se C.T. que visualizou na figura arranjos lineares, dispostos verticalmente e arranjos retangulares (quadrado de dimensões 2x2), juntando na expressão numérica estas duas componentes (figura 13).

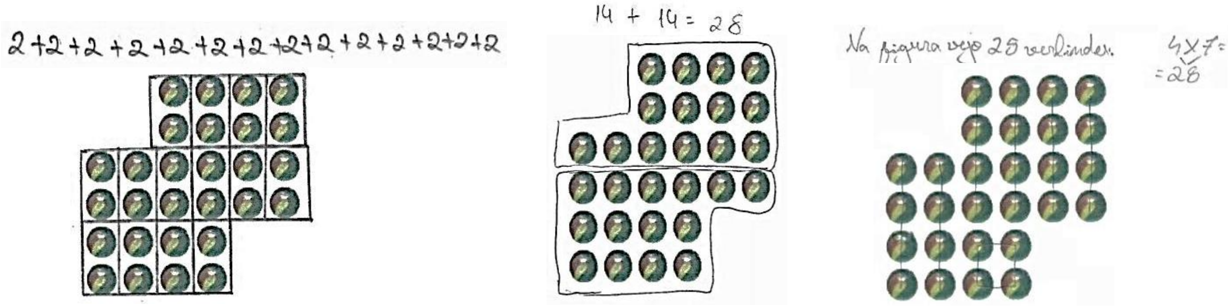


Figura 13. Resolução apresentada, respetivamente, por M.R., G.C., C.T. na tarefa "Os berlindes do Carlos"

Na questão 2 surgiram várias expressões numéricas. Algumas já tinham sido apresentadas, outras surgiram apenas na resolução desta questão, como foi o caso da identificação de disposições lineares na horizontal, na vertical e na diagonal, bem como alguns arranjos retangulares.

Nesta segunda abordagem (figura 14), C.T. apresentou quatro hipóteses que não surgiram na resolução da questão 1: (1) Disposição linear na horizontal (representado a vermelho na figura 14); (2) Disposição linear na diagonal (representado a verde na figura 14); (3) Disposição linear na diagonal (representado a laranja na figura 14); (4) Disposição retangular com grupos de 16, de 8 e de 4 elementos (representado a azul na figura 14).

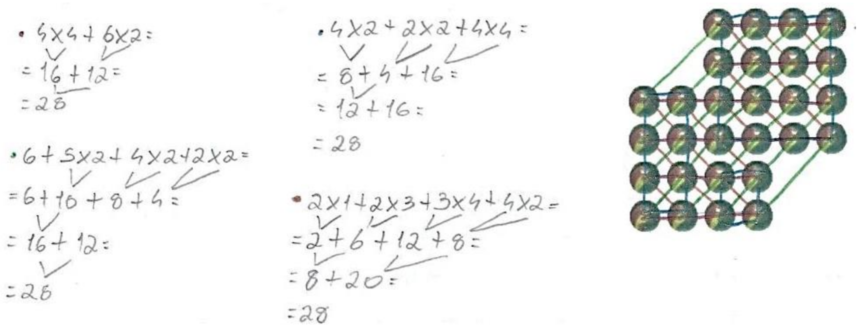


Figura 14. Resolução apresentada por C.T. na tarefa "Os berlindes do Carlos" (questão2)

A.A. também apresentou diversas formas de contagem (figura 15), sendo que foi o único a visualizar a figura conjugando a disposição linear na horizontal e na vertical (destacado a azul na figura 15). Este arranjo é mais complexo.

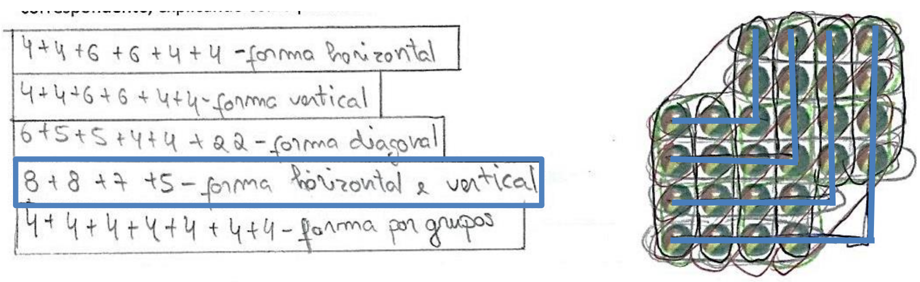


Figura 15. Resolução apresentada por A.A. na tarefa "Os berlindes do Carlos" (questão 2)

Analisando as expressões numéricas propostas nas diferentes resoluções (por exemplo figuras 12, 13 e 14), verifica-se que continuam a surgir situações em que a expressão numérica não corresponde ao contexto figurativo apresentado, situação muito frequente nesta tarefa. Apesar de em termos numéricos conduzirem ao número total de berlindes, não traduzem a visualização da imagem apresentada pelos alunos.

Na resolução da questão 3 alguns alunos continuaram a concluir que as expressões numéricas representavam o número 28 ou que conduziam ao mesmo resultado. Dos restantes alunos, alguns conseguiram concluir que representam várias formas de resolver a tarefa e outros que são expressões equivalentes.

Analisando as expressões apresentadas pelos alunos, verifica-se que a visualização da figura composta por grupos de 4 foi a forma de ver considerada por eles mais rápida na descoberta do número de berlindes. Contudo, alguns alunos associaram essa rapidez ao cálculo, referindo que "tinham cálculos mais fáceis, mais rápidos de resolver". Quando questionados sobre a forma mais fácil de efetuar a contagem, a maioria voltou a referir os agrupamentos, nomeadamente os de 4.

Continua a verificar-se uma vincada preocupação dos alunos com o contexto numérico, já que metade deles identificou essa opção como a mais simples pelo facto de conduzir a cálculos mais fáceis. Quase todos os alunos afirmaram não ter sentido dificuldades na realização da tarefa. Apenas um referiu como dificuldade encontrar outras formas de contagem e outro especificou dificuldades numa forma particular de contar os berlindes, representada na figura 15. Continua a verificar-se que, apesar de revelarem preocupação com o trabalho em contexto numérico, apresentando por vezes expressões descontextualizadas da representação apresentada, na resolução da tarefa os alunos recorreram, praticamente na totalidade, a estratégias de contagem de natureza visual.

Tarefa 5: A coleção de moedas

A tarefa *A coleção de moedas* (Anexo 9) insere-se nas contagens visuais, tendo como finalidade o reconhecimento de padrões em várias disposições de modo a facilitar a contagem. O arranjo das moedas potencia diferentes formas de ver, podendo conduzir à formulação de expressões numéricas diversificadas mas equivalentes. Procura-se, também, promover a compreensão da relevância do arranjo visual na descoberta de expressões numéricas mais simples, intuitivas e com significado.

Foram esclarecidas todas as questões, acrescentando que as zonas da imagem que estavam em branco correspondiam a espaços sem moedas, estando as restantes preenchidas por moedas. Após este esclarecimento, os alunos não apresentaram dúvidas e, ultrapassada a agitação inicial da entrega da tarefa, trabalharam individualmente, tendo reagido bem à proposta. No final, tal como nas tarefas anteriores, foi realizada a discussão em grande grupo, tendo vários alunos apresentado a sua resolução no quadro, explicando o seu raciocínio aos colegas.

Para encontrarem o número de moedas, os alunos recorreram a estratégias de natureza diferente. Na questão 1, M.R. efetuou contagem um a um, utilizando assim uma estratégia de natureza não visual. Esta estratégia também foi utilizada por A.A. e por R.B. na resolução da questão 2. Os restantes alunos utilizaram estratégias de contagem visuais, tendo recorrido ao subitizing conceptual para descobrir o número de moedas. Contudo, as diferentes conceptualizações das relações parte-parte-todo de cada aluno permitiram que surgissem diferentes agrupamentos.

Apesar de nesta tarefa não ter sido pedido que apresentassem uma expressão numérica que traduzisse a contagem, verificou-se que todos os alunos recorreram a expressões numéricas, com exceção das questões em que utilizaram a contagem um a um. Esta escolha poderá ter sido condicionada pela estrutura das tarefas anteriores.

Na resolução das questões 1 e 2 predominaram as estratégias baseadas na ideia de construção da figura como o resultado da reunião de todas as moedas (figuras 16 e 17). S.L. reconheceu a imagem como a junção de seis cartões, identificando o número de moedas em cada um. F.M. visualizou também a figura composta por seis cartões, mas encontrou neles números de referência como o 10 e o 5 (figura 16). V.I. visualizou também seis cartões mas deslocou moedas para completar os espaços vazios e perfazer conjuntos de 20 elementos (figura 17); R.M. visualizou as moedas numa disposição linear na horizontal, identificando linhas completas.

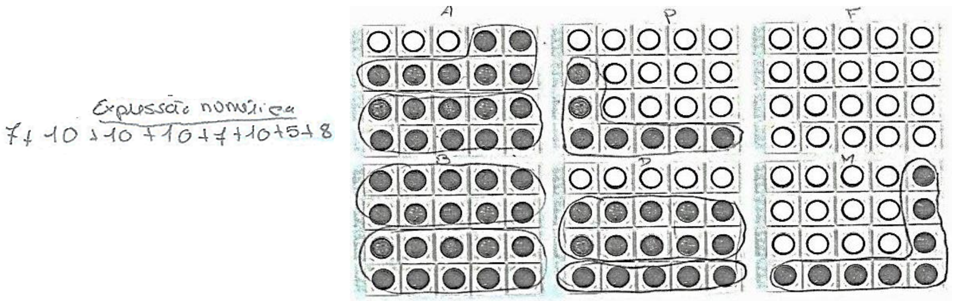


Figura 16. Resolução apresentada por F.M. na tarefa "A coleção de moedas"

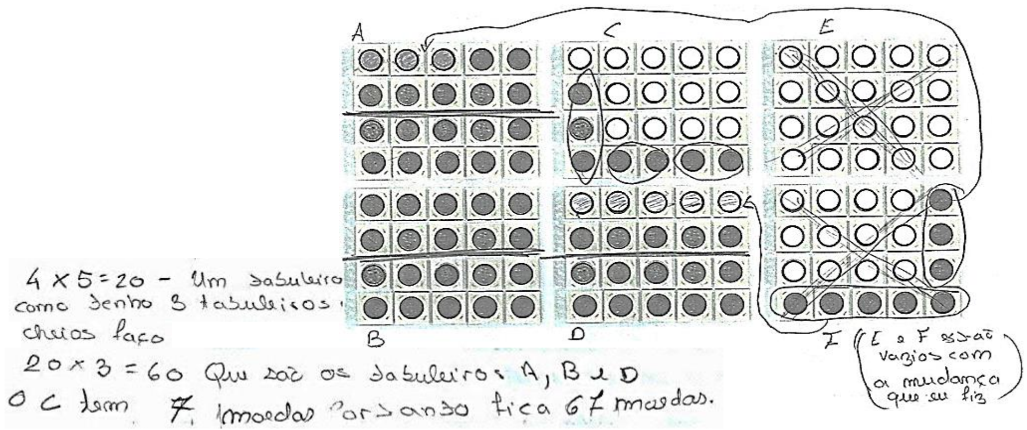


Figura 17. Resolução apresentada por V.I. na tarefa "A coleção de moedas"

Contudo, alguns alunos recorreram a estratégias baseadas na ideia de desconstrução da figura, identificando o todo como junção das partes mas sendo necessário um processo de subtração dos espaços sem moedas. Foi o caso de A.A. que reconheceu seis cartões completos aos quais subtraiu os espaços vazios (figura 18).

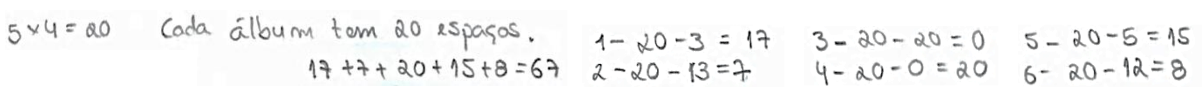


Figura 18. Resolução apresentada por A.A. na tarefa "A coleção de moedas"

Verificou-se que os alunos evidenciaram dificuldades na resolução da questão 3, sendo que a maioria não conseguiu interpretar o significado da expressão numérica apresentada tendo por base a visualização da figura, por não estabelecerem um paralelismo entre a componente visual e a componente numérica. Esta dificuldade foi percetível durante a resolução da tarefa, e, numa tentativa de facilitar a sua resolução, a investigadora alertou para o facto de a expressão representar doze grupos de 5 elementos e não cinco grupos de 12 elementos, tendo também enfatizado a existência de várias formas de visualizar a figura. Mesmo assim, alguns alunos consideraram que a expressão numérica representava cinco grupos de 12 elementos, como é o caso de C.T. (figura 19). A maioria dos alunos apenas tentou fazer uma interpretação da expressão sem associar ao contexto figurativo, sendo que alguns apenas efetuaram o cálculo, verificando que o resultado era 67 moedas. Estes alunos apresentaram dificuldades em manipular os números associados a um contexto figurativo, situação que se revelou como um obstáculo à correta resolução desta questão. Contudo, destacou-se um pequeno grupo de alunos que conseguiu identificar na figura a visualização que correspondia à expressão numérica apresentada, fundamentando o seu significado.

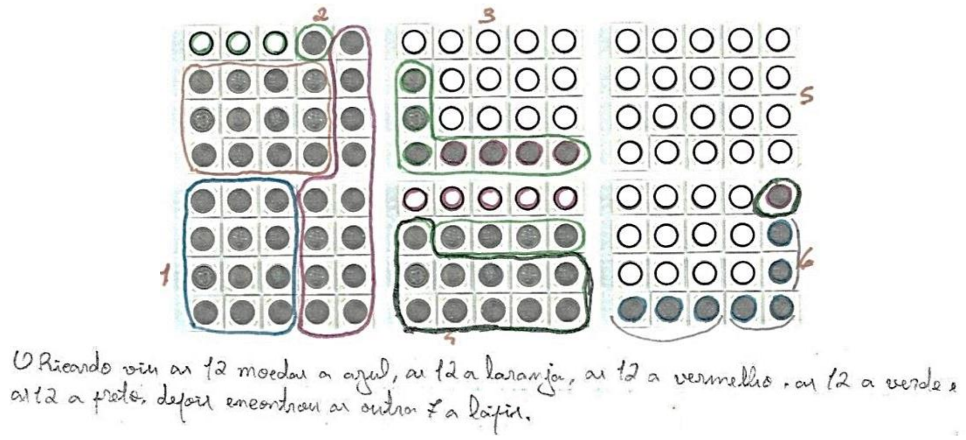


Figura 19. Resolução apresentada por C.T. na questão 3 da tarefa "A coleção de moedas"

Analisando as expressões numéricas que os alunos formularam, verificou-se que a visualização da imagem como a junção de seis cartões foi aquela que a maioria considerou como sendo a mais rápida para efetuar a contagem. Contudo, a visualização da figura em seis cartões, quer identificando as moedas numa disposição linear, quer transferindo moedas para completar os espaços vazios ou identificando números de referência como o 10 ou o 5, também foram referidas como permitindo uma contagem rápida.

Apenas três alunos afirmaram não ter sentido dificuldades na realização da tarefa. Dos restantes, a maioria refere ter sentido dificuldades na resolução da questão 3 porque não conseguiam "descobrir nos álbuns o que significava a expressão numérica" e porque consideravam existir “mais do que uma hipótese para resolver o problema”. Quando questionados sobre o que aprenderam com esta tarefa alguns alunos referiram a existência de diversas formas de resolução mas não estabeleceram uma ligação com diferentes modos de ver, outros fizeram referência às estratégias de contagem utilizadas. Destacaram também ter aprendido que existem expressões numéricas equivalentes. Continuou a verificar-se que, na resolução da tarefa, os alunos recorreram, praticamente na totalidade, a estratégias de contagem visual, apesar de revelarem tendência para o trabalho em contexto numérico descontextualizado da representação apresentada, refletido principalmente na formulação das multiplicações.

Tarefa 6: Nenúfares e rãs

A tarefa *Nenúfares e rãs* (Anexo 10) implica o estudo de uma sequência que envolve um padrão de repetição. Tem como objetivo desenvolver a capacidade de reconhecer, descobrir, continuar, completar e generalizar padrões, contemplando questões de generalização próxima e distante. Os alunos devem reconhecer o motivo que se repete, sendo neste padrão do tipo AAB, identificar que é constituído por três elementos, assim como extrair da estrutura do padrão relações entre as várias figuras (termos) e a ordem que ocupam na sequência.

As questões que suscitaram mais dúvidas aos alunos no momento da leitura foram a 2, 3, 4 e 9. Alguns manifestaram dificuldades em compreender o que se pretendia com o número de grupos repetidos. Foi explicado que esta era uma sequência de repetição, surgindo assim um grupo que se vai repetindo ao longo da mesma. Já era expectável que a questão 9 trouxesse dificuldades já que os alunos não tinham experiência na utilização de variáveis. Foi explicado que se pretendia saber o número de elementos (nenúfares, rãs e total) para um número qualquer de grupos repetidos, sendo esse número qualquer representado por uma letra.

Apesar de terem sido esclarecidas todas as dúvidas que surgiram aquando da leitura inicial da tarefa, ao longo da resolução foram necessários mais esclarecimentos. Nas questões 3 e 6 os alunos não sabiam se deveriam considerar os grupos de repetição completos ou incompletos, cada um resolveu da forma como interpretou a sequência. Na questão 7 confundiram 30 grupos repetidos com 30 elementos na sequência. Já na questão 8 não conseguiam encontrar uma estratégia que lhes permitisse chegar à solução, pelo facto de estar envolvida a reversibilidade do pensamento. Por fim, na questão 9 os alunos tiveram dificuldades em compreender o significado da letra N e consequentemente na formulação de uma expressão algébrica.

Verificou-se que quase todos os alunos reconheceram o motivo que se repetia na sequência: nenúfar, nenúfar, rã. Alguns descreveram esse motivo utilizando palavras enquanto outros o desenharam. Apenas três alunos não o identificaram.

Nas questões 1, 3 e 4, que envolviam a generalização próxima, verificou-se que predominou a estratégia recursiva. Quase todos os alunos optaram por continuar a sequência até encontrar os elementos solicitados. Na questão 1, verificou-se, em vários casos, que não completaram o grupo de repetição, desenhando ou considerando apenas o primeiro elemento que o constituía. Apenas um aluno continuou a sequência completando o grupo de repetição do qual fazia parte o 13.º elemento. Na questão 3, todos os alunos consideraram o grupo de repetição completo, já que referiram existir 7 rãs e 7 grupos completos, com a exceção de um aluno que afirmou existirem 6 rãs, tendo parado nos 14 nenúfares.

Contudo, surgiram outras estratégias nas questões de generalização próxima. Um aluno usou a estratégia *Parte Unidade com ajuste* para descobrir o 13.º elemento da sequência (questão 1). Recorreu ao grupo de repetição como unidade e considerou múltiplos até se aproximar de 13, fazendo depois um ajuste. Na resolução da questão 4, alguns alunos recorreram à estratégia *Parte Unidade sem ajuste*, pois usaram parte da sequência (os seis primeiros termos apresentados) para obter o 30.º elemento, através de um raciocínio proporcional (figura 20). Alguns alunos conseguiram interiorizar a estrutura do padrão, estabelecendo relações entre os vários elementos e a ordem que ocupavam na sequência, usando assim a estratégia explícita para resolver as questões 3 e 4. Destaca-se P.L. como o único aluno a recorrer a esta estratégia na resolução de todas as questões de generalização próxima (figura 21).

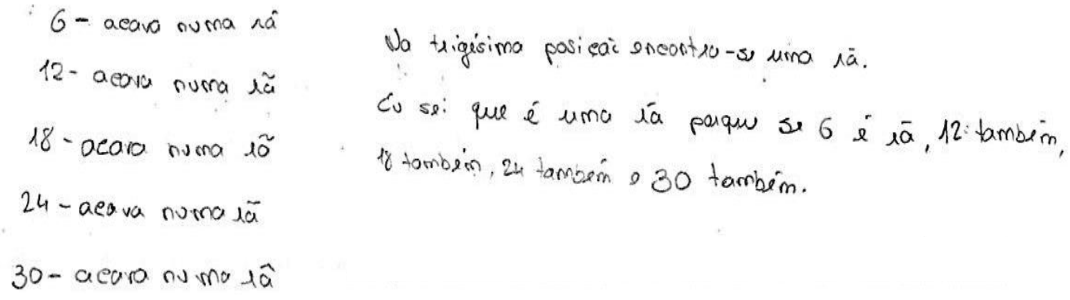


Figura 20. Resolução apresentada por F.M. na questão 4 da tarefa "Nenúfares e rãs"

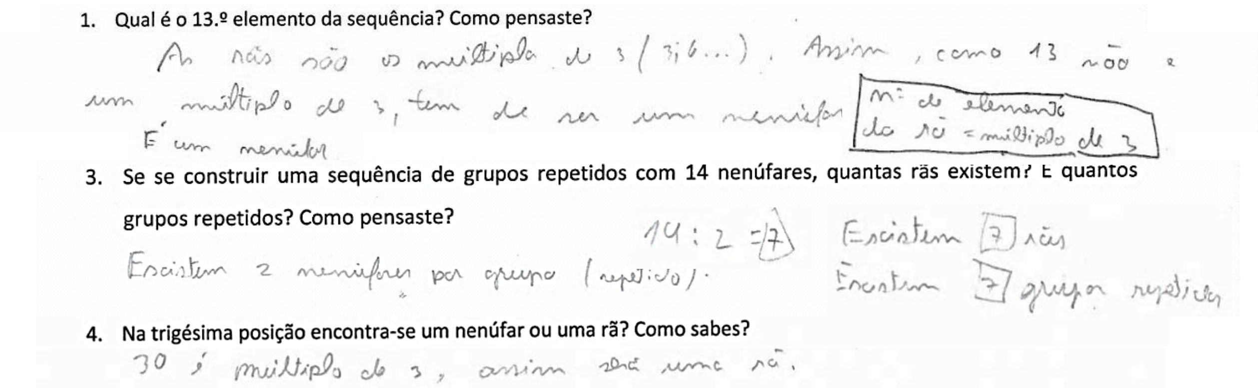


Figura 21. Resolução apresentada por P.L. nas questões 1, 3 e 4 da tarefa "Nenúfares e rãs"

A estratégia recursiva, apesar de não ser a mais expedita, voltou a ser utilizada, apesar de em menor número, em questões que envolviam elementos de ordem mais elevada (questões 5 e 6). Na questão 5, alguns alunos continuaram a sequência até encontrarem 17 rãs, e na questão 6 até obter os 71 nenúfares. Na questão 7, esta situação não foi tão expressiva já que apenas um aluno recorreu a esta estratégia.

A maioria dos alunos aplicou a estratégia explícita para resolver as questões de generalização distante (questões 5, 6, e 7). Alguns explicaram as relações entre os vários elementos da sequência e identificaram uma regra, enquanto outros, apesar de não explicarem a regra descoberta, evidenciaram na resolução ter compreendido a estrutura do padrão, o que lhes permitiu responder corretamente.

Os alunos conseguiram identificar que o número de rãs é igual ao número de grupos repetidos, enquanto que o número de nenúfares é o dobro do número de grupos repetidos. A maioria dos alunos concluiu que o número total de elementos corresponde à soma das rãs e dos nenúfares, enquanto que outros reconheceram o número total de elementos como sendo o triplo do número de grupos repetidos.

Como já se referiu, apesar de na questão 3 quase todos os alunos terem considerado o grupo de repetição completo, na questão 6 a maioria considerou o grupo de repetição incompleto, afirmando existirem 35 rãs e 35 grupos repetidos, o que significa que pararam no 71º nenúfar. Apenas quatro consideraram existir 36 rãs e 36 grupos repetidos, completando a unidade de repetição.

A questão 8 implica, para além da generalização distante, a reversibilidade do pensamento, facto que poderá ter levado vários alunos a resoluções incorretas. Um aluno resolveu todas as questões anteriores através da estratégia recursiva, não conseguindo nesta questão aplicar a mesma estratégia. O restante dos alunos que apresentaram resoluções incorretas, apesar de em questões anteriores terem utilizado a estratégia explícita, não conseguiram aplicar a regra descoberta, evidenciando dificuldades na reversibilidade no pensamento. Alguns alunos dividiram o número total de elementos por dois, possivelmente porque esse era o número de elementos na sequência (nenúfares e rãs), e consideraram que esse era o número de nenúfares, sendo o número de rãs metade desse valor. Contudo, vários alunos foram capazes de resolver a questão 8 aplicando a regra utilizada anteriormente, revelando reversibilidade no pensamento (figura 22).

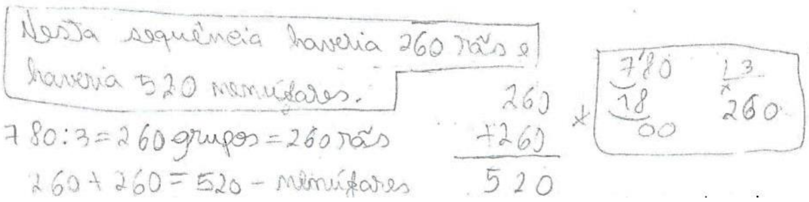


Figura 22. Resolução apresentada por C.P. na questão 8 da tarefa “Nenúfares e rãs”

Na questão 9, as dificuldades foram ainda maiores, como era expectável, sendo que metade da turma não conseguiu resolver a questão de forma correta. A maioria justificou as regras por palavras (figura 23) e apenas dois apresentam uma expressão algébrica que traduzia a generalização (figura 24).

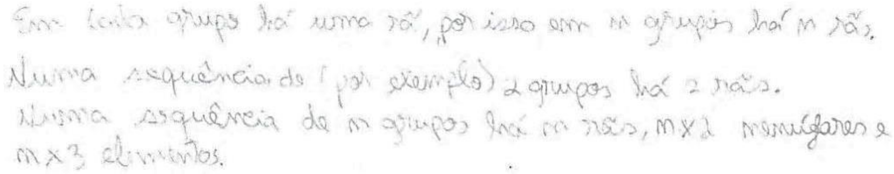


Figura 23. Resolução apresentada por C.P. para a questão 9 da tarefa “Nenúfares e rãs”

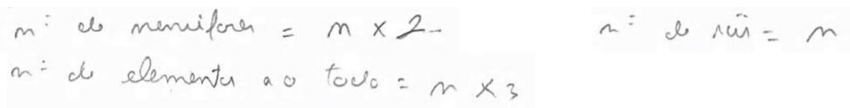


Figura 24. Resolução apresentada por P.L. para a questão 9 da tarefa “Nenúfares e rãs”

Fazendo uma síntese do trabalho desenvolvido, foram utilizadas as seguintes estratégias: Recursiva (R), *Parte Unidade* com ajuste (PUCA) e sem ajuste (PUSA) e Explícita (E), sendo algumas estratégias inseridas na categoria Não categorizado devido à falta de explicitação do raciocínio. Verifica-se que nas questões de generalização próxima dominou a estratégia recursiva, enquanto que nas questões de generalização distante predominou a estratégia explícita.

Tabela 6 - *Estratégias aplicadas pelos alunos da turma na resolução da tarefa “Nenúfares e rãs”*

Questões	Estratégias de generalização					
	R	PUCA	PUSA	E	NC	
1	14	1	-	1	-	Generalização próxima
3	11	-	-	5	-	
4	9	-	3	4	-	
5	5	-	-	8	3	Generalização distante
6	3	-	-	10	3	
7	1			11	4	

Mais de metade dos alunos afirmou ter sentido dificuldades na resolução da questão 9, pois não percebiam o que era pedido. Também referiram dificuldades nas questões 6 e 8, no primeiro caso porque obtinham um valor decimal para o número de rãs, no segundo caso devido à ordem de grandeza do valor apresentado. Quando questionados sobre o que aprenderam com esta tarefa, vários alunos referiram ter aprendido a trabalhar com sequências. Um salientou a importância da análise dos padrões que compõem uma sequência, já que afirmou que "é preciso conseguir visualizar uma imagem para conseguir compreender melhor".

Tarefa 7: Smiles

A tarefa *Smiles* (Anexo 11) implica o estudo de uma sequência que envolve um padrão figurativo de crescimento. Contempla questões de generalização próxima e distante, incluindo a representação simbólica, e permite múltiplas interpretações das figuras que constituem a sequência, possibilitando o recurso a diferentes estratégias.

Os alunos apresentaram várias dúvidas nas diversas questões, quer no momento da leitura, quer durante a resolução. Alguns manifestaram dificuldades na compreensão do enunciado mas o principal impedimento prendeu-se com a resolução e a descoberta de estratégias apropriadas para conseguirem responder a questões em que a ordem fosse elevada. Vários alunos evidenciaram dificuldades em visualizar a estrutura do padrão, o que dificultou as questões de generalização distante. Facilmente identificaram a diferença entre o número de smiles de termos consecutivos, mas nem todos conseguiram descrever as figuras da sequência de forma a descobrir uma expressão numérica que facilitasse a generalização distante (questões 2, 3, 4 e 5). Também apresentaram inúmeras dificuldades na resolução da questão 3, uma vez que implicava a reversibilidade de pensamento, e da questão 5, que envolvia a interpretação do significado de expressões numéricas representativas do número de smiles da figura 250.

Na questão de generalização próxima, questão 1, quase todos os alunos recorreram à contagem para descobrir o termo de ordem 4, desenhando a figura e contando o número de elementos. Dos restantes alunos, três utilizaram a estratégia recursiva, adicionando a diferença do número de smiles entre termos consecutivos ao 3.º termo para encontrarem o 4.º termo. Destacam-se dois alunos que utilizaram a estratégia explícita, aplicando uma regra que relaciona as variáveis dependente e independente e que surgiu da visualização das figuras. Estes alunos descobriram uma expressão numérica, recorrendo a uma generalização construtiva, procedendo à decomposição da estrutura do padrão em partes disjuntas, vendo um smile no centro e três grupos com o mesmo número de smiles à volta (figura 25).

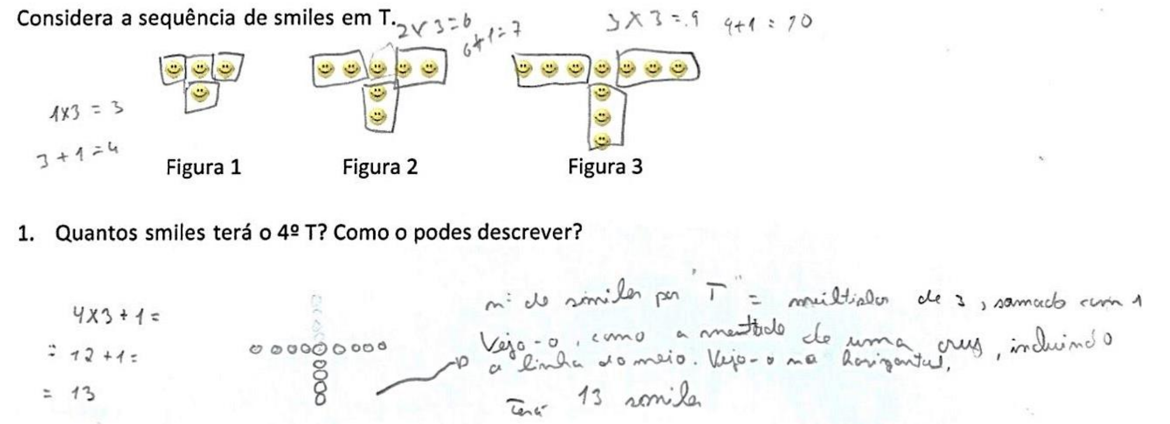


Figura 25. Resolução apresentada por P.L. na questão 1 da tarefa “Smiles”

Apesar de todos os alunos descobrirem o número de smiles do 4.º termo, apenas metade descreveu a forma como o visualizou e destes a maioria centrou-se na diferença do número de smiles entre dois termos consecutivos, revelando ter desvalorizado o contexto figurativo.

Nas questões 2 e 3, que envolviam termos de ordem mais distante, surgiram diversas estratégias, maioritariamente de natureza não visual. Na questão 2 alguns alunos recorreram à estratégia recursiva. Como se tratava do termo de ordem 100, o processo tornou-se exaustivo, levando alguns alunos a parar nas figuras de ordem 40 e 50. Para contornar a morosidade desta estratégia, alguns alunos associaram ao pensamento recursivo a estratégia *Parte Unidade*, aplicando um raciocínio proporcional, conduzindo-os a valores incorretos já que se tratava de um padrão linear. Em alguns casos não efetuaram ajustes, tendo chegado ao 100.º termo a partir da 10.ª ou da 50.ª figuras, que descobriram recursivamente. Outros alunos realizaram um ajuste após terem descoberto o número de smiles do 20º e do 80º termos, a partir do 5º termo da sequência que foi determinado recursivamente, adicionaram estes valores para obter o 100.º termo. Outro aluno, ainda na tentativa de tornar a estratégia recursiva menos extensa, associou também a estratégia Múltiplo da diferença com ajuste. Depois de encontrado o 10º termo, para determinar o 20º adicionou-lhe o número de smiles correspondente ao número de vezes que se regista a diferença, procedendo da mesma forma até obter o 100º termo.

A estratégia explícita também surgiu na resolução desta questão, pois alguns alunos descobriram uma relação entre as duas variáveis, tendo por base a forma como viram as figuras. Alguns explicaram as regras encontradas por palavras e apenas um apresentou a expressão numérica que permitiu o cálculo do 100.º termo.

A questão 3 implicava, para além da generalização distante, a reversibilidade do pensamento, facto que poderá ter levado vários alunos a resoluções incorretas. Destacam-se dois que aplicaram a regra descoberta anteriormente (estratégia explícita). Contudo, alguns alunos também conseguiram resolver a questão de forma correta através da estratégia recursiva, apesar de ser uma estratégia mais exaustiva. Os restantes alunos apresentaram resoluções desadequadas.

Apesar da estratégia explícita ter sido utilizada por mais do que um aluno em questões anteriores, verificou-se que apenas dois foram capazes de a traduzir para uma expressão algébrica escrevendo $n \times 3 + 1$. Dos restantes alunos, um não respondeu à questão, vários afirmaram serem necessários *n* smiles e outros apresentaram expressões baseadas na diferença entre os termos consecutivos.

Verificou-se que os alunos evidenciaram dificuldades na resolução da questão 5, sendo que cinco não apresentaram resposta e, dos restantes, quase ninguém conseguiu interpretar o significado das expressões numéricas apresentadas, tendo por base a visualização das figuras, por não estabelecerem um paralelismo entre a componente visual e a componente numérica. Vários alunos tentaram interpretar as expressões sem associação ao contexto figurativo, sendo que alguns apenas efetuaram o cálculo, verificando que o resultado era o mesmo nos dois casos. Estes alunos apresentaram dificuldades em manipular os números associados a um contexto figurativo, situação que se revelou um obstáculo à correta resolução desta questão. Assim, demonstram bastantes dificuldades na visualização e no trabalho em contexto figurativo. Contudo, destacam-se os dois alunos que foram capazes de apresentar a expressão algébrica já que conseguiram identificar na sequência o significado das expressões numéricas apresentadas, quer na que representava uma generalização construtiva $(1 + 3 \times 250)$ quer na representava uma generalização desconstrutiva ($(250 + 1) \times 3 - 2$).

Como se pode verificar pela tabela 7, na questão de generalização próxima, questão 1, predominou a estratégia Contagem (C), tendo também surgido as estratégias Recursiva (R) e Explícita (E), estratégias adequadas para a natureza da questão. Na questão 2, foi mais evidente o raciocínio recursivo (R), estratégia desadequada em questões desta natureza devido à sua morosidade aparecendo, por isso, em alguns casos associada às estratégias *Parte Unidade* com ajuste (R+PUCA) ou sem ajuste (R+PUSA). Também foram utilizadas as estratégias: Múltiplo da Diferença sem ajuste (MDSA) e Explícita (E). Na questão 3 predominou a estratégia Recursiva (R), tendo também aparecido as estratégias Explícita (E) e Múltiplo da Diferença sem ajuste (MDSA). Nas questões 2 e 3, em alguns casos não foi possível categorizar as estratégias (Não categorizado

– NC) ou porque o raciocínio apresentado não estava claro ou porque os alunos não resolveram a questão. Na estratégia explícita, os alunos apenas recorreram a generalizações de natureza construtiva, procedendo à decomposição da estrutura do padrão em partes disjuntas (figura 25). Apesar do padrão poder dar lugar a diferentes interpretações, os alunos que conseguiram identificar a sua estrutura fizeram-no da mesma forma. Salienta-se que, sempre que os alunos utilizaram uma estratégia de natureza visual, como a contagem e a explícita, obtiveram respostas corretas. Nas questões de generalização distante, grande parte dos alunos baseou o seu raciocínio em estratégias de natureza não visual, como a Recursiva (R), Múltiplo da Diferença com ajuste (MDCA) e sem ajuste (MDSA) e *Parte Unidade* com ajuste (MDCA) e sem ajuste (MDSA) tendo em alguns casos existido uma associação de duas estratégias, revelando bastantes dificuldades já que surgem muitas resoluções erradas, estratégias que não são passíveis de categorizar e questões por resolver. Nestas questões, o sucesso foi muito baixo porque grande parte dos alunos não escolheu uma estratégia adequada, resultado da dificuldade que sentiram em analisar visualmente o padrão apresentado, revelando dificuldades na visualização.

Tabela 7 - *Estratégias aplicadas pelos alunos da turma na resolução da tarefa "Smiles"*

Questões	Estratégias de generalização								
	C	R	R+PUCA	R+PUSA	R+MDCA	MDSA	E	NC	
1	10	4	-	-	-	-	2	-	Generalização próxima
2	-	2	2	3	1	1	4	3	Generalização distante
3	-	4	-	1	1	-	2	8	

Mais de metade dos alunos afirmaram ter sentido dificuldades em várias questões. A questão em que a maioria afirmou ter sentido mais dificuldades foi a 5 pois não conseguiam traduzir o significado das expressões numéricas, o que permitiu verificar as inúmeras dificuldades que a turma apresenta ao nível da visualização. Também referiram dificuldades na questão 2, 3 e 4, nomeadamente na escolha da estratégia a usar. Quando questionados sobre o que aprenderam com esta tarefa, vários alunos referiram ter aprendido a trabalhar com sequências, alguns salientaram a importância da visualização sendo que um acrescentou a relevância de encontrar regularidades na sequência.

Tarefa 8: Os Z's

A tarefa *Os Z's* (Anexo 12) implica o estudo de uma sequência que envolve um padrão figurativo de crescimento. Tem como principais finalidades desenvolver a capacidade de descobrir, continuar e generalizar padrões, contemplando questões de generalização próxima e distante. Inclui também a representação simbólica da regra geral, permitindo múltiplas interpretações das figuras que constituem a sequência e possibilitando o recurso a diferentes estratégias de generalização.

Na questão 1, em que se pedia que os alunos desenhassem as figuras 4 e 5, verificou-se que a maioria o conseguiu fazer de forma correta. Contudo, alguns não foram capazes de o fazer, revelando dificuldades em compreender a variação entre os termos e identificar a estrutura do padrão, situação que poderá ser justificada pelo facto de as figuras variarem em comprimento e em altura.

Todos os alunos contaram de forma correta o número de quadradinhos que compunham a 3.ª figura (questão 2), recorrendo ao subtizing conceptual. Contudo, e devido às diferentes conceções das relações parte-parte-todo, a forma de a visualizarem variou. Alguns observaram um quadrado central (3x3) e dois grupos de 4 (uma linha em cima e outra em baixo), outros visualizaram dois quadrados isolados nas pontas e os restantes quadrados numa disposição linear (quer na vertical quer na horizontal) ou como um retângulo (3x5). Apesar de vários alunos apresentarem uma expressão numérica que traduzia a forma como viram a figura, alguns não o fizeram.

Na questão 3, de generalização próxima, a estratégia mais utilizada para descobrir o termo de ordem 6 foi a contagem. No entanto, alguns destes alunos não obtiveram uma resposta correta pois não desenharam adequadamente as figuras 4, 5 e 6. Outra estratégia utilizada foi a explícita, onde os alunos aplicaram uma regra que relacionava as variáveis dependente e independente e que surgiu da visualização das figuras. Descobriram uma expressão numérica, recorrendo a uma generalização construtiva.

As questões 1 e 2, focadas na componente visual da sequência, tinham como objetivo que os alunos descobrissem expressões numéricas, apoiadas na visualização, de forma a facilitar a generalização distante. Contudo, verificou-se que a maioria dos alunos não se socorreram dessa abordagem, tendo sentido muitas dificuldades na resolução das questões 4, 5 e 6. Contrariamente à tarefa anterior, onde a estratégia recursiva foi dominante nas questões de generalização distante, nesta tarefa os alunos não a utilizaram porque, sendo este um padrão quadrático, a diferença entre termos consecutivos não era constante. Assim, foram muitos os alunos que evidenciaram dificuldades em encontrar uma estratégia que lhes permitisse trabalhar com termos de ordem elevada.

Na resolução da questão 4, de generalização distante, em que se pretendia saber o termo de ordem 40, a maioria dos alunos apresentou uma estratégia que não foi possível categorizar ou não apresentou uma resolução. Os restantes utilizaram a estratégia explícita, descobrindo uma relação entre as duas variáveis, tendo por base a forma como viram as figuras. Tal como na questão 2, a forma de visualizarem a figura variou, o que conduziu a duas expressões numéricas diferentes, ambas baseadas na decomposição da estrutura do padrão em partes disjuntas, recorrendo a uma generalização construtiva.

A questão 5 implicava, para além da generalização distante, a reversibilidade do pensamento, tendo causado inúmeras dificuldades aos alunos. Cinco dos alunos não apresentaram resposta e apenas um foi capaz de aplicar a regra descoberta anteriormente. Outros utilizaram a estratégia tentativa e erro, experimentando vários valores sem conseguirem chegar a uma conclusão ou concluindo não ser possível construir a figura em função dos valores experimentados. Os restantes alunos apresentaram resoluções desadequadas.

Apesar da estratégia explícita ter sido utilizada por mais do que um aluno em questões anteriores, nenhum foi capaz de traduzir a regra numa expressão algébrica. Surgiram alunos que demonstraram desenvolvimento na capacidade de manipulação simbólica mas apresentaram erros na expressão algébrica.

Voltaram a surgir situações em que a expressão não correspondia completamente ao contexto explorado. Alguns alunos, apesar de compreenderem a estrutura do padrão e de serem capazes de formular expressões numéricas, continuam a não atribuir significado diferente à mudança de ordem dos fatores envolvidos na multiplicação.

Como se pode observar na tabela 8, na questão de generalização próxima, questão 3, predominou a estratégia Contagem (C), tendo também surgido a Explícita (E), estratégias adequadas neste contexto. Na questão 4, foram evidentes as dificuldades inerentes ao tipo de padrão, quadrático, tendo surgido apenas a estratégia Explícita (E). Na questão 5 foi utilizada a estratégia Explícita (E) e, pela primeira vez, a estratégia Tentativa e erro (TE). Em alguns casos não foi possível categorizar as estratégias (Não categorizado – NC), porque o raciocínio apresentado não estava claro ou porque os alunos não resolveram a questão. Na estratégia explícita, apenas recorreram a generalizações de natureza construtiva, procedendo à decomposição da estrutura do padrão em partes disjuntas. Contudo, surgiram diferentes interpretações da estrutura do padrão, resultantes das diferentes conceções das relações parte-parte-todo. Na resolução desta tarefa as estratégias utilizadas foram quase na totalidade de natureza visual (contagem e explícita). Apenas utilizaram estratégias de natureza não visual quando recorreram à Tentativa e Erro. Verificou-se que a estratégia recursiva, tão frequente nas tarefas anteriores, não surgiu nesta porque a diferença entre termos consecutivos não era constante. Nas questões de generalização distante o sucesso foi muito baixo, resultado da dificuldade que sentiram em analisar visualmente o padrão apresentado, tendo deixado muitas questões por resolver ou optado por estratégias não categorizáveis. Os alunos revelaram dificuldades em compreender a estrutura do padrão já que este variava quer na horizontal quer na vertical, o que demonstra dificuldades ao nível da visualização. Apenas os alunos que se basearam no contexto figurativo foram capazes de encontrar estratégias que lhes permitiram a resolução das diversas questões.

Tabela 8 - *Estratégias aplicadas pelos alunos da turma na resolução da tarefa "Os Z´s"*

Questões	Estratégias de generalização				
	C	E	TE	NC	
3	8	6	-	3	Generalização próxima
4	-	8	-	9	Generalização distante
5	-	5	1	11	

Alguns alunos afirmaram ter sentido dificuldades em várias questões. A questão em que a maioria afirmou ter sentido mais dificuldades foi a 5 pois não conseguiam encontrar uma estratégia que permitisse chegar à solução. Quando questionados sobre o que aprenderam com esta tarefa, vários alunos referiram ter aprendido a trabalhar com sequências. Um aluno referiu ter aprendido a visualizar a sequência e a "descobrir-lhes uma regra".

Tarefa 9: Os Lugares

A tarefa *Os lugares* (Anexo 13) insere-se na categoria dos problemas com padrões e tem como principal objetivo a exploração de uma sequência, que não é apresentada de forma explícita. Pretende-se a descoberta de um padrão que conduzirá à generalização e naturalmente à solução do problema.

Nas questões 1 e 2, de generalização próxima, a estratégia recursiva foi claramente dominante. A maioria dos alunos adicionou a diferença de lugares entre filas consecutivas para descobrir o número de lugares da 5.ª e 6.ª filas (questão 1), pensando também de forma recursiva até encontrar o número de lugares da 10.ª fila (questão 2). Em ambas as questões, três alunos usaram a estratégia contagem para descobrir o número de lugares, tendo para isso recorrido ao desenho. Apesar de o número de alunos a utilizar esta estratégia na questão 1 e 2 ser o mesmo, apenas um deles utilizou a contagem nas duas questões. Na questão 2 um aluno usou a estratégia Múltiplo da Diferença sem ajuste, tendo-se socorrido do valor encontrado na questão anterior para a 6.ª fila. Verificou que a diferença entre filas consecutivas era de três lugares e adicionou essa diferença quatro vezes (diferença entre a 6.ª e a 10.ª filas). Assim, ao valor da 6.ª fila, adicionou 12 que era a diferença do número de lugares entre a 6.ª e a 10.ª filas.

Na questão 3, de generalização distante, em que os alunos tinham que descobrir o número de lugares da 138.ª fila, foram vários os alunos que apresentaram uma estratégia não categorizável. Dos restantes, dois utilizaram a estratégia *Parte Unidade* com ajuste pois recorreram ao valor encontrado anteriormente para a 10.ª fila de modo a encontrar o número de lugares da 130.ª fila. De seguida, procederam a um ajuste para chegar ao número de lugares da 138.ª fila. Outros alunos recorreram à estratégia recursiva até encontrar o número de lugares da 20.ª fila. Para contornar a morosidade desta estratégia, associaram ao pensamento recursivo a estratégia *Parte Unidade* com ajuste, pois foram adicionando o número de lugares da 10.ª fila até obter a 130.ª fila, ajustando o resultado ao adicionar o número de lugares da 8.ª fila. Surgiram, também, alunos que usaram múltiplos da diferença entre termos consecutivos recorrendo à estratégia Múltiplo da diferença. Alguns apenas multiplicaram o valor da diferença entre filas consecutivas pelo número da fila a descobrir, fazendo o cálculo 138×3 sem proceder a qualquer ajuste. Outro adicionou a diferença entre 10 filas obtendo a 20.ª a partir da 10.ª, a 30.ª a partir da 20.ª, até obter a 130.ª fila. De seguida, procedeu a um ajuste, adicionando o valor correspondente à 8.ª fila. Nenhum dos alunos conseguiu descobrir o valor correto do número de lugares que teria a 138.ª fila. Verificou-se que, na generalização distante, alguns alunos confundiram as duas variáveis, misturando filas com lugares, o que revela uma manipulação apenas numérica, em que os números são usados sem significado.

É de salientar um aluno que utilizou a estratégia explícita, quer em questões de generalização próxima quer em questões de generalização distante, identificando uma regra que relacionava as variáveis dependente e independente. Reconheceu cada fila como sendo constituída por múltiplos de três mais um, resultante da decomposição do padrão em partes disjuntas, o que corresponde a uma generalização construtiva.

Como se pode observar na tabela 9, nas questões de generalização próxima, questões 1 e 2, predominou a estratégia Recursiva (R), tendo também surgido a estratégia Contagem (C), a estratégia Explícita (E) e, na questão 2, a estratégia Múltiplo da Diferença sem ajuste (MDSA), estratégias adequadas neste contexto. Na questão 3, foram evidentes dificuldades por parte dos alunos na sua resolução, já que apenas um conseguiu descobrir o valor correto do número de lugares da 138.ª fila. Esta situação poderá estar relacionada com a natureza das estratégias utilizadas nas questões de generalização próxima pois, tendo a maioria dos alunos recorrido à estratégia recursiva não conseguiram utilizá-la na questão de generalização distante por ser muito exaustiva. Os alunos que o fizeram associaram-na a outra estratégia para ultrapassar a sua morosidade. Assim, na questão 3 surgiu o raciocínio recursivo (R), estratégia desadequada em questões desta natureza devido à sua morosidade, aparecendo, por isso, em alguns casos associada à estratégia *Parte Unidade* com ajuste (R+PUCA). Surgiu também a estratégia *Parte Unidade* com ajuste (PUCA), isolada da recursiva, a estratégia Múltiplo da diferença sem ajuste (MDSA) e com ajuste (MDCA) e a estratégia Explícita (E). Em alguns casos não foi possível categorizar as estratégias (Não categorizado – NC) porque o raciocínio apresentado pelos alunos não estava claro. É de salientar que nesta tarefa apenas um aluno recorreu à estratégia explícita, que seria adequada à questão 3, e permitiria facilmente encontrar o número de lugares da 138.ª fila. Na generalização distante, os alunos utilizaram, quase na totalidade, estratégias de natureza não visual tendo demonstrado bastantes dificuldades em analisar visualmente a figura apresentada.

Tabela 9 - *Estratégias aplicadas pelos alunos da turma na resolução da tarefa "Os lugares"*

Questões	Estratégias de generalização								
	C	R	R+PUCA	PUCA	MDSA	MDCA	E	NC	
1	3	10	-	-	-	-	1	-	Generalização próxima
2	3	9	-	-	1	-	1	-	
3	-	-	2	2	2	1	1	6	Generalização distante

A maioria dos alunos afirmou ter sentido dificuldades na resolução da questão 3, quer pelo elevado valor da ordem da fila, quer pela morosidade da estratégia escolhida. Quando questionados sobre o que aprenderam com esta tarefa, vários alunos referiram ter aprendido a trabalhar com sequências e um afirmou ter aprendido a raciocinar.

Tarefa 10: A moldura

A tarefa *A moldura* (Anexo 14) faz parte dos problemas com padrões e tem como principal objetivo a exploração de uma sequência, em contexto figurativo, que não é evidenciada de forma explícita, contemplando questões de generalização próxima e generalização distante.

Nas questões 1 e 2, questões de generalização próxima, a estratégia explícita foi claramente dominante. A maioria dos alunos aplicou uma regra, relacionando as variáveis dependente e independente, que surgiu da visualização das figuras. Contudo, a expressão numérica apresentada por alguns alunos não correspondia ao contexto apresentado e não relacionava as variáveis de forma correta, calculando o número de azulejos como se fosse o perímetro do quadrado, não tendo em conta a sobreposição de azulejos.

Ao longo da resolução da tarefa, a investigadora apercebeu-se dessa situação e alertou os alunos para que estivessem atentos, observassem bem a figura e analisassem as suas resoluções com base no contexto apresentado. Mesmo assim, alguns alunos não foram capazes de compreender que a expressão não estava correta pois não conseguiram compreender que os azulejos que se posicionavam nos cantos estavam sobrepostos. Esta situação demonstra que os alunos foram influenciados erradamente pelo conceito de perímetro, revelando dificuldades na visualização, neste caso específico, na identificação da estrutura do padrão. Apesar de se terem baseado no contexto figurativo, os alunos não atribuíram, na totalidade, significado à expressão numérica apresentada. Todavia, existiram alunos que, a partir da análise da figura, apresentaram uma expressão que relacionava de forma correta as variáveis dependente e independente, ou seja, o número de azulejos com as dimensões do quadrado. Pela primeira vez, alguns alunos apresentaram expressões numéricas recorrendo a uma generalização de natureza desconstrutiva, identificando a moldura composta por quatro conjuntos com o mesmo número de azulejos (lados do quadrado), procedendo depois à subtração dos cantos que estavam sobrepostos (figura 26).

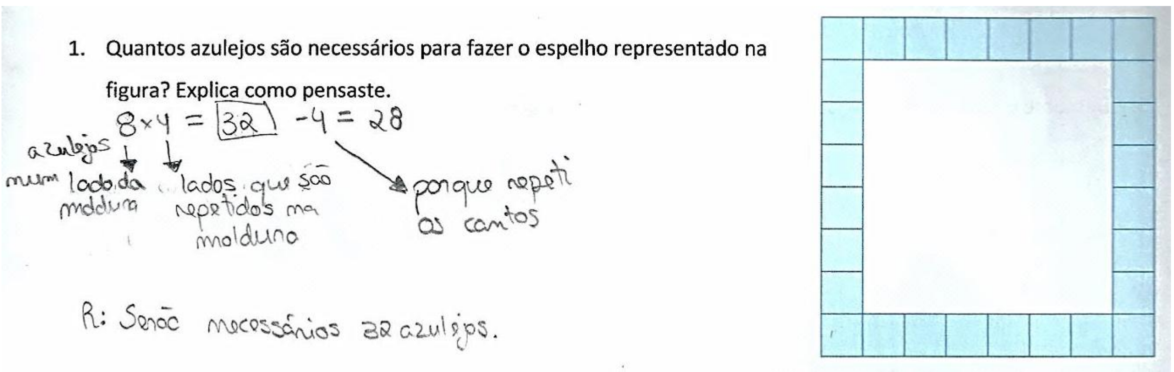


Figura 26. Resolução apresentada por A.A. na questão 1 da tarefa "A moldura"

Mas também existiram alunos que recorreram a uma generalização construtiva, procedendo à decomposição da estrutura do padrão em partes disjuntas, vendo dois grupos com um número de azulejos correspondente às dimensões do quadrado e dois grupos com menos dois azulejos do que os grupos referidos anteriormente (figura 27).

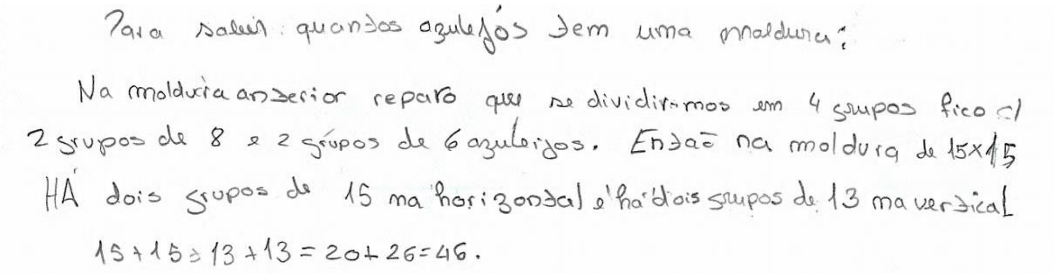


Figura 27. Resolução apresentada por V.I. para a questão 2 da tarefa "A moldura"

Nas questões 1 e 2 surgiu também a estratégia contagem, tendo alguns alunos desenhado as figuras de dimensões 8x8 e 15x15 e contado o número de azulejos correspondente.

Na questão 3, de generalização distante, os alunos usaram unicamente a estratégia explícita, verificando-se as mesmas particularidades das questões anteriores. Assim, a maioria dos alunos aplicou uma regra que não relacionava de forma correta as variáveis dependente e independente, calculando o número de azulejos como se fosse o perímetro. Os restantes deduziram uma regra que relacionava de forma correta as duas variáveis, surgindo novamente casos de generalização construtiva e de generalização desconstrutiva.

Nas questões 2 e 3 menos de metade dos alunos conseguiu obter o valor correto de azulejos devido à situação em que a expressão numérica não traduzia de forma correta a relação entre as dimensões do quadrado e o número de azulejos.

A questão 4 envolvia, para além da generalização distante, a reversibilidade de pensamento, facto que poderá ter levado vários alunos a resoluções incorretas e à utilização de estratégias impossíveis de categorizar. Alguns alunos revelaram reversibilidade de pensamento pois aplicaram a regra descoberta anteriormente invertendo as operações, recorrendo assim à estratégia explícita. Contudo, essa regra, que foi utilizada nas questões anteriores, não estava certa, o que não permitiu aos alunos obterem conclusões corretas. Dos alunos que utilizaram a estratégia explícita e deduziram uma regra de forma correta, a partir da análise da estrutura do padrão, nenhum conseguiu aplicar a regra descoberta na resolução desta questão, evidenciando dificuldades na reversibilidade de pensamento. Dois alunos utilizaram a estratégia tentativa e erro, experimentando vários valores com base na regra descoberta anteriormente. Verificou-se que apenas um aluno conseguiu resolver esta questão de forma correta, tendo-se baseado nas resoluções das questões anteriores e recorrendo à estratégia explícita.

Ao nível da apresentação de uma expressão algébrica que traduzisse o número de azulejos de uma moldura de quaisquer dimensões, verificou-se uma evolução. Metade dos alunos foram capazes de traduzir algebricamente a relação descoberta anteriormente, surgindo as expressões $n \times 4 - 4$ e $2 \times n + 2 \times (n-2)$, sendo n a dimensão do lado do quadrado. Em alguns casos verificou-se que, apesar da expressão algébrica traduzir a regra descoberta nas questões anteriores, não correspondia ao contexto apresentado porque os alunos deduziram regras incorretas. Os restantes alunos, apesar de não apresentarem uma expressão algébrica correta, revelaram alguma evolução na capacidade de manipulação simbólica.

Analisando as expressões numéricas que surgiram ao longo das resoluções, verificou-se que continuam a surgir situações em que a expressão não corresponde completamente à interpretação do contexto explorado. Alguns alunos, apesar de compreenderem a estrutura do padrão, verbalizando-o corretamente, e de serem capazes de formular expressões numéricas, continuam a não atribuir significado diferente à mudança de ordem dos fatores envolvidos na multiplicação. Contudo, essa situação surgiu em menor número do que em tarefas anteriores.

Como se pode observar na tabela 10, nas questões de generalização próxima, questões 1 e 2, predominou a estratégia Explícita (E), tendo também surgido a Contagem (C), estratégias adequadas neste contexto. Na questão 3, de generalização distante, surgiu apenas a estratégia Explícita (E). Na questão que envolvia a generalização distante e a reversibilidade de pensamento, questão 4, foram utilizadas as estratégias Explícita (E) e Tentativa e Erro (TE). Nas questões 3 e 4, em alguns casos não foi possível categorizar as estratégias (Não categorizado – NC) porque o raciocínio apresentado não estava claro.

Na utilização da estratégia explícita, os alunos recorreram a generalizações de natureza construtiva de natureza desconstrutiva. Apesar de na resolução desta tarefa as estratégias utilizadas serem quase na totalidade de natureza visual (Contagem e Explícita), alguns alunos revelaram dificuldades na visualização pois não analisaram de forma correta a estrutura do padrão apresentado. Apenas utilizaram estratégias de natureza não visual quando recorreram à estratégia Tentativa e Erro.

Tabela 10 - *Estratégias aplicadas pelos alunos da turma na resolução da tarefa "A moldura"*

Questões	Estratégias de generalização				
	C	E	TE	NC	
1	4	10	-	-	Generalização próxima
2	2	12	-	-	
3	-	13	-	1	Generalização distante
4	-	8	2	4	

Vários alunos referiam ter sentido dificuldades na questão 4 e alguns sentiram dificuldades na questão 5. Todavia, a maioria afirmou não ter sentido dificuldades nesta tarefa. Quando questionados sobre o que aprenderam, referiram ter aprendido a resolver problemas com padrões, a descobrir uma regra para resolver sequências, a visualizar padrões numa figura e a raciocinar.

Síntese

De uma forma geral, os alunos da turma revelaram-se interessados e empenhados ao longo das sessões de exploração das tarefas. Verificou-se que, recorreram a uma grande variedade de estratégias para a resolução das tarefas propostas. Nas tarefas de Contagens Visuais, predominaram estratégias de natureza visual, envolvendo, quase na totalidade, o subitizing conceptual. Contudo, a forma de *ver* as figuras foi diferente, o que conduziu a diferentes agrupamentos e, consequentemente, a diferentes expressões numéricas. Nas tarefas de sequências e problemas com padrões os alunos da turma recorreram a diversas estratégias de generalização: contagem, recursiva, *parte unidade*, múltiplo da diferença, tentativa e erro e explícita. Em questões de generalização próxima predominaram as estratégias contagem e recursiva, enquanto que na generalização distante predominou a estratégia explícita. Os alunos revelaram maior preferência por generalizações de tipo construtivo, tendo a generalização desconstrutiva surgido com pouca significância. Revelaram algumas dificuldades em analisar a estrutura do padrão, e por isso tiveram dificuldades principalmente em resolver as questões de generalização distante. Verificou-se que neste género de questões, os alunos que recorreram a estratégias de natureza visual, como a explícita, obtiveram maior sucesso do que os que se basearam no contexto numérico. Apesar de terem evidenciado dificuldades na formulação de expressões algébricas que traduzissem a generalização, os alunos revelaram evolução, quer neste parâmetro quer na manipulação simbólica.

CAPÍTULO V – O CASO DANIEL

Neste capítulo descreve-se, de forma detalhada, a participação do Daniel, um dos alunos que integrou este estudo. Depois de apresentar as suas características pessoais e académicas, analisa-se o trabalho desenvolvido pelo aluno ao longo da exploração das tarefas propostas.

Caracterização do Daniel

No início do ano letivo o Daniel tinha 11 anos. Reside numa freguesia que faz fronteira com a freguesia onde se localiza a Escola com os pais e a irmã de 14 anos, que frequenta o mesmo estabelecimento de ensino. Deslocava-se para a escola de carro, demorando cerca de 5 minutos a realizar o percurso. Os pais apresentam habilitações académicas ao nível do ensino superior sendo ambos professores. O Daniel gostava bastante de desporto, frequentando o Desporto Escolar, nomeadamente as modalidades de Badminton e Orientação, atividades extracurriculares promovidas pela Escola. Nos tempos livres gostava de ler, ver televisão e praticar desporto. No seu percurso escolar não apresentava retenções e, quanto ao seu futuro, esperava concluir um curso superior. Recorria à biblioteca escolar por iniciativa própria, para ler, fazer trabalhos, estudar e utilizar o computador. As suas disciplinas preferidas eram a Educação Física, porque ia fazer desporto, algo que afirmava adorar, o Português e a Matemática porque "são as mais importantes" e que frequenta "há mais tempo".

Era um aluno excelente, com nível 5 a Matemática. Quando questionado sobre o que era para si a Matemática afirmava ser uma disciplina que gosta, que apesar de ser difícil obriga "a pensar e a estudar e isso é bom". Perante uma tarefa matemática dizia sentir-se e curioso pois não sabia o que seria, por isso procurava estar atento para a resolver da melhor forma possível. O que mais gostava de fazer nas aulas de Matemática era "resolver problemas individualmente e aprender matéria" porque gostava "de saber coisas novas e tentar resolver problemas". Pelo contrário, não gostava quando não percebia alguma matéria e não conseguia "resolver exercícios sobre ela".

O Daniel era um aluno bastante ativo, que gostava de participar e apresentar as suas ideias. Exprimia-se de forma clara e com facilidade, quer oralmente quer por escrito, e expunha as suas dificuldades e dúvidas. Era um aluno atento, organizado e trabalhador, conseguindo atingir bons resultados em todas as disciplinas. Era simpático, extrovertido, brincalhão e perspicaz, no entanto, bastante competitivo, procurando ser sempre o melhor em todas as atividades em que se envolvia e o melhor aluno da turma. Apesar disso, tinha uma boa relação com os colegas e ajudava os que necessitavam.

Exploração das tarefas

Nesta secção apresenta-se o trabalho desenvolvido pelo Daniel ao longo da implementação das tarefas, sendo feita uma análise com incidência nas estratégias utilizadas e nas dificuldades reveladas.

Tarefa 1: Qual tem mais estrelas?

O Daniel realizou o trabalho de forma autónoma, mostrando-se motivado e empenhado na resolução da tarefa, a qual resolveu rapidamente, terminando mais cedo que a maioria dos alunos. Para descobrir o número de estrelas utilizou subitizing conceptual reconhecendo padrões, em cada cartão, decompondo o todo em partes conhecidas (figura 28).

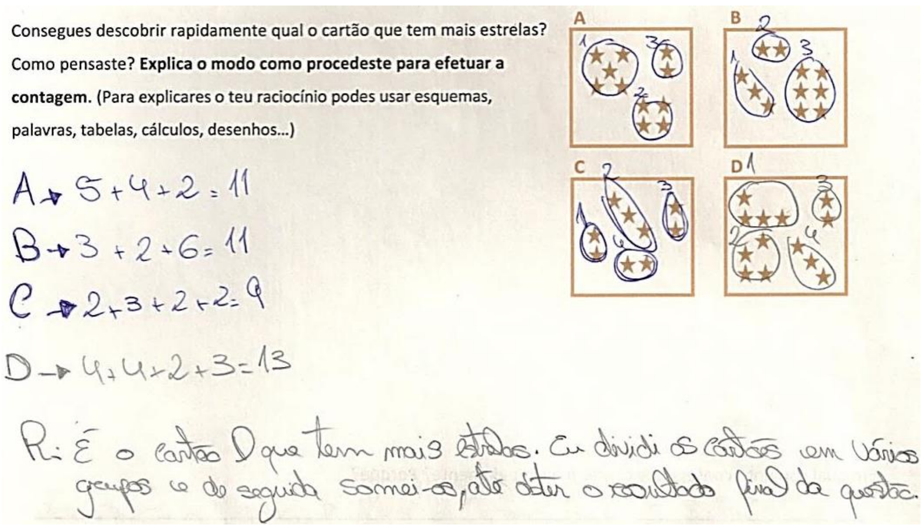


Figura 28. Resolução da tarefa "Qual tem mais estrelas" apresentada pelo Daniel.

A resolução apresentada pelo Daniel está parcialmente realizada a caneta e a lápis pois o aluno começou a resolução a caneta e quando um colega perguntou se poderia ser realizada a lápis, tendo a investigadora respondido que sim, o Daniel optou por continuar a lápis. Salienta-se que as diferentes partes que o aluno reconheceu nos cartões estão identificadas com números que não correspondem ao número de elementos de cada conjunto, são apenas indicadores da ordem das parcelas na adição.

Pode-se considerar que o Daniel recorreu a estratégias de natureza visual já que a disposição espacial das estrelas foi fundamental para encontrar a solução. Tal como a maioria dos alunos, formou agrupamentos segundo a disposição das estrelas nos cartões, com base na proximidade, que, de acordo com ele, facilitaram a contagem.

> Investigadora: Por que agrupaste as estrelas desta forma?
> Daniel: Para ser mais fácil para contar.
> Investigadora: No cartão D por que formaste o grupo 1 e 2 com 4 estrelas cada?
> Daniel: Porque achei que faziam grupos.

Considerou o cartão B como aquele em que a contagem foi mais rápida, devido aos subconjuntos formados, sendo que o número de elementos de cada subconjunto facilitou o cálculo (figura 29).

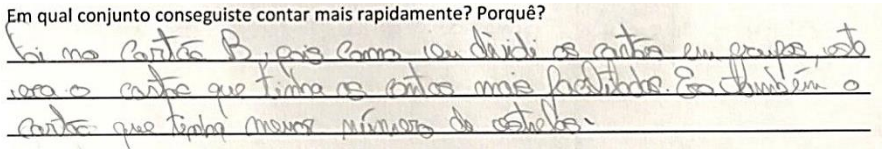

Em qual conjunto conseguiste contar mais rapidamente? Porquê?
Foi no cartão B, pois como eu dividi os cartões em grupos, este era o cartão que tinha os pontos mais facilitados. Era também o cartão que tinha menos número de estrelas.

Figura 29. Justificação apresentada por Daniel (Tarefa "Qual tem mais estrelas")

O Daniel mencionou que no cartão D demorou mais tempo a efetuar a contagem "porque os grupos de estrelas estavam posicionados de forma diferente" e porque "era também o cartão com maior número de estrelas". Acrescentou um terceiro fator relacionado com o cálculo já que referiu que "as contas que se tinham que fazer eram mais complicadas".

Apesar de considerar que não teve dificuldades na resolução da tarefa achou que, de todos os cartões, o D foi o que suscitou mais dificuldades devido aos cálculos efetuados e à disposição das estrelas, o que já era expectável já que este cartão apresentava uma disposição mais aleatória do que os restantes.

Tarefa 2: Dados

O Daniel realizou o trabalho de forma autónoma, revelando empenho e bastante facilidade, tendo concluído rapidamente a resolução da tarefa.

Numa fase inicial, recorreu ao subitizing percetual, já que reconheceu automaticamente o número de pintas de cada dado sem ter necessidade de efetuar a sua contagem. Assim, cada dado foi entendido como um todo. Tal como na tarefa anterior, verificou-se, por parte deste aluno, o recurso a estratégias de natureza visual, já que a imagem foi fundamental para a resolução.

Para descobrir o número total de pintas, o Daniel não recorreu à formação de dobros, como a maioria dos alunos da turma. Optou por agrupar todos os dados com a mesma quantidade, formando assim três conjuntos, recorrendo à multiplicação para formular a expressão numérica.

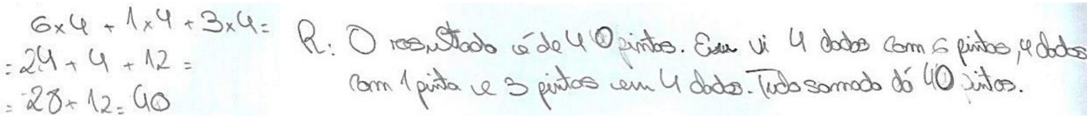
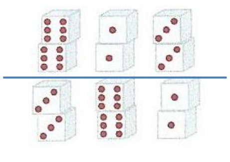


Figura 30. Resolução da tarefa “Dados” apresentada pelo Daniel.

Investigadora: Por que fizeste grupos de quatro?
Daniel: Porque era um dado, mais um dado, mais um dado, mais um dado. Tinha o dado número seis quatro vezes.
Investigadora: Na expressão numérica escreveste 6x4. Encontras seis grupos de 4?
Daniel: … Encontro quatro grupos de 6.

Com base nestas respostas e com a fundamentação da folha de registo, verifica-se que o aluno interpretou corretamente o contexto figurativo apresentado. No entanto, apesar de ter referido que viu quatro conjuntos de 6, quatro conjuntos de 1 e quatro conjuntos de 3, verifica-se que na expressão numérica que formulou, trocou a ordem dos fatores nas multiplicações. A expressão representa seis conjuntos de 4, um conjunto de 4 e três conjuntos de 4, demonstrando que não estabeleceu um paralelismo entre a componente visual e a componente numérica. Esta situação poderá ser explicada pelo facto de estar habituado a manipular os números sem um contexto figurativo associado e apenas em contexto puramente numérico em que, pela propriedade comutativa, a ordem dos fatores não altera o valor do produto. Nesta tarefa, a interpretação da expressão numérica não se adequa ao contexto apresentado, revelando que Daniel, apesar de recorrer a estratégias de contagem visuais, tem alguma tendência para o trabalho em contexto numérico descontextualizado da representação. Quando questionado sobre o porquê de ter escolhido fazer aqueles agrupamentos, o aluno referiu que de uma só vez contava quatro o que tornava mais rápida a contagem, tendo sido esta a forma de agrupar que considerou mais rápida.

Investigadora: Na altura só viste esta forma de agrupar ou encontraste outras formas e optaste por esta?
Daniel: Havia mais formas mas eu achei essa mais fácil e mais rápida.
Investigadora: Mas conseguias encontrar outras também rápidas?
Daniel: Sim.
Investigadora: Consegues dar-me um exemplo agora?
Daniel: Por exemplo… Fazia seis mais um mais três vezes dois e três mais seis mais um vezes dois.



$(6 + 1 + 3) \times 2$

$(3 + 6 + 1) \times 2$

Figura 31. Esquema do exemplo dado pelo Daniel para outra resolução da tarefa “Dados”.

Nesta outra forma de efetuar a contagem o aluno continua a utilizar o subitizing percetual já que reconhece o número de pintas de cada dado como um todo, sem recorrer a qualquer processo matemático mas passa a visualizar a figura numa disposição horizontal fazendo o dobro das linhas repetidas. Para determinar o número total de pintas, tendo em conta a expressão numérica, está subjacente o subitizing conceptual.

O aluno refere que não teve dificuldades na resolução desta tarefa. No entanto, apesar de a considerar fácil, achou-a mais complicada do que a anterior. Demonstrou preocupação com o contexto numérico já que, como justificação para a maior dificuldade desta tarefa, apresentou o argumento da morosidade do cálculo, situação que já se tinha verificado na tarefa anterior.

Tarefa 3: Os grãos de café

O Daniel iniciou a resolução da tarefa, como sempre, de forma empenhada e autónoma. Pouco tempo depois colocou uma questão:

Daniel: Temos de explicar por palavras?
Investigadora: Explica como contaste.
Daniel: Ou a expressão numérica já chega?
Investigadora: Tens a expressão numérica mas tens que explicar. Pode ser por palavras ou como quiseres.
Daniel: Pode ser na figura?
Investigadora: Pode ser na figura.

Na resolução das questões desta tarefa, o Daniel voltou a utilizar o subitizing conceptual reconhecendo o padrão como a composição de várias partes que constituíam o todo.

Na primeira questão, visualizou a figura numa disposição linear, na vertical, reconhecendo a existência de dobros (figura 32).

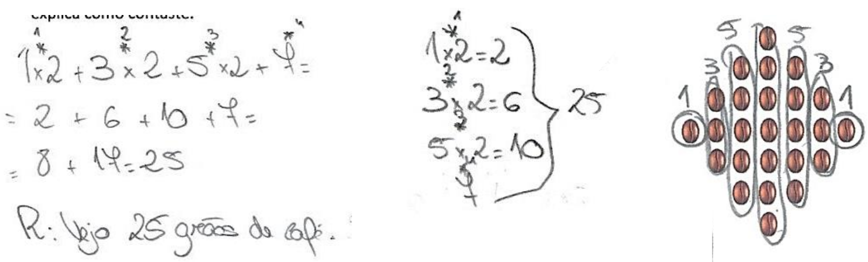


Figura 32. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 1 da tarefa "Os grãos de café"

Identificou conjuntos com igual número de elementos nas várias colunas que salientou. Contudo, verifica-se que o aluno apresentou novamente uma expressão numérica que não se adequa ao contexto proposto. Apesar do registo da expressão, em termos numéricos, conduzir o aluno ao número total de grãos de café, não traduz a informação da imagem.

Na segunda questão, Daniel apresenta uma expressão numérica da qual se subentende que visualizou a figura numa disposição linear na diagonal.

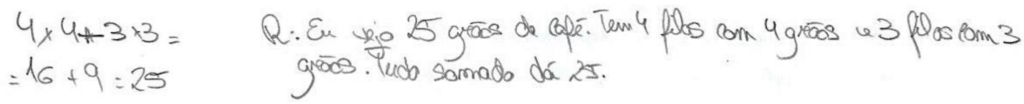


Figura 33. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 2 da tarefa “Os grãos de café”

Na tentava de clarificar o raciocínio do aluno, aquando da entrevista, foi-lhe pedido que exemplificasse na figura a forma como a visualizou na questão 2. O Daniel apresentou o seguinte esquema

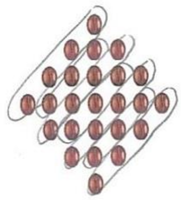


Figura 34. Esquema elaborado pelo Daniel na entrevista (questão 2 da tarefa “Os grãos de café”)

Este esquema (figura 34) veio comprovar o que a resolução da tarefa (figura 33) levava a concluir. Daniel visualizou a figura numa disposição linear na diagonal. A expressão numérica (figura 33) não permite verificar se continua a revelar um desfasamento entre a componente visual e a componente numérica porque o valor dos fatores é o mesmo.

Na terceira questão o aluno concluiu que “os resultados são iguais, no entanto as formas de proceder são diferentes. Mudando de processo, o resultado não altera”. Verifica-se que o Daniel associou as diferentes expressões numéricas a diferentes processos de contagem, mas não referiu que esses processos de contagem estavam relacionados com diferentes formas de ver a figura.

O Daniel considerou que a segunda expressão numérica permitiu descobrir mais rapidamente o número total de grãos de café, sendo também aquela em que se revelou mais fácil efetuar a contagem. Como justificação para tal facto, referiu que esta expressão conduzia a cálculos mais fáceis, continuando a demonstrar preocupação com o contexto numérico, tal como nas duas tarefas anteriores.

É de salientar que, através da entrevista, foi possível concluir que a segunda expressão numérica corresponde à primeira visualização que o Daniel efetuou da figura.

> Investigadora: Na questão 1 fizeste desta forma. Foi a primeira forma que viste a figura ou viste de outra forma e depois lembraste-te de fazer esta?
> Daniel: Vi de outra. Vi na diagonal só que depois pareceu-me que estava mal e fiz essa.
> Investigadora: A primeira que tu viste foi na diagonal?
> Daniel: Sim

A expressão numérica que ele descreveu como sendo a que foi mais fácil para efetuar a contagem, e a que permitiu chegar mais rapidamente ao resultado, corresponde a uma visualização da figura numa disposição linear na diagonal. Contudo, na entrevista, afirmou que a forma de visualizar a figura que considerou mais fácil foi a disposição linear na vertical.

Investigadora: Para ti, qual das duas formas é mais fácil de ver a figura? Não de resolver a expressão numérica mas de ver a figura. Na diagonal ou na vertical?
Daniel: É na vertical.
Investigadora: Apesar de teres visto em primeiro lugar na diagonal é mais fácil ver a figura na vertical?
Daniel: Sim.

O aluno referiu não ter sentido dificuldades na resolução desta tarefa. Apesar de ter recorrido a estratégias de contagem visuais, voltou a demonstrar alguma tendência para recorrer ao contexto numérico, descontextualizado da representação figurativa, e uma grande preocupação com os cálculos.

Tarefa 4: Os berlindes do Carlos

Após a leitura da tarefa o Daniel iniciou de imediato a sua resolução de forma empenhada e autónoma. O aluno demonstrou preocupação na apresentação do raciocínio, tendo questionado a investigadora neste sentido:

Daniel: Podemos rodear a caneta?
Investigadora: Podes.

Também se preocupou em perguntar se a sua resolução estaria compreensível, procurando validação:

Daniel: Aqui (apontando para a questão 2), já fiz as expressões numéricas todas. Tenho que justificar?
Investigadora: Não. Está justificado aqui na imagem.
Daniel: Você percebe as cores?

Na resolução das questões desta tarefa, o Daniel voltou a utilizar o subitizing conceptual reconhecendo a imagem (todo) como a composição de várias partes.

Na resolução da primeira questão, identificou na figura arranjos lineares na vertical e arranjos retangulares (quadrado de dimensões 2x2), conjugando as duas vertentes (figura 35).

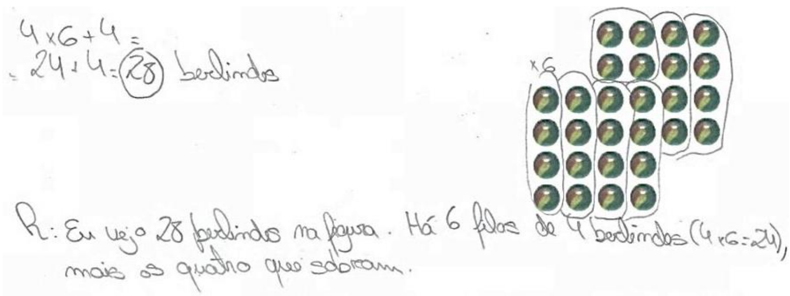


Figura 35. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 1 da tarefa “ Os berlindes do Carlos”.

O aluno continua a apresentar uma expressão numérica que não se adequa ao contexto exposto. Com base na indicação x6, junto da imagem, e na fundamentação apresentada na resposta (figura 35), verifica-se que o Daniel interpretou o contexto figurativo apresentado de forma correta. Contudo, apesar de referir que visualizou seis conjuntos de 4, a expressão numérica que formulou representa quatro conjuntos de 6, evidenciando que não estabeleceu um paralelismo entre a componente visual e a componente numérica.

Na segunda abordagem da imagem (figuras 36 e 37), o Daniel apresentou cinco formas diferentes de contagem dos berlindes: (1) Disposição retangular formando grupos de 4 e de 6 (representados a verde); (2) Disposição linear na diagonal (representado a lápis); (3) Disposição retangular formando grupos de 4 berlindes (quadrados de dimensões 2x2) (representados a azul); (4) Disposição retangular formando grupos de 8 e de 4 (representados a preto); (5) Grupos de 2 elementos (representados a vermelho).

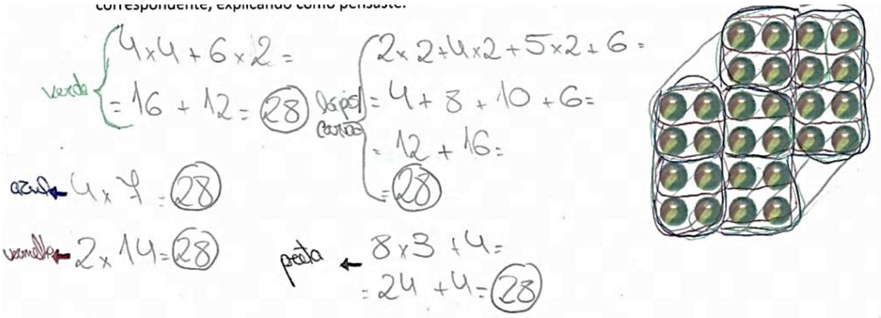


Figura 36. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 2 da tarefa “ Os berlindes do Carlos”.

Como se pode verificar, na resolução da segunda questão, o Daniel apresentou uma imagem bastante confusa. Deste modo, aquando da entrevista, foi-lhe pedido que clarificasse os esquemas realizados na figura, usando as mesmas cores (figura 45):

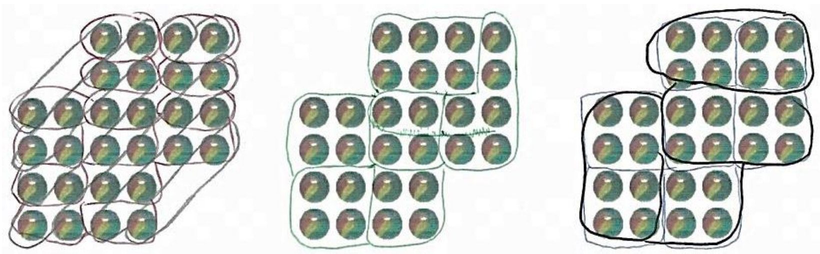


Figura 37. Esquema apresentado pelo Daniel na entrevista (questão 2 da tarefa “Os berlindes do Carlos”).

Analisando as expressões numéricas que o aluno apresentou (figura 36), verifica-se que, apesar de ter verbalizado corretamente os arranjos que identificou, estas não representam o contexto figurativo explorado, tal como sucedeu na primeira questão. Conjugou aleatoriamente os fatores nos produtos sem atribuir significado à ordem pela qual foram aplicados.

Na terceira questão o aluno concluiu que “embora as expressões numéricas sejam diferentes, os resultados continuam iguais”. Verifica-se que o Daniel apenas referiu que as expressões numéricas representavam o mesmo valor, sem no entanto ter referido que representam diferentes formas de contagem e de visualização da mesma figura.

O Daniel considerou que, quando formou grupos de 4, descobriu mais rapidamente o número total de berlindes e foi mais fácil efetuar a contagem. O aluno associou a forma mais fácil de contar à decomposição em grupos de igual número de elementos o que por sua vez também facilitou a chegada à concretização do cálculo.

Apesar de a expressão que facilitou a contagem e que permitiu mais rapidamente chegar ao resultado corresponder a uma visualização da figura na disposição retangular, na entrevista afirmou que a forma mais fácil de visualizar a figura foi a disposição na diagonal:

> Investigadora: Qual foi a forma de observar a figura que tu achaste mais fácil? A forma de ver, não a de calcular.
> Daniel: De todas?
> Investigadora: Sim. Desta (apontado para a questão 1) e destas (apontando para a questão 2) qual foi a forma que tu achaste mais fácil?
> Daniel: (Após 5 segundos) A primeira, a do lápis.
> Investigadora: A do lápis. Achas mais fácil assim na diagonal?
> Daniel: Sim.

Esta incoerência poderá justificar-se pelo facto de o aluno, nas respostas do enunciado da tarefa, estar a valorizar o contexto numérico enquanto que na entrevista teve em conta o contexto figurativo.

O aluno referiu que não teve dificuldades na resolução desta tarefa, considerando-a mais fácil do que a anterior.

> Investigadora: Nas respostas às questões disseste que achavas esta tarefa mais fácil que a dos grãos de café. Porquê?
> Daniel: Porque nesta não tive dificuldades. Consegui resolver.
> Investigadora: Porque achas que conseguiste resolver mais facilmente esta do que a dos grãos de café?
> Daniel: Esta também era mais fácil. As perguntas eram mais fáceis e havia muitos processos para resolver.
> Investigadora: Mas as perguntas são iguais…
> Daniel: Então era a imagem…
> Investigadora: Era a imagem em si? Achavas esta imagem (apontando para a tarefa “Os berlindes do Carlos”) mais fácil do que esta (apontando para a tarefa: “Os grãos de café)?
> Daniel: Sim.

Verifica-se que o aluno sentiu dificuldades em justificar o porquê de considerar esta tarefa mais fácil do que a “Os grãos de café”, acabando por associar a facilidade à imagem apesentada. Sendo estas tarefas (“Os grãos de café” e “Os berlindes do Carlos”) muito semelhantes, o Daniel poderá ter sentido menos dificuldades por não ser a primeira abordagem a tarefas desta natureza, tendo a tarefa “Os grãos de café” servido de preparação.

Apesar de recorrer maioritariamente a estratégias de contagem visuais, o Daniel continuou a demonstrar tendência para recorrer ao contexto numérico descontextualizado da representação figurativa, no que refere ao registo das expressões numéricas.

Tarefa 5: A coleção de moedas

Tal como sucedeu nas tarefas anteriores, o Daniel resolveu esta tarefa de forma autónoma e empenhada.

Na resolução das questões propostas, voltou a utilizar o subitizing conceptual reconhecendo a imagem como a composição de várias partes, reconhecidas automaticamente após a visualização.

Tal como os restantes alunos da turma, o Daniel recorreu a expressões numéricas para resolver a tarefa, apesar de não ter sido solicitado. Nas tarefas anteriores foi pedido aos alunos que apresentassem uma expressão numérica que traduzisse a contagem efetuada, facto que poderá ter influenciado a resolução desta proposta.

Na resolução das questões 1 e 2, o Daniel utilizou estratégias baseadas na ideia de construção da figura como o resultado da reunião de todas as moedas (figuras 38 e 39). Na primeira questão o aluno identificou na figura seis partes, destacando-as com letras, visualizando as moedas numa disposição linear (figura 38).

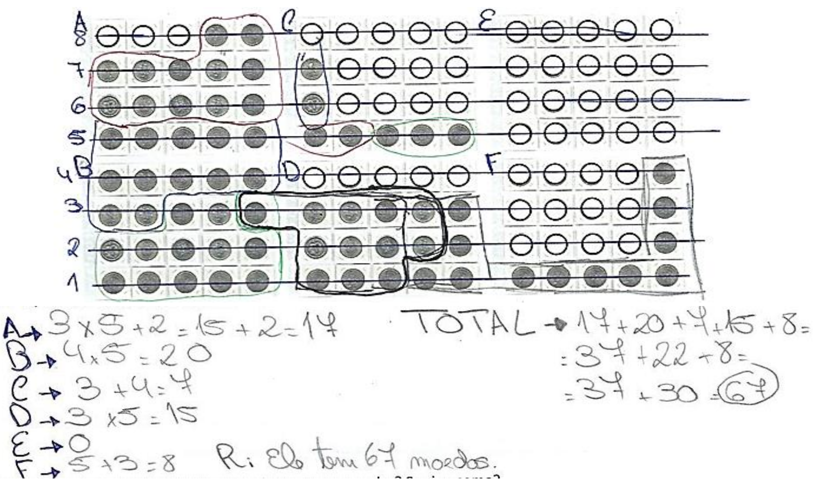


Figura 38. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 1 da tarefa “A coleção de moedas”.

Segundo o registo apresentado, por exemplo na parte A, o aluno encontrou três grupos de 5 moedas, o que corresponde à visualização das moedas numa disposição linear. Para clarificar esta interpretação, aquando da entrevista, o aluno foi questionado sobre a forma como visualizou a figura:

Investigadora: Na parte A (apontando para a figura) fizeste $3 \times 5 + 2$ estavas a ver a figura na vertical ou estavas a ver a figura na horizontal?
Daniel: (após 5 segundos) Na vertical.

Com esta resposta, verificamos que o aluno não visualizou a figura horizontalmente, como a expressão numérica indicia, mas viu as moedas dispostas verticalmente. Assim, a expressão numérica correspondente à visualização das moedas na vertical seria $5 \times 3 + 2$, representando cinco grupos de 3 moedas mais 2. Mais uma vez, o Daniel apresentou uma expressão numérica que não se adequa ao contexto figurativo apresentado, demonstrando que não estabeleceu um paralelismo entre a componente numérica e a componente visual.

Na resolução da questão 2, o Daniel visualizou a figura numa disposição linear mas na horizontal, efetuando a contagem das moedas por linha completa, tendo numerado cada linha.

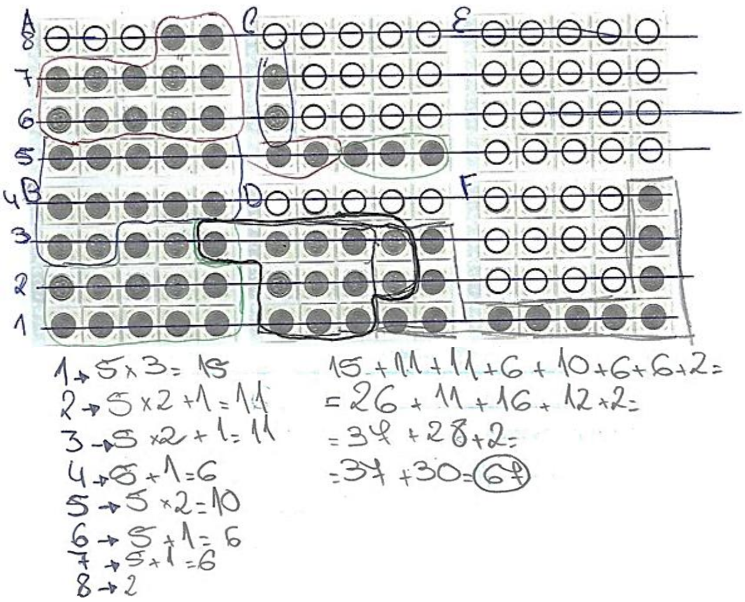


Figura 39. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 2 da tarefa "A coleção de moedas".

Investigadora: As retas que traçaste era para explicar que quando tinhas os números estavas a ver a figura na horizontal?
Daniel: Sim.

Analisando as expressões numéricas que o aluno apresentou (figura 40), verifica-se que estas não representam o contexto figurativo, tal como sucedeu na primeira questão, apesar de ter descrito corretamente a distribuição das moedas de forma verbal.

O facto de o Daniel não apresentar um paralelismo entre a componente visual e a componente numérica revelou-se preponderante na resolução da questão 3. Devido a esse facto, o aluno interpretou de forma incorreta a expressão numérica apresentada, já que considerou que esta integrava cinco grupos de 12 moedas, tendo identificado na figura esses grupos com cores diferentes (vermelho, azul, verde, preto e lápis) (figura 40).

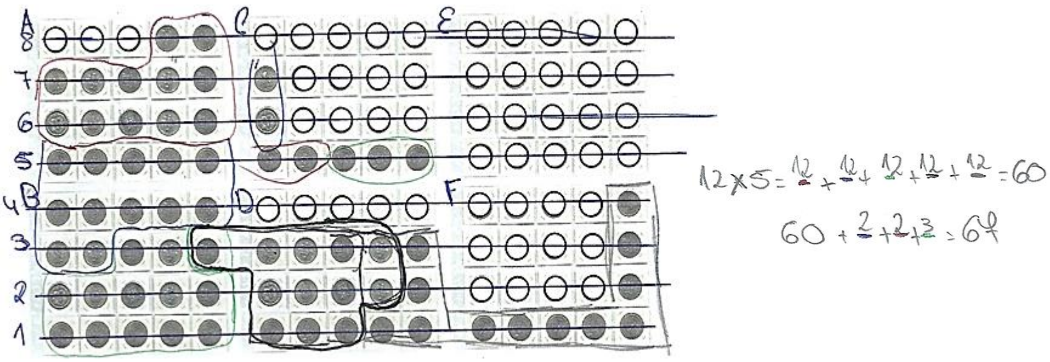


Figura 40. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 3 da tarefa "A coleção de moedas".

O aluno não conseguiu identificar o modo de ver que correspondia à expressão numérica do primo do Ricardo, revelando dificuldades no trabalho em contexto figurativo.

O Daniel considerou que a forma mais rápida de efetuar a contagem foi a primeira, o que correspondeu a uma visualização da figura como a reunião das seis partes. Justificou tal facto por esta contagem ter sido realizada por grupos. Referiu que não teve dificuldades na resolução desta tarefa, mas considerou que esta foi a mais difícil do conjunto das tarefas das contagens visuais. Apesar de recorrer a estratégias de contagem de natureza visual, o Daniel continuou a demonstrar tendência para a utilização do contexto numérico descontextualizado da representação figurativa.

Tarefa 6: Nenúfares e Rãs

O Daniel voltou a mostrar-se empenhado na resolução da tarefa que lhe foi proposta. Conseguiu, rapidamente, identificar a estrutura do padrão e as relações existentes entre os vários elementos que constituíam a sequência:

Daniel: Oh professora, se soubermos a tabuada do três já sabemos responder…

Tal como vários alunos da turma, o Daniel não compreendeu a questão 9 aquando da primeira leitura em grande grupo, o que era expectável já que não tinha experiência na utilização de variáveis, sendo esta a primeira abordagem à utilização de símbolos algébricos. Foi explicado que se pretendia saber o número de elementos (nenúfares, rãs e total) para um número qualquer de grupos repetidos, sendo esse número qualquer representado por uma letra.

Na questão 1, apesar de não ser pedido, o aluno identificou logo o motivo que se repetia ao longo da sequência, chamando-lhe motivo mínimo (figura 41). Na questão 2, em que se pedia o grupo de repetição, o aluno identificou o padrão do tipo AAB, respondendo que a unidade de repetição era "2 nenúfares e uma rã".

Ao contrário da maioria dos alunos da turma, para descobrir o 13.º elemento da sequência, o Daniel recorreu à estratégia *Parte Unidade com ajuste*. Da análise da estrutura do padrão, concluiu que a posição ocupada pelas rãs correspondia a um múltiplo de três. Assim, sabia que a 12.ª posição era ocupada por uma rã, logo o 13.º elemento seria um nenúfar, pois não ocupa uma posição que seja múltiplo de três (figura 41). O aluno usou o grupo de repetição como unidade e considerou múltiplos até se aproximar do valor 13, fazendo depois um ajuste.

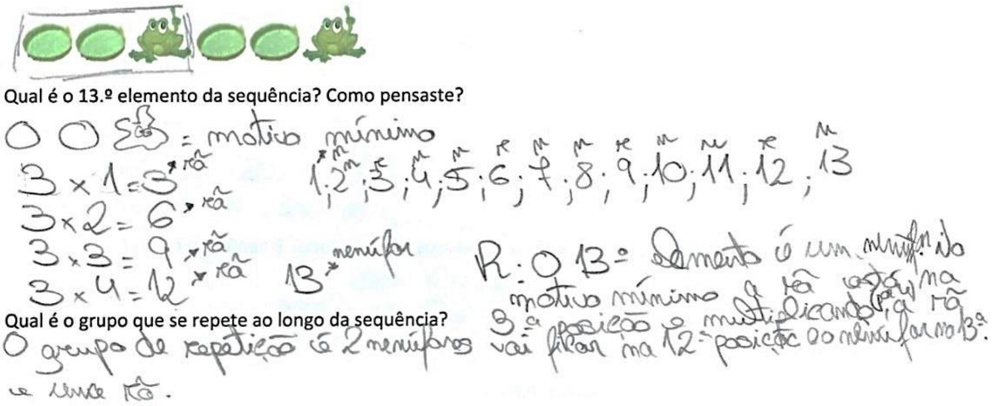


Figura 41. Resolução apresentada pelo Daniel para as questões 1 e 2 da tarefa "Nenúfares e rãs".

Apesar de na resolução o aluno apresentar a sequência até ao 13.º elemento, pela entrevista foi possível confirmar que apenas o fez para poder justificar melhor o raciocínio, verificando a sua conclusão. O seu raciocínio baseou-se na regra que identificou:

> Investigadora: Na questão 1 o que fizeste em primeiro lugar? O cálculo ou esquema?
> Daniel: Fiz primeiro isto (apontando para os cálculos efetuados). Isto (apontando para a sequência) era para ver… para completar.
> Investigadora: Para completar a tua resposta fizeste a sequência…
> Daniel: Sim.
> Investigadora: Mas fizeste em primeiro lugar os cálculos…
> Daniel: Sim.

Sendo o Daniel um aluno bastante preocupado com a apresentação de uma justificação o mais completa possível compreende-se esta necessidade de representar a sequência no sentido de ver a sua resposta confirmada.

Nas questões 3 e 4 o aluno usou a estratégia explícita pois aplicou uma regra resultante das relações identificadas entre os vários termos da sequência. Assim, concluiu que em cada grupo de repetição surgem 2 nenúfares e 1 rã, logo o número de rãs é igual ao número de grupos repetidos e o número de nenúfares é o dobro do número de grupos repetidos (figura 42).

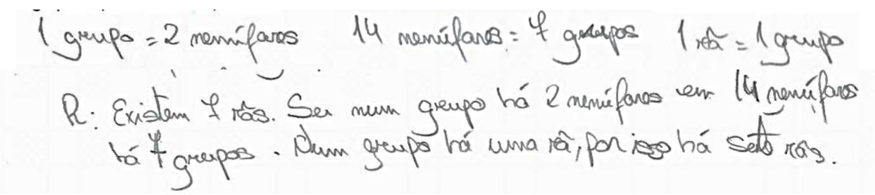


Figura 42. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 3 da tarefa "Nenúfares e rãs".

Desta forma, na questão 4 concluiu que na 30ª posição se encontrava uma rã porque 30 é um múltiplo de três.

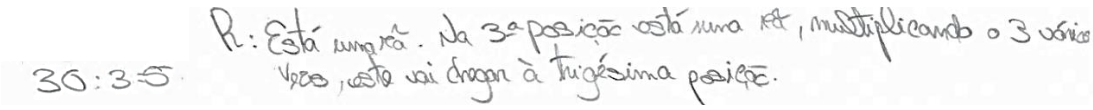


Figura 43. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 4 da tarefa "Nenúfares e rãs".

Investigadora: Na 4.ª questão dizes…Na 3.ª posição está uma rã. Estavas a referir-te à posição de uma rã num só grupo?
Daniel: Sim.
Investigadora: Estás a referir-te à posição num só grupo…estás a dizer…se num só grupo está na terceira posição, multiplicando sempre vai chegar à trigésima posição. O que significa multiplicando sempre?
Daniel: Multiplicar até chegar ao número.
Investigadora: E então que número é esse?
Daniel: Era o 30.
Investigadora: E o que é o 30 em relação ao 3?
Daniel: É um múltiplo.

Verificou-se assim que, nas questões 3 e 4, em que se pretendia trabalhar questões de generalização próxima, o Daniel, ao contrário da maioria dos alunos da turma, utilizou a estratégia explícita, deduzindo de imediato uma regra que lhe permitiu determinar os termos solicitados.

Em questões de generalização distante, como as questões 5, 6 e 7, o Daniel continuou a utilizar a estratégia explícita. Na questão 5 (figura 44), concluiu facilmente que existiam 34 nenúfares e 17 grupos de repetição. Apesar de na resposta não referir o número de grupos repetidos, na sua resolução identifica a existência de 17.

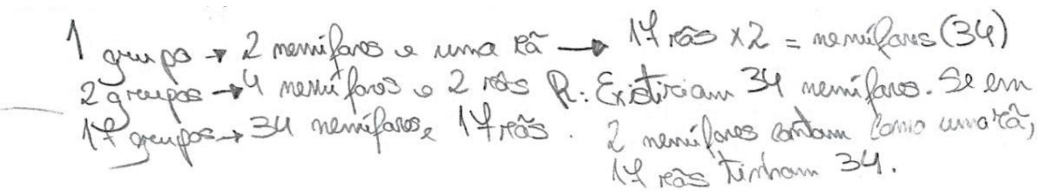


Figura 44. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 5 da tarefa "Nenúfares e rãs".

Na resolução da questão 6, o aluno apresentou algumas dúvidas. Dividiu o número de nenúfares por dois, obtendo como resultado um número não inteiro (figura 45), o que confundiu o Daniel, assim como outros alunos da turma que utilizaram a mesma estratégia:

Daniel: Aqui, (apontando para a questão 5) se construir uma sequência com 71 nenúfares, quantas rãs existem? Os nenúfares são sempre o dobro! E aqui se dividirmos 71 por 2 vai dar 35 e meio. Não é?
Investigadora: Achas que pode haver 35 rãs e meia?
Daniel: Não!
Investigadora: Tens que pensar…se não pode haver 35 rãs e meia como é que tu vais responder a isso. Com os 71 nenúfares terás grupos completos ou não?
Daniel: Uhm…E isto dos grupos repetidos (apontando ainda para a questão 5).
Investigadora: O que era um grupo repetido Daniel?
Daniel: Isto (apontando para o nenúfar, nenúfar, rã na imagem da sequência).

Investigadora: Isso é um grupo repetido. Está a perguntar, se eu tiver 71 nenúfares quantos grupos repetidos tenho?
Daniel: Ah! Já percebi.

71 nenúfares : 2 = ~~35,5~~ rãs

R: Numa sequência de 71 nenúfares haveriam 35 rãs. Como não pode ficar 35,5 de rãs tiramos do termo os rãs desse grupo. Ficava 35 grupos repetidos e um de dois nenúfares.

Figura 45. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 6 da tarefa "Nenúfares e rãs".

Investigadora: Na questão 6 riscaste 35,5. O que significa este risco?
Daniel: Que não podiam ser 35 rãs e meia.

O aluno considerou que, com 71 nenúfares, não existiriam grupos completos, ficando assim com 35 rãs. Contudo, na resposta a esta questão afirmou que ficariam 35 grupos completos e o 36º teria 2 nenúfares. Apesar de não completar o grupo de repetição, acrescenta um nenúfar ao número dado inicialmente. Para manter a mesma linha de pensamento, o aluno não deveria acrescentar nenúfares e considerar o grupo incompleto, ou ao acrescentar um nenúfar também deveria acrescentar uma rã e considerar o motivo de repetição completo.

Na questão 7 (figura 46), através da regra descoberta, o aluno encontrou o número de rãs e nenúfares existentes em 30 grupos repetidos. Contudo, esqueceu-se de referir o número total de elementos.

30 grupos repetidos → 30 rãs
60 nenúfares
1 grupo - 1 rã
1 grupo - 2 nenúfares
R: Se num grupo temos 1 rã em 30 grupos repetidos temos 30 rãs.
Se num nenúfar temos 2 nenúfares em 30 grupos repetidos temos 60 nenúfares.

Figura 46. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 7 da tarefa "Nenúfares e rãs".

Investigadora: Na questão 7 fazes 30 grupos repetidos 30 rãs. 1 grupo – 1 rã. 1 grupo – 2 nenúfares. Logo 30 rãs e 60 nenúfares. E o número total de elementos? Também pedia. Qual é o número total de elementos? Sabes?
Daniel: 90.
Investigadora: Porquê?
Daniel: Porque o número total dos elementos são as rãs mais os nenúfares. Os nenúfares são 60 e as rãs 30.

Na resolução da questão 8 optou inicialmente por um raciocínio de proporcionalidade direta, embora de forma desadequada:

Daniel: Aqui (apontando para a questão 8). Em 2 grupos há 6 elementos, duas rãs e quatro nenúfares. E 4 nenúfares é 75% dos 6 elementos. E então eu queria ver 75% de 780. Para ver quanto é que dava. Só que para não demorar tanto tempo eu pedia se podia usar a máquina de calcular?
Investigadora: Podes.

Daniel: Posso?
Investigadora: Sim
...
Investigadora: E porque estás a dividir 75 por 780?
Daniel: Não é a percentagem?
Investigadora: É?
Daniel: Não é?
Investigadora: Não sei…
…
Investigadora: Então Daniel…apagaste tudo?
Daniel: Não resultou…
Investigadora: Porquê?
Daniel: Porque deu um número com muitas casas decimais.

Apesar de se ter verificado que o aluno estava a seguir um caminho desadequado, pois os nenúfares correspondem a aproximadamente 66% dos elementos numa sequência de grupos repetidos, a investigadora optou por nada dizer de forma a não condicionar o raciocínio do aluno, deixando-o utilizar a calculadora. O aluno acabou por abandonar este raciocínio por não obter um valor que considerasse válido, pois não estava a calcular o valor da percentagem de forma correta. Se não apresentasse esses erros e tivesse concluído que os nenúfares eram $\frac{2}{3}$ dos elementos num grupo, e calculasse corretamente a percentagem correspondente, teria chegado ao valor que representava o número de nenúfares e assim poderia saber também o número de rãs. O Daniel optou então por aplicar a regra utilizada anteriormente, revelando reversibilidade no pensamento. Dividiu o total de elementos por três, encontrando o número de grupos repetidos e consequentemente o número de rãs, tendo depois multiplicado por dois para encontrar o número de nenúfares (figura 47).

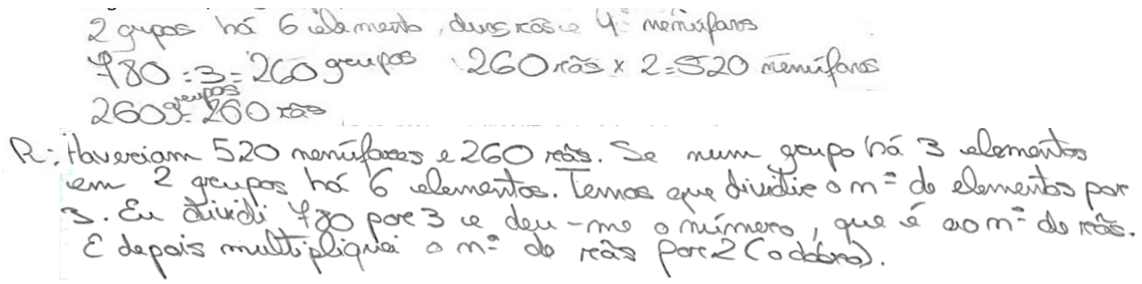

2 grupos há 6 elementos, duas rãs e 4 nenúfares
780 : 3 = 260 grupos   260 rãs x 2 = 520 nenúfares
260 grupos = 260 rãs
R: Haveriam 520 nenúfares e 260 rãs. Se num grupo há 3 elementos em 2 grupos há 6 elementos. Temos que dividir o nº de elementos por 3. Eu dividi 780 por 3 e deu-me o número, que é o nº de rãs. E depois multipliquei o nº de rãs por 2 (o dobro).

Figura 47. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 8 da tarefa “Nenúfares e rãs”.

Apesar de inicialmente não compreender o que se pretendia com a questão 9, o Daniel conseguiu traduzir as regras por palavras. Contudo, não conseguiu transpor essa informação para uma expressão algébrica que traduzisse a generalização (figura 48).

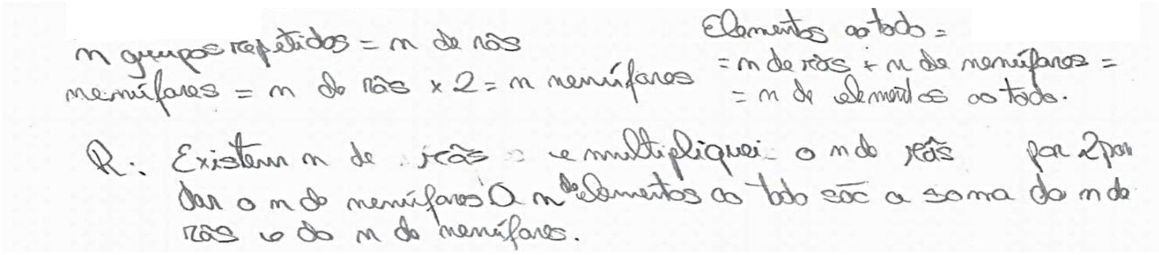


Figura 48. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 9 da tarefa "Nenúfares e rãs".

Analisando as resoluções do aluno referentes às questões 1, 5 e 8, verifica-se que apresentou, novamente, uma expressão numérica que não se adequa ao contexto explorado, demonstrando que não estabeleceu um paralelismo entre a componente numérica e a componente visual. Ao longo da tarefa, quer em questões de generalização próxima quer em questões de generalização distante, o Daniel recorreu à estratégia explícita, com exceção da questão 1 (generalização próxima) em que utilizou a estratégia *Parte Unidade com ajuste*. Conseguiu formular regras que surgiram da correta apropriação da estrutura do padrão, sendo inclusivamente capaz de evidenciar reversibilidade de pensamento. O aluno afirmou ter sentido dificuldades nas questões 6 e 8. Isso verificou-se ao longo da resolução tendo solicitado ajuda para melhor compreender as mesmas. Por fim, considerou que com esta tarefa aprendeu a resolver sequências e a "treinar" o cérebro.

Tarefa 7: Smiles

O Daniel voltou a mostrar-se empenhado na resolução da tarefa que lhe foi proposta, tendo procedido à sua resolução de forma autónoma. Mostrou-se bastante entusiasmado aquando da leitura inicial, considerando a tarefa de fácil resolução:

Daniel: Isto é fácil. Isto é mesmo fácil…

Contudo, verificou-se que ao longo da tarefa, teve algumas dificuldades pois baseou o seu raciocínio apenas no contexto numérico, desvalorizando o contexto visual. Para encontrar o número de smiles da 4.ª figura o Daniel utilizou a estratégia Recursiva. O aluno verificou que a diferença entre termos consecutivos era de 3 smiles e assim obteve o termo de ordem 4, adicionando 3 smiles ao termo anterior (figura 49).

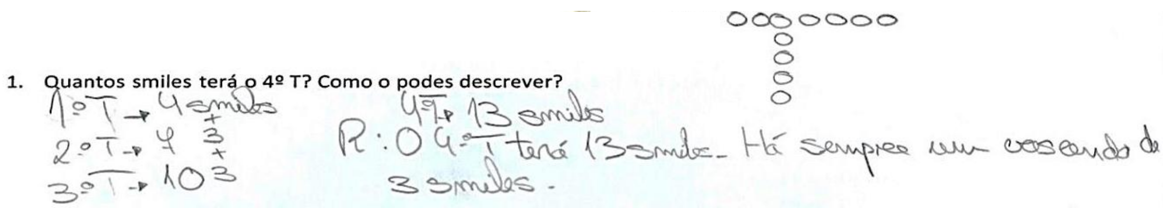
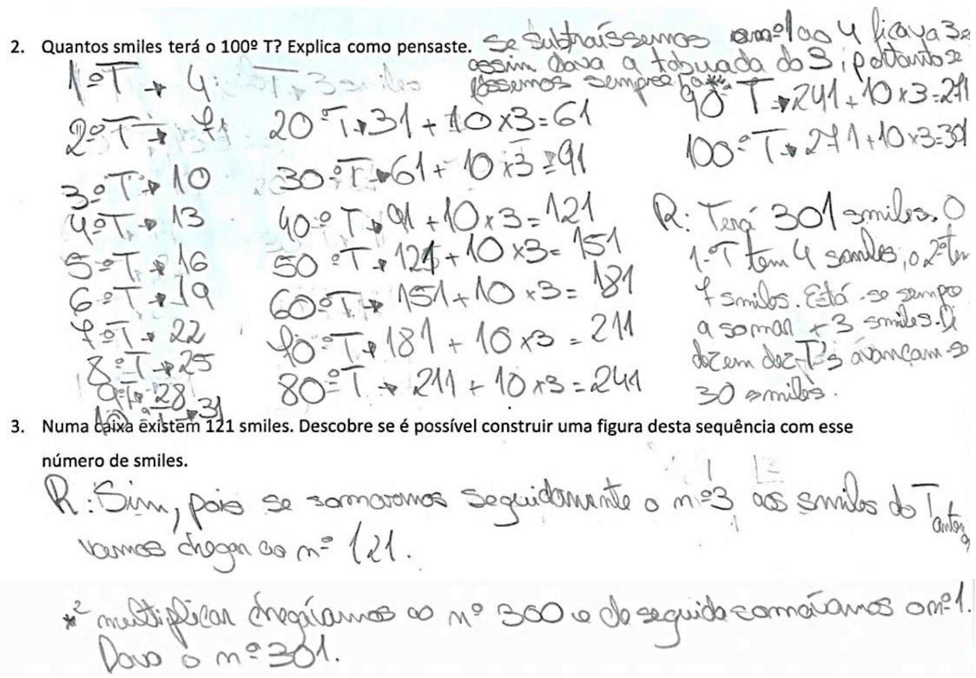


Figura 49. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 1 da tarefa "Smiles"

O aluno não descreveu a 4.ª figura, limitou-se a desenhá-la. Não se centrou na estrutura visual do padrão, tendo-se focado apenas no contexto numérico, nomeadamente na diferença entre termos consecutivos. Por esta razão, apresentou dificuldades na definição de uma estratégia para a resolução das questões de generalização distante, nomeadamente a questão 2. Apesar de a investigadora ter apelado à visualização das figuras, no sentido do aluno descobrir um modo de contagem baseado na visualização que o conduzisse à descoberta de uma expressão numérica que facilitasse a generalização distante, continuou a centrar-se no contexto numérico, usando um raciocínio recursivo.

Investigadora: Daniel apagaste tudo?
Daniel: Apaguei.
Investigadora: Porquê?
Daniel: Acho que está mal...
Investigadora: Como é que tu vês a figura?
Daniel: Como?
Investigadora: Como é que tu olhas para a figura e vês os smiles que estão aqui?
Daniel: Anda sempre três.

Nas questões 2 e 3, o Daniel continuou a recorrer à estratégia Recursiva, utilizando também a estratégia Múltiplo da diferença com ajuste. Descobriu o termo de ordem 10, continuando a sequência, e, para contornar a morosidade desta estratégia, encontrou valores para termos cuja ordem fosse um múltiplo de 10 (20, 30, 40, …) até obter o 100.º termo. Depois de encontrado o 10º termo, para determinar o 20º adicionou-lhe o número de smiles correspondente ao número de vezes que se regista a diferença, procedendo da mesma forma até obter o 100º termo (figura 50).



2. Quantos smiles terá o 100º T? Explica como pensaste. Se subtraíssemos o nº1 ao 4 ficava 3 e assim dava a tabuada do 3, portanto se fossemos sempre

1ºT → 4
2ºT → 7
3ºT → 10
4ºT → 13
5ºT → 16
6ºT → 19
7ºT → 22
8ºT → 25
9ºT → 28
10ºT → 31

20ºT → 31 + 10x3 = 61
30ºT → 61 + 10x3 = 91
40ºT → 91 + 10x3 = 121
50ºT → 121 + 10x3 = 151
60ºT → 151 + 10x3 = 181
70ºT → 181 + 10x3 = 211
80ºT → 211 + 10x3 = 241
90ºT → 241 + 10x3 = 271
100ºT → 271 + 10x3 = 301

R: Terá 301 smiles. O 1ºT tem 4 smiles, o 2ºT tem 7 smiles. Está-se sempre a somar +3 smiles. De dez em dez T's avançam-se 30 smiles.

3. Numa caixa existem 121 smiles. Descobre se é possível construir uma figura desta sequência com esse número de smiles.

R: Sim, pois se somarmos seguidamente o nº3 aos smiles do T anterior vamos chegar ao nº 121.

*² multiplicar chegávamos ao nº 300 e de seguida somávamos o nº1. Dava o nº301.

Figura 50. Resolução apresentada pelo Daniel para as questões 2 e 3 da tarefa “Smiles”

Com esta resolução, e baseando-se apenas no contexto numérico, o aluno encontrou uma regra que lhe permitiu descobrir o número de smiles para qualquer figura. Contudo, não a valorizou e não a utilizou em questões posteriores.

Investigadora: Na questão 2 fizeste em primeiro lugar este raciocínio? (apontando para o raciocínio recursivo).
Daniel: Sim.
Investigadora: E depois fizeste a resposta. E esta resposta ajudou-te a chegar ao outro raciocínio? (apontando para o raciocínio que permitia a descoberta de uma regra)
Daniel: Sim. Só depois é que descobri esse.
Investigadora: A resposta à questão 3 encontraste quando fazias a 2?
Daniel: Sim.

A estratégia utilizada na questão 2 permitiu-lhe também descobrir se seria possível construir uma figura com 121 smiles, porque este valor correspondia a um termo cuja ordem era um múltiplo de 10 (ordem 40) (figura 59), não tendo, por isso, utilizado a reversibilidade de pensamento.

Na questão 4 o aluno revelou dificuldades na manipulação simbólica e não conseguiu encontrar uma expressão algébrica que permitisse calcular o número de smiles da figura *n*, possivelmente porque na resolução das questões anteriores teve por base o raciocínio recursivo (figura 51). O Daniel poderia ter utilizado a regra encontrada na resolução da questão 2 quer nesta questão, quer na questão 3. Contudo, não o fez, possivelmente, porque não conseguiu desligar-se do raciocínio recursivo.

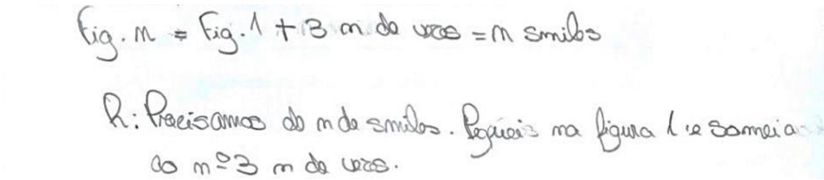
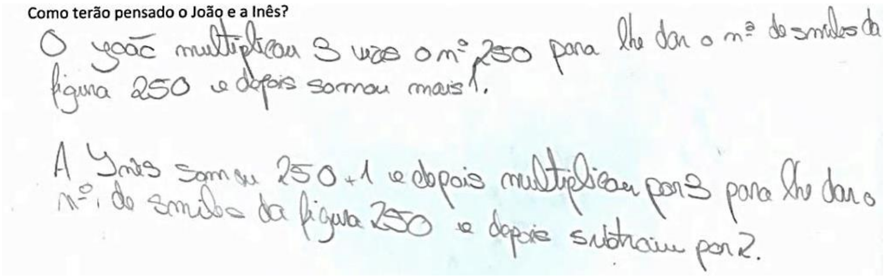


Figura 51. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 4 da tarefa "Smiles"

Investigadora: Na questão 4, quando escreves 3*n* de vezes, que operação está aqui representada?
Daniel: É a multiplicar.
Investigadora: Se na questão 2 encontraste outro raciocínio, porque não o usaste aqui?
Daniel: Qual?
Investigadora: Na questão 2 disseste que era multiplicar o número da figura por 3 e depois somavas-lhe um.
Daniel: Humm… era para usar mas… depois não usei.

O aluno não conseguiu perceber que o último raciocínio da questão 2 lhe permitiria descobrir o número de smiles para um termo de qualquer ordem, porque, mais uma vez, centrou a sua atenção apenas no contexto numérico.

O Daniel demonstrou dificuldades na visualização e no trabalho em contexto figurativo já que na questão 5 não conseguiu interpretar o significado das expressões numéricas apresentadas, tendo por base a visualização da sequência, não tendo estabelecido um paralelismo entre a componente visual e a componente numérica. O aluno tentou, apenas, fazer uma interpretação das expressões apresentadas sem as contextualizar, o que impediu a correta resolução desta questão (figura 52).


Como terão pensado o João e a Inês?

O João multiplicou 3 vezes o nº 250 para lhe dar o nº de smiles da figura 250 e depois somou mais 1.

A Inês somou 250+1 e depois multiplicou por 3 para lhe dar o nº do smiles da figura 250 e depois subtraiu por 2.

Figura 52. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 5 da tarefa “Smiles”

Ao longo da tarefa, quer em questões de generalização próxima quer em questões de generalização distante, o Daniel baseou-se num raciocínio de tipo recursivo, sendo que nas questões de generalização distante associou-lhe a estratégia múltiplo da diferença com ajuste, numa tentativa de contornar a morosidade da recursão. O aluno utilizou estratégias não visuais, suportando o seu raciocínio no contexto numérico em detrimento do contexto figurativo, o que não lhe permitiu resolver com sucesso as questões 4 e 5. Demonstrou dificuldades na visualização, não conseguindo apresentar uma expressão algébrica que traduzisse a sequência, nem interpretar o significado de expressões numéricas representativas do termo de ordem 250, baseando-se na sequência. O aluno afirmou ter sentido dificuldades na questão 5, porque não conseguia saber o que representavam as expressões e na questão 2 porque estava a ser complicado encontrar uma estratégia que considerasse válida. Estas dificuldades são normais numa situação em que o raciocínio assenta apenas no contexto numérico. Por fim, considerou que com esta tarefa aprendeu “a resolver difíceis problemas e a resolver sequências”, o que contrasta com a leitura inicial da tarefa em que o aluno a considerou como sendo muito fácil.

Tarefa 8: Os Z’s

O Daniel voltou a mostrar-se empenhado na resolução da tarefa que lhe foi proposta, tendo procedido à sua resolução de forma autónoma. Facilmente visualizou a estrutura do padrão e identificou relações entre a variável dependente e a variável independente. Ao contrário da tarefa anterior, em que apenas se baseou no contexto numérico, nesta fundamentou o seu raciocínio no contexto figurativo, valorizando a componente visual deste padrão.

O Daniel utilizou sempre a mesma estratégia, a explícita, quer na generalização próxima quer na generalização distante. O aluno aplicou uma regra representativa da relação entre as variáveis dependente e independente. Baseando-se na forma como visualizou as figuras, descobriu uma expressão numérica que lhe permitia calcular o número de quadradinhos para um termo de qualquer ordem. Identificou dois grupos com o mesmo número de quadradinhos (linha de cima e de baixo) e um quadrado central, o que corresponde a uma generalização construtiva.

Na questão 1 verifica-se que o aluno desenhou corretamente a 4.ª figura mas desenhou de forma errada a 5.ª, tendo mantido a altura invariante (figura 53). Contudo, este facto não conduziu a erros nas questões seguintes pois conseguiu identificar a estrutura do padrão e deduziu uma regra que relacionava as duas variáveis baseando-se na visualização das figuras anteriores. Analisando as expressões numéricas que o aluno apresentou para cada termo, verifica-se que na 5.ª figura a expressão numérica não corresponde à figura desenhada, correspondendo à figura de ordem 5 da sequência se tivesse sido desenhada de forma correta.

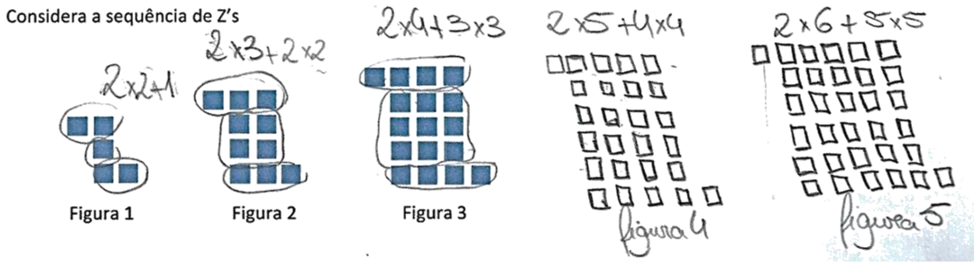


Figura 53. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 1 da tarefa "Z's"

Na questão 2 o Daniel descobriu o número de quadradinhos da 3ª figura através de uma expressão numérica, recorrendo à estratégia explícita. Visualizou a figura composta por dois conjuntos de 4 (uma linha em cima e outra em baixo) e um quadrado central de dimensões 3x3 (figura 54).

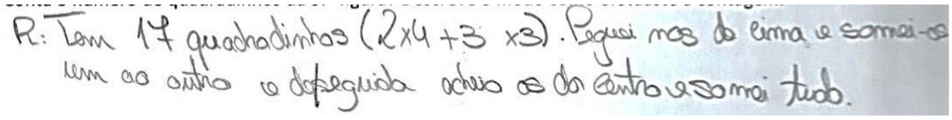
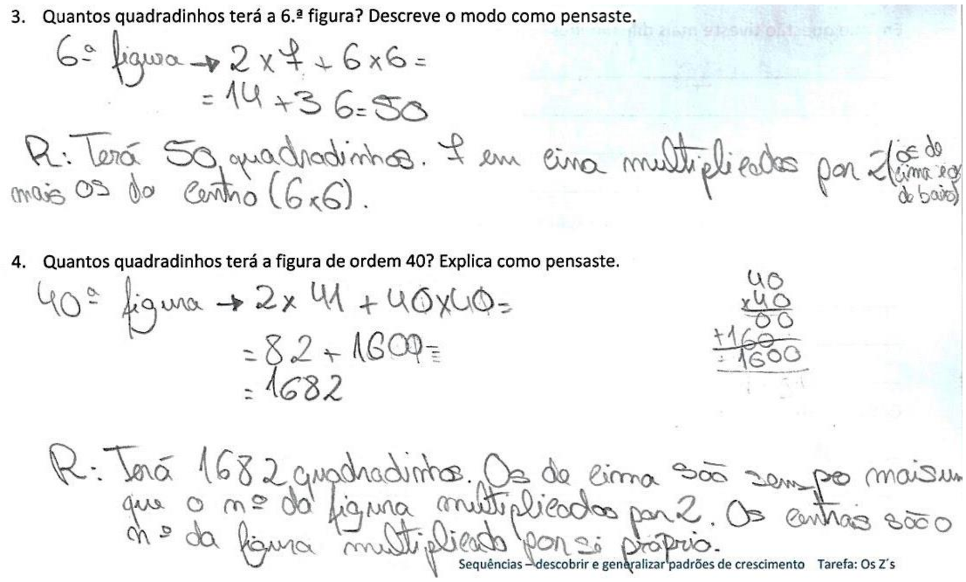


Figura 54. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 2 da tarefa "Z's"

Investigadora: Na questão 2, para saber o número de quadradinhos estiveste a contá-los ou fizeste logo desta forma (apontando para a expressão numérica), usando o cálculo?
Daniel: Logo desta (apontando para a expressão numérica).
Investigadora: Fizeste logo o cálculo.
Daniel: Dividi…
Investigadora: Dividiste em grupos e fizeste o cálculo?
Daniel: Sim.

Para encontrar o número de quadradinhos da 6.ª figura, generalização próxima, e da 40.ª figura, generalização distante, o Daniel recorreu à regra descoberta anteriormente, utilizando a estratégia explícita (figura 55).



3. Quantos quadradinhos terá a 6.ª figura? Descreve o modo como pensaste.

6.ª figura → 2 x 7 + 6 x 6 =
= 14 + 36 = 50

R: Terá 50 quadradinhos. 7 em cima multiplicados por 2 (os de cima e os de baixo) mais os do centro (6x6).

4. Quantos quadradinhos terá a figura de ordem 40? Explica como pensaste.

40.ª figura → 2 x 41 + 40 x 40 =
= 82 + 1600 =
= 1682

40
x40
00
+160
1600

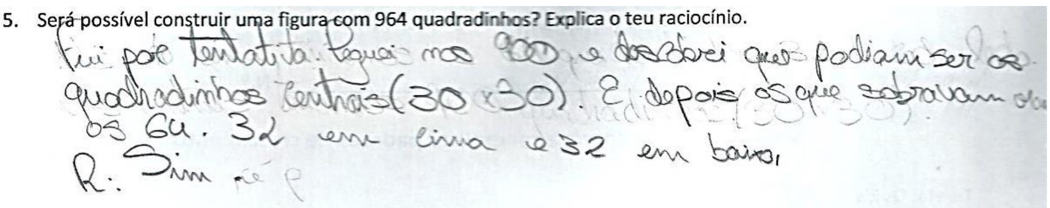
R: Terá 1682 quadradinhos. Os de cima são sempre mais um que o n.º da figura multiplicados por 2. Os centrais são o n.º da figura multiplicado por si próprio.

Sequências – descobrir e generalizar padrões de crescimento Tarefa: Os Z´s

Figura 55. Resolução apresentada pelo Daniel para as questões 3 e 4 da tarefa "Z's"

Em ambos os casos o aluno apoiou a sua resolução no contexto figurativo apresentado, descrevendo a forma como viu a figura. Na descrição do 40.º termo relacionou a figura com a ordem ocupada na sequência.

Na questão 5, o aluno utilizou a estratégia tentativa e erro, não recorrendo ao raciocínio inverso, testando valores na regra descoberta anteriormente. Olhando para o número dado, 964, verificou que o poderia decompor em 900 e 64. Assim, conseguiria obter um quadrado central de dimensões 30x30 e a linha superior e inferior com 32 quadradinhos cada. Por isso concluiu que seria possível a construção da figura (figura 56).



5. Será possível construir uma figura com 964 quadradinhos? Explica o teu raciocínio.

Fui por tentativa. Peguei nos 900 e descobri que podiam ser os quadradinhos centrais (30 x 30). E depois os que sobravam eram os 64. 32 em cima e 32 em baixo.
R: Sim

Figura 56. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 5 da tarefa "Z's"

Contudo, quando estava a expor o seu raciocínio à turma, aquando da discussão final da tarefa, o aluno compreendeu que tinha um erro na sua forma de pensar e que por isso a sua conclusão não estava correta.

> Investigadora: (Após o Daniel ter explicado o seu raciocínio e ter afirmado ser possível construir a figura) Qual é o número de ordem da figura?
> S.G.: O número de ordem?
> Daniel: É 30.
> Investigadora: Porquê?
> Daniel: Por causa do quadrado central.
> Investigadora: Porque o quadrado central tem dimensões 30x30.
> Daniel: Ó professora… mas os das linhas é sempre mais um e neste caso é mais dois…

Investigadora: Sim. Tens aqui qualquer coisa mal… Não é possível! Tens o raciocínio correto mas chegas a uma conclusão errada. Mas tu próprio encontraste o erro.

O aluno encontrou valores que poderia aplicar na regra descoberta, contudo precipitou-se na parte final o que o levou a uma conclusão errada. Na verdade, não era possível construir uma figura com 364 quadradinhos porque se o quadrado central tem dimensões 30x30, a linha superior e inferior teriam que ter 31 quadradinhos cada pois têm mais um quadradinho que o lado do quadrado central.

Apesar de, ao longo da tarefa o Daniel ter utilizado a estratégia explícita e de na questão 4 (figura 55) ter relacionado o número de quadradinhos com a ordem da figura, apresentou um erro na expressão algébrica (figura 57). Como se verifica nas questões anteriores, o aluno compreendeu que a linha superior e inferior têm mais um quadradinho que a ordem da figura. Contudo, não foi capaz de traduzir isso numa expressão algébrica.

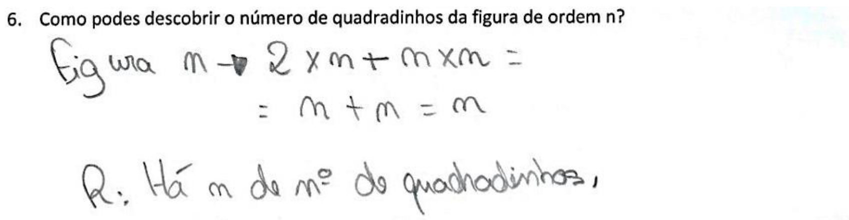

6. Como podes descobrir o número de quadradinhos da figura de ordem n?

Figura $n \rightarrow 2 \times n + n \times n =$
$= n + n = n$

R: Há n de nº de quadradinhos,

Figura 57. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 6 da tarefa "Z's"

Aquando da resolução da tarefa, o aluno pensava que a mesma letra na mesma expressão poderia representar valores diferentes, como se pode comprovar pelo que referiu aquando da discussão da tarefa, tendo por isso representado o número de quadradinhos das linhas e do lado do quadrado central com *n*.

Daniel: (após a apresentação da expressão algébrica $2 \times (n + 1) + n \times n$ na discussão final) É $n + 1$ professora?
Investigadora: Sim.
Daniel: Professora… o primeiro *n* se pusermos outro *n* à frente, o segundo *n* é o mesmo *n* do primeiro?
Investigadora: É.
Daniel: É o mesmo número?
Investigadora: Quando é a mesma letra representa o mesmo número.
Daniel: Ah… Pensava que não. Se não fosse assim não era preciso por o mais um…

Aquando da realização da tarefa o aluno revelou dificuldades na manipulação simbólica. No entanto, pela entrevista verifica-se que, através da discussão da tarefa, o aluno compreendeu que não poderia representar valores diferentes com a mesma letra.

Investigadora: Porque é que na questão 6 tentas resolver a expressão?
Daniel: Para ser mais fácil.
Investigadora: Achavas que havia necessidade de resolver a expressão?
Daniel: Sim.
Investigadora: Pensa… $2 \times \mathrm{n}$ é n?
Daniel: Não.

Investigadora: E $n \times n$ é n?
Daniel: Não.

Ao longo da resolução desta tarefa, ao contrário da anterior, o Daniel recorreu à estratégia explícita, usando assim uma estratégia de natureza visual, tendo baseado o seu raciocínio no contexto figurativo, o que se revelou favorável na correta resolução da mesma. Apresenta-se como exceção a questão 5 em que recorreu à estratégia tentativa e erro, estratégia de natureza não visual, não utilizando a reversibilidade de pensamento para descobrir se era possível construir uma figura com 964 quadradinhos. Porém, pode-se afirmar que, neste caso, a visualização e apresentou como elemento facilitador da resolução da tarefa e do desenvolvimento do pensamento algébrico. O aluno afirmou não ter sentido dificuldades devido à estratégia que utilizou. Por fim, quando questionado sobre o que aprendeu, salientou a importância da estratégia escolhida para ter sucesso na resolução de tarefas que envolvam sequências.

Tarefa 9: Os lugares

Tal como nas tarefas anteriores, o Daniel mostrou-se motivado e empenhado na resolução desta tarefa, tendo procedido à sua resolução de forma autónoma. O aluno visualizou a estrutura do padrão e identificou relações entre a variável dependente e a variável independente, tendo baseado o seu raciocínio no contexto figurativo.

O Daniel, como na tarefa "Z's", utilizou a estratégia explícita, quer em questões de generalização próxima quer em questões de generalização distante, identificando uma regra que relacionava as variáveis dependente e independente. Salienta-se o facto de ter sido o único aluno da turma a utilizar esta estratégia. Identificou cada fila como sendo constituída por múltiplos de três mais um, resultante da decomposição do padrão em partes disjuntas, o que corresponde a uma generalização construtiva (figura 58).

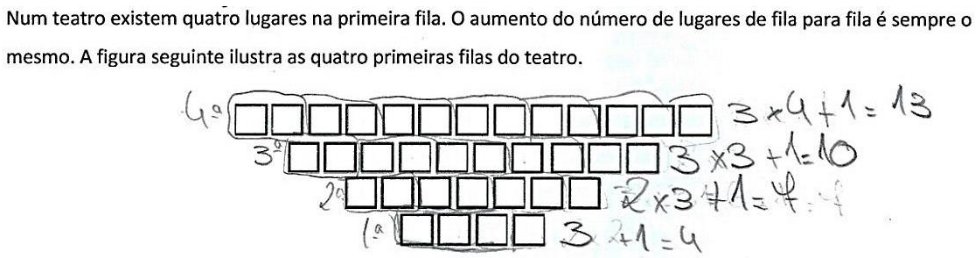
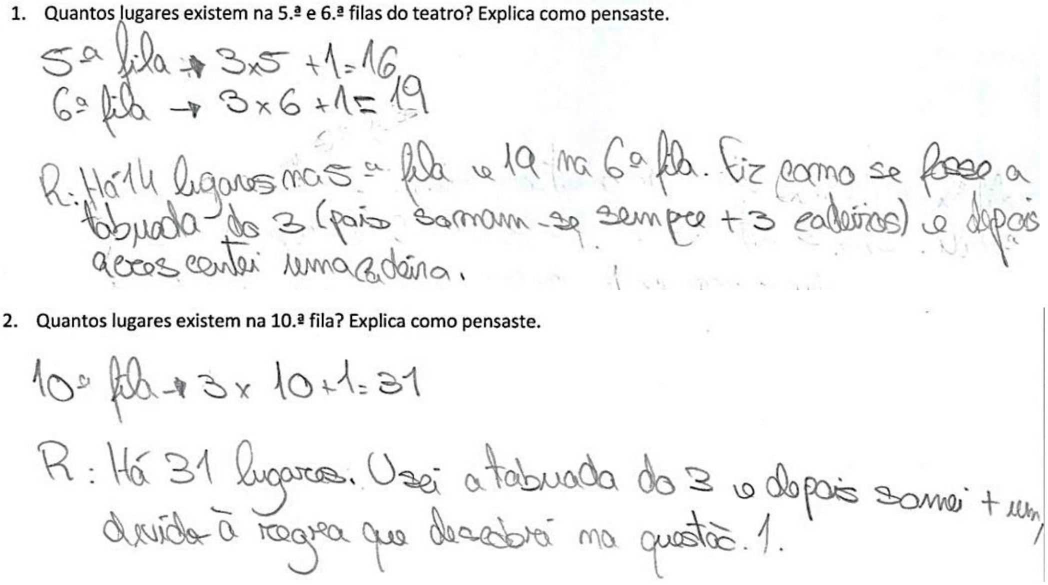


Figura 58. Análise da figura da tarefa "Os lugares" realizada pelo Daniel

O aluno descobriu o número de lugares da 5.ª fila, da 6.ª fila (questão 1) e da 10.ª fila (questão 2), questões de generalização próxima, aplicando a regra descoberta através da análise da figura em que relaciona o número de lugares com a ordem da fila, recorrendo assim à estratégia explícita. Reconheceu que o número total de lugares de uma fila resulta da soma de um com um múltiplo de três. Esse múltiplo é obtido multiplicando a ordem, ou seja o número da fila, por três. Assim, para descobrir o número de lugares da 5.ª fila, multiplicou 5 por 3 adicionando de seguida 1 (figura 59).



1. Quantos lugares existem na 5.ª e 6.ª filas do teatro? Explica como pensaste.

5ª fila → 3x5 +1=16
6ª fila → 3x6 +1= 19

R: Há 14 lugares na 5ª fila e 19 na 6ª fila. Fiz como se fosse a tabuada do 3 (pois somam-se sempre +3 cadeiras) e depois acrescentei uma cadeira.

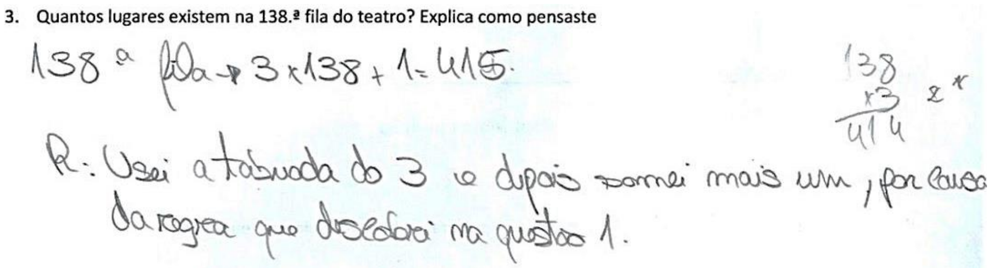
2. Quantos lugares existem na 10.ª fila? Explica como pensaste.

10ª fila → 3 x 10+1= 31

R: Há 31 lugares. Usei a tabuada do 3 e depois somei + um, devido à regra que descobri na questão 1.

Figura 59. Resolução apresentada pelo Daniel para as questões 1 e 2 da tarefa "Os lugares"

Na questão 3, de generalização distante, o aluno também utilizou a estratégia explícita para encontrar o número de lugares da 138.ª fila. Usou a mesma regra das questões 1 e 2, relacionando as variáveis dependente e independente, o que lhe permitiria descobrir o número de lugares de qualquer fila (figura 60).



3. Quantos lugares existem na 138.ª fila do teatro? Explica como pensaste

138ª fila → 3x138 + 1= 415.

138
x3
414

R: Usei a tabuada do 3 e depois somei mais um, por causa da regra que descobri na questão 1.

Figura 60. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 3 da tarefa "Os lugares"

Analisando as expressões numéricas que o Daniel apresentou, verifica-se que, junto à figura, parte delas traduzem o contexto apresentado (figura 58). Contudo, na resolução das diversas questões, continuaram a surgir situações em que a expressão não correspondia completamente à interpretação do contexto explorado (figuras 58 e 59). O aluno, apesar de compreender a estrutura do padrão e de ser capaz de formular expressões numéricas, não atribuiu significado diferente à mudança de ordem dos fatores envolvidos na multiplicação.

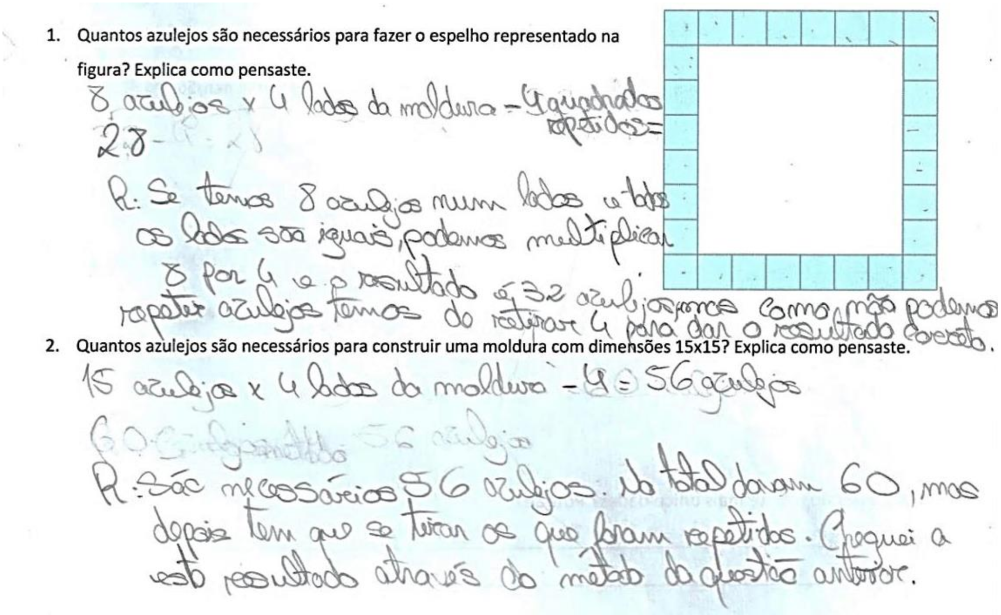
Ao longo da resolução desta tarefa, o Daniel recorreu à estratégia explícita, usando assim uma estratégia de natureza visual, tendo baseado o seu raciocínio no contexto figurativo, o que se revelou favorável na correta resolução da mesma. Mais uma vez, a visualização constituiu um meio facilitador da resolução da tarefa, assim como do desenvolvimento do pensamento algébrico. Tal como na tarefa anterior, o aluno afirmou não ter sentido dificuldades devido à estratégia que utilizou. Considera que, com esta tarefa, aprendeu estratégias que permitem resolver problemas com padrões.

Tarefa 10: A moldura

O Daniel voltou a mostrar-se motivado e empenhado na resolução desta tarefa, tendo procedido à sua resolução de forma autónoma. Visualizou a estrutura do padrão e identificou relações entre a variável dependente e a variável independente, tendo baseado o seu raciocínio no contexto figurativo.

Utilizou a estratégia explícita, quer em questões de generalização próxima quer em questões de generalização distante, identificando uma regra que relacionava as variáveis dependente e independente. Identificou em cada moldura quatro conjuntos com o mesmo número de azulejos, correspondente às dimensões do quadrado, subtraindo posteriormente os azulejos sobrepostos (os cantos da moldura), correspondendo assim a uma generalização de natureza desconstrutiva, sendo a primeira vez que utilizou uma estratégia desta natureza.

O aluno descobriu o número de azulejos para as figuras de dimensões 8x8 (questão 1) e de dimensões 15x15 (questão 2), questões de generalização próxima, aplicando a regra descrita, que surgiu da análise da figura, relacionando o número de azulejos com as dimensões da moldura, recorrendo assim à estratégia explícita. Concluiu que a figura era composta por quatro conjuntos com o mesmo número de azulejos que a dimensão da moldura, retirando os que já tinham sido contemplados nesta contagem. Assim, para descobrir o número de azulejos da moldura de dimensões 8x8 multiplicou 8 por 4 subtraindo de seguida 4 (figura 61).


1. Quantos azulejos são necessários para fazer o espelho representado na figura? Explica como pensaste.

8 azulejos x 4 lados da moldura - 4 quadrados repetidos =
28

R: Se temos 8 azulejos num lados e todos os lados são iguais, podemos multiplicar 8 por 4 e o resultado é 32 azulejos, mas como não podemos repetir azulejos temos de retirar 4 para dar o resultado correto.

2. Quantos azulejos são necessários para construir uma moldura com dimensões 15x15? Explica como pensaste.

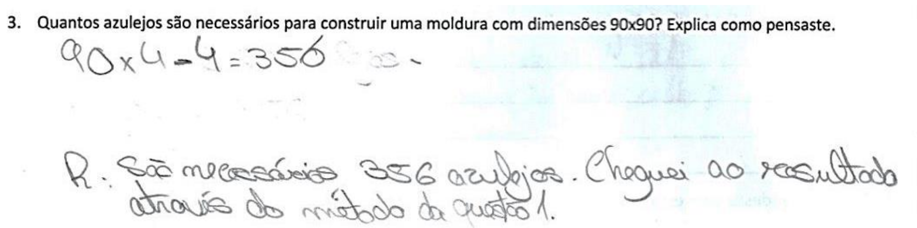
15 azulejos x 4 lados da moldura - 4 = 56 azulejos

R: São necessários 56 azulejos. No total davam 60, mas depois tem que se tirar os que foram repetidos. Cheguei a esto resultado através do método da questão anterior.

Figura 61. Resolução apresentada pelo Daniel para as questões 1 e 2 da tarefa "A moldura"

Verifica-se que o contexto figurativo foi preponderante no sucesso da resolução desta tarefa. A análise do padrão figurativo permitiu ao aluno compreender a sua estrutura e deduzir uma regra que lhe permitiu descobrir o número de azulejos da moldura.

Na questão 3 (figura 62), de generalização distante, o Daniel também utilizou a estratégia explícita para descobrir o número de azulejos da figura de dimensões 90x90. Usou a regra descoberta anteriormente, já aplicada para a descoberta do número de azulejos de uma moldura de dimensões 8x8 (questão 1) e de uma moldura de dimensões 15x15 (questão 2), relacionando as variáveis dependente e independente, o que lhe permitiu descobrir o número de azulejos de uma moldura de quaisquer dimensões.


3. Quantos azulejos são necessários para construir uma moldura com dimensões 90x90? Explica como pensaste.

90x4-4=356

R. São necessários 356 azulejos. Cheguei ao resultado através do método da questão 1.

Figura 62. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 3 da tarefa "A moldura"

Na questão 4, que implicava a generalização distante e a reversibilidade de pensamento, o Daniel não foi capaz de aplicar a regra descoberta anteriormente, não revelando reversibilidade no pensamento. O aluno conseguiu resolver de forma correta esta questão, recorrendo à estratégia explícita e baseando o seu raciocínio nas resoluções das questões anteriores. Observando a resolução das questões 1, 2 e 3, verificou que o número total de azulejos de cada moldura correspondia ao produto de 4 pela diferença entre o valor da dimensão do lado do quadrado e um. Por exemplo, para a figura de dimensões 8x8, o número de azulejos é dado por $4 \times (8 - 1)$. Assim, dividiu o número de azulejos dado por 4 encontrando o valor 105, concluindo que era possível construir uma moldura com 420 azulejos que corresponderia às dimensões 106x106 (figura 63).

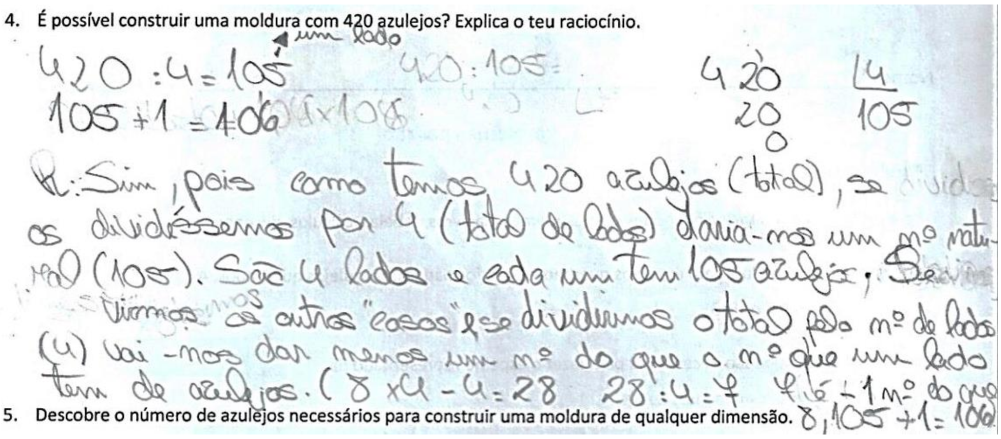


Figura 63. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 4 da tarefa "A moldura"

O Daniel conseguiu elaborar uma expressão algébrica que traduzia a generalização (questão 5), revelando evolução na manipulação simbólica (figura 64).

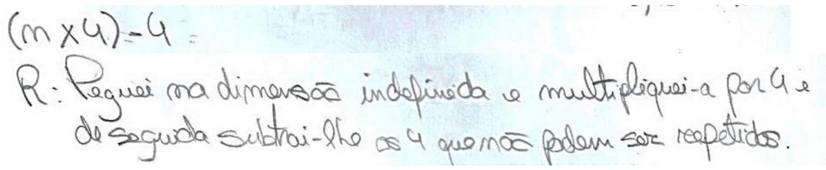


Figura 64. Resolução apresentada pelo Daniel para a questão 5 da tarefa "A moldura"

Analisando as expressões numéricas que o Daniel apresentou, verifica-se que continuaram a surgir situações em que a expressão numérica não correspondia completamente à interpretação do contexto explorado (figuras 61, 62, 63 e 64). Apesar de compreender a estrutura do padrão e de ser capaz de formular expressões numéricas, não atribuiu significado diferente à mudança de ordem dos fatores envolvidos na multiplicação.

Ao longo da resolução desta tarefa, o Daniel recorreu à estratégia explícita, usando assim uma estratégia de natureza visual, tendo baseado o seu raciocínio no contexto figurativo, o que se revelou favorável na correta resolução da mesma. Mais uma vez, a visualização apresentou-se um meio facilitador da resolução da tarefa, assim como do desenvolvimento do pensamento algébrico. Pela primeira vez visualizou a figura tendo por base uma generalização desconstrutiva. Tal como na tarefa anterior, o aluno afirmou não ter sentido dificuldades devido à estratégia que utilizou. Considerou que, com esta tarefa, aprendeu a resolver problemas que envolvem padrões.

Síntese

O Daniel revelou-se empenhado e interessado ao longo das sessões de exploração das tarefas. Nas tarefas de Contagens Visuais recorreu a estratégias de natureza visual, envolvendo, quase sempre, o subitizing conceptual. Viu, com facilidade, diferentes agrupamentos nas figuras, conseguindo obter expressões numéricas equivalentes. Nas tarefas de sequências e problemas com padrões, o Daniel recorreu a várias estratégias: recursiva, parte unidade, múltiplo da diferença, tentativa e erro e explícita. Revelou preferência pela generalização construtiva, apesar de também ter recorrido à generalização desconstrutiva na tarefa *A moldura*. O Daniel revelou dificuldades na análise da estrutura do padrão apenas na tarefa *Smiles,* baseando-se no contexto numérico, tendo, por isso, revelado mais dificuldades na resolução desta tarefa. Nas restantes, recorreu a estratégias de natureza visual, sendo capaz de analisar a estrutura do padrão e relacionar as variáveis dependente e independente, elaborando uma regra que traduzia a generalização. Apesar de inicialmente ter revelado algumas dificuldades, conseguiu formular expressões algébricas que traduzissem a generalização, revidenciando evolução na manipulação simbólica.

CAPÍTULO VI – O CASO ANDRÉ

Neste capítulo descreve-se, de forma detalhada, a participação do André, um dos alunos que integrou este estudo. Depois de apresentar as suas características pessoais e académicas, analisa-se o trabalho desenvolvido pelo aluno ao longo da exploração das tarefas propostas.

Caracterização do André

No início do ano letivo o André tinha 11 anos. Reside com os pais e três irmãos com 7, 9 e 22 anos numa freguesia que faz fronteira com a freguesia onde se localiza a Escola. Desloca-se para a Escola de autocarro demorando cerca de 20 minutos a realizar o percurso. O pai tem como habilitações académicas o 2.º ciclo do Ensino Básico e a mãe não frequentou a escola. O André frequentava o Desporto Escolar, nomeadamente a modalidade de Badminton, atividade extracurricular promovida pela Escola. Nos tempos livres gostava de ler, ver televisão e de jogar futebol. No seu percurso escolar não apresentava retenções e, quanto ao seu futuro, ambicionava concluir o Ensino Secundário. Recorria à biblioteca escolar por iniciativa própria, para ler, fazer trabalhos e estudar. As suas disciplinas preferidas eram a Matemática e as Ciências da Natureza porque, segundo ele, "não é difícil de perceber a matéria".

Tratava-se de um aluno de desempenho médio mas que revelava algumas dificuldades e apresentava nível 3 a Matemática. Quando questionado sobre o que é para si a Matemática dizia ser uma disciplina normal. Afirmava gostar da disciplina de Matemática porque gostava do professor e acrescentava que gostava de desenhar na parte da Geometria. Perante uma tarefa matemática afirmava sentir-se normal. O que mais gostava de fazer nas aulas de Matemática era "fazer exercícios" e o que menos gostava era "quando é para arrumar".

Em traços gerais, tratava-se de um aluno sossegado e pouco falador, que participava mas que tinha de ser estimulado para o fazer. Conseguia transmitir as suas ideias e justificar os seus raciocínios. Apesar de ser envergonhado, colocava as suas dificuldades e dúvidas. Era um aluno atento mas que revelava falta de trabalho, sendo também um pouco desorganizado, o que não o favorecia nas dificuldades que sentia. O André era simpático, tímido e apresentava uma boa relação com os colegas.

Exploração das tarefas

Nesta secção apresenta-se o trabalho desenvolvido pelo André ao longo da implementação das tarefas, sendo feita uma análise com incidência nas estratégias utilizadas e nas dificuldades reveladas.

Tarefa 1: Qual tem mais estrelas?

O André realizou o trabalho de forma autónoma, mostrando-se motivado e empenhado na resolução da tarefa. Contudo, demorou um pouco mais de tempo do que a maioria da turma, tendo sido mesmo o último a terminar. Isto poderá estar relacionado com a forma como organizou os resultados já que recorreu a uma tabela, tendo sido o único a usar esta estratégia. Esta escolha relacionou-se apenas com uma opção de organização dos dados referentes aos diferentes padrões visualizados em cada cartão.

Investigadora: Porque usaste a tabela?
André: Como dividi os grupos para depois contar e para meter aqui em baixo os resultados (apontando para a última linha da tabela).

O André utilizou subitizing conceptual para determinar o número de estrelas, reconhecendo padrões em cada cartão decompondo o todo em partes (figura 65).

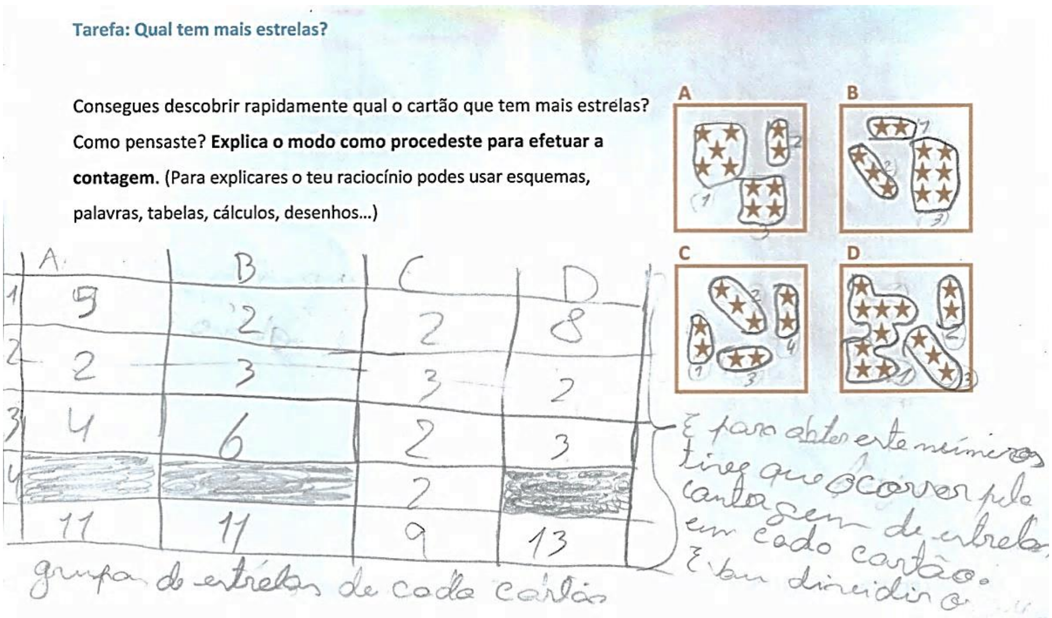


Figura 65. Resolução da tarefa “Qual tem mais estrelas” apresentada pelo André.

O aluno optou por identificar as diferentes partes com números que não correspondem ao número de elementos de cada parte, apenas serviram para indicar a linha correspondente na tabela construída.

Pode-se considerar que o André recorreu a estratégias de natureza visual já que as imagens foram fundamentais para encontrar a solução, tendo formado agrupamentos com base na disposição das estrelas nos cartões. Formou conjuntos que, segundo ele, via sem ter a necessidade de contar o número de elementos desses grupos:

> Investigadora: Por que agrupaste as estrelas desta forma?
> André: Tentei ver o maior número em que conseguia agrupar.
> Investigadora: E por que agrupaste no cartão A em 5, em 2 e em 4? (silêncio 10 segundos) Por que não fizeste outros grupos, por exemplo, de 3, de 2… por que agrupaste assim (apontando para o cartão A)?
> André: A olhar assim como se isto não tivesse nada vi logo que tinha um grupo de 2, de 5 e de 4.
> Investigadora: Então nem precisaste de as contar, viste logo estes grupos.
> André: Sim.

O André referiu que o cartão em que demorou mais tempo a efetuar a contagem foi o D porque era aquele em que existiam mais estrelas, enquanto que o cartão em que efetuou a contagem mais rapidamente foi o C porque tinha menos estrelas, sublinhando que não sentiu dificuldades na resolução da tarefa. Apesar do aluno reconhecer padrões nos diferentes cartões não os associou a padrões tradicionais como os usados nos dados e no dominó.

Tarefa 2: Dados

Na resolução desta tarefa, o André voltou a utilizar uma estratégia que mais nenhum aluno na turma o fez. Organizou os dados verticalmente e formou novos agrupamentos obtendo três colunas com três dados em cada uma (figura 66). Nesta fase o aluno recorreu ao subitizing conceptual obtendo o terceiro dado de cada novo conjunto (o todo) através da composição de outros dois (as partes). Posteriormente recorreu ao subitizing percetual ao reconhecer automaticamente o número de pintas cada dado.

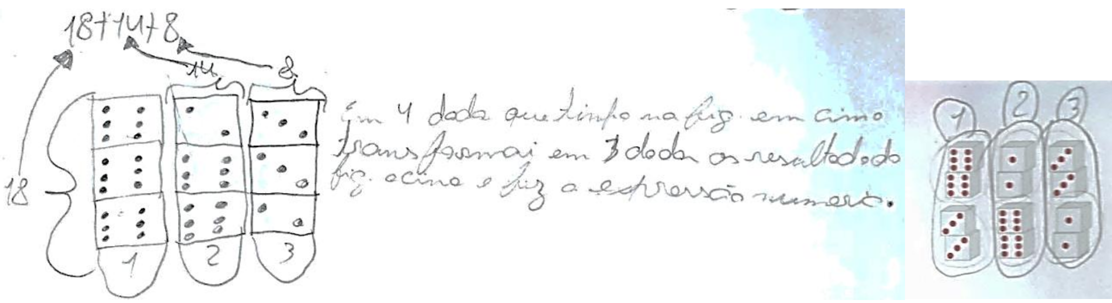


Figura 66. Resolução da tarefa "Dados" apresentada pelo André.

Tal como na tarefa anterior (*Qual tem mais estrelas?* – Anexo 4), o André utilizou estratégias de contagem visuais já que formou agrupamentos com base nas imagens observadas, que foram fundamentais para a resolução desta tarefa. Agrupou os dados na tentativa de obter o mesmo valor de pintas e o mesmo número de linhas e colunas.

Investigadora: Tinhas conjuntos de quatro dados na vertical e depois organizaste em conjuntos de três dados na vertical. Por que fizeste isso?
André: Eu fiz assim, como tinha estes dois de seis (apontando para os dois dados com seis pintas que estavam na primeira coluna), fiz mais este que era de seis (apontando para os dois dados com três pintas na primeira coluna) e organizei assim, seis, seis, seis.
Investigadora: Querias ficar com conjuntos iguais?
André: Sim.
Investigadora: E na segunda coluna?
André: Fiz seis, seis (apontando para os dois dados com seis pintas na segunda coluna) e fiz um de dois (apontando para os dois dados com uma pinta na segunda coluna).
Investigadora: E aqui? (apontando para a terceira coluna)
André: Tinha estes dois de três (apontando para os dois dados com três pintas cada da na terceira coluna) e depois agrupei estes (apontando para os dois dados com uma pinta cada da na terceira coluna)
Investigadora: Nos dados da primeira coluna, quando apareceu três e três no teu esquema colocaste como sendo seis. Por que é que não fizeste o mesmo nos dados que estavam na terceira coluna e tinham os mesmos valores?
André: Era para manter o número de dados.

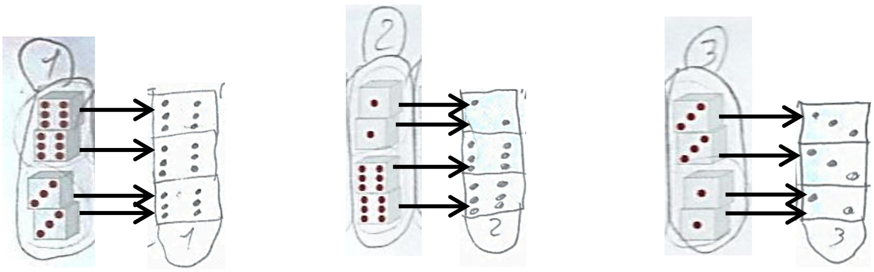


Figura 67. Esquema dos agrupamentos formados pelo André.

O aluno também recorreu aos dobros mas apenas em alguns dados. Através da expressão numérica apresentada, $18 + 14 + 8$, verifica-se que o aluno visualizou a figura segundo uma disposição vertical, adicionando as pintas por colunas.

Quando questionado sobre a possibilidade de encontrar outras formas de resolução, apresentou uma solução em que visualizou a figura numa disposição horizontal.

Investigadora: Quando estavas a fazer só viste esta forma de agrupar ou encontraste outras?
André: Encontrava, fazendo de 4 filas. Aqui assim, assim… (apontando com o dedo para as linhas e fazendo-o deslocar pelas 4 linhas).
Investigadora: Fazias $6 + 1 + 3 + 6 + 1 + 3$ ….
André: Sim.

Para descobrir o número total de pintas, nos dois raciocínios apresentados, o André utiliza subitizing conceptual pois reconhece o padrão como a composição das partes.

Verifica-se, que ao contrário da maioria da turma, o André não recorreu aos dobros em nenhuma das situações apresentadas. O aluno referiu que não teve dificuldades na resolução da tarefa.

Tarefa 3: Os grãos de café

O André realizou o trabalho de forma autónoma, mostrando-se motivado e empenhado na resolução da tarefa. Para determinar o número de grãos de café, utilizou subitizing conceptual, reconhecendo padrões que permitiram decompor o todo em partes (figura 68). Recorreu assim a estratégias de contagem visuais pois a distribuição dos grãos de café influenciaram a visualização, sendo determinante na formulação das expressões numéricas.

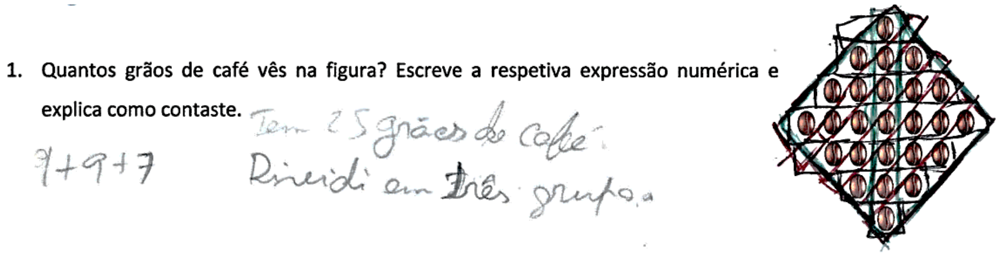


Figura 68. Resolução da questão 1 da tarefa "Os grãos de café" apresentada pelo André.

Na resolução da primeira questão apresentou uma imagem bastante confusa. Deste modo, aquando da entrevista, foi pedido ao aluno que clarificasse os esquemas realizados na figura, usando as mesmas cores. O André apresentou o seguinte esquema (figura 69):

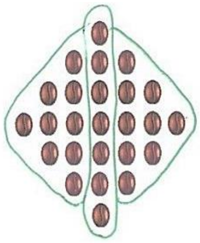


Figura 69. Esquema apresentado pelo André na entrevista (questão 1 da tarefa "Os grãos de café").

Verifica-se que nesta abordagem inicial, ao contrário da maioria dos alunos, o Daniel não visualizou a figura numa disposição linear mas por grupos, na vertical, mantendo a coluna central e formando conjuntos com os restantes elementos. Esta distribuição não foi vista de forma aleatória, a esta forma de ver a figura está subjacente a ideia de simetria.

Na questão 2 o André apresentou duas formas diferentes de ver a figura (figura 70).

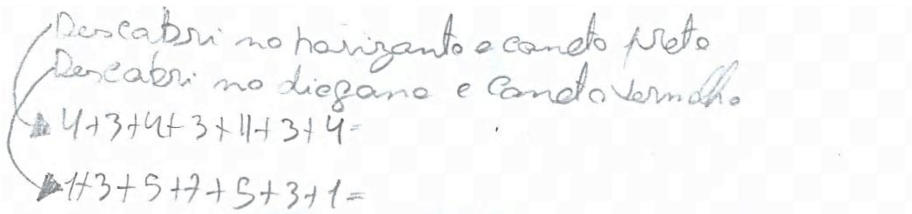


Figura 70. Resolução da questão 2 da tarefa "Os grãos de café" apresentada pelo André.

Na questão 2, tal como a maioria dos alunos, visualizou a figura numa disposição linear na horizontal e na diagonal (figura 71). Na entrevista, foi-lhe pedido novamente que clarificasse o esquema elaborado, usando as mesmas cores (figura 71).

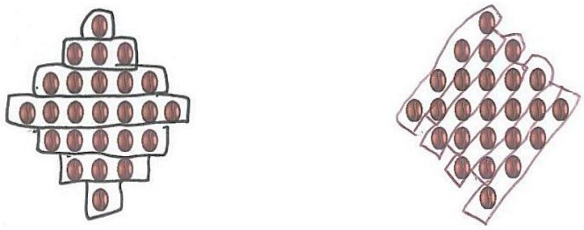


Figura 71. Esquema da disposição linear na horizontal e na diagonal, respetivamente, apresentado pelo André na entrevista.

O aluno enganou-se ao fazer a correspondência entre a expressão numérica e a respetiva cor na imagem (figura 70 e 71). Parece que o próprio André se confundiu com os esquemas que apresentou na questão 2. Não estamos perante um erro de interpretação ou de desfasamento entre o contexto numérico e visual. Trata-se apenas de uma distração por parte do aluno.

Na terceira questão o aluno concluiu que "as duas dão o mesmo resultado". Verifica-se que o André apenas referiu que as expressões numéricas representavam o número 25, sem estabelecer uma relação com a contagem e com as diferentes formas de ver a mesma figura.

Tal como a maioria da turma, o aluno referiu que não teve dificuldades na resolução desta tarefa. Considerou que a primeira expressão numérica permitiu descobrir mais rapidamente o número total de grãos de café, sendo também aquela em que se revelou mais fácil efetuar a contagem. Verifica-se que esta expressão numérica corresponde a uma visualização por grupos na vertical, em que está subjacente a ideia de simetria (figuras 68 e 69):

> Investigadora: Na questão 1, esta foi a primeira forma que tu viste a figura ou foi a que optaste por fazer em primeiro lugar?
> André: Foi a que vi.
> Investigadora: Foi a que viste em primeiro lugar.
> André: Sim.
> Investigadora: Qual das formas é mais fácil de observar, a que viste em primeiro lugar ou as outras?
> André: A que vi em primeiro lugar.

Salienta-se a continuidade no pensamento do Daniel, já que a expressão que considerou mais rápida para calcular o número total de grãos de café correspondeu à forma que considerou como mais fácil de contar e à visualização da figura, que refere como sendo a primeira que observou e a mais fácil de ver.

Tarefa 4: Os berlindes do Carlos

O André, tal como nas tarefas anteriores, mostrou-se motivado e empenhado, tendo realizado o trabalho de forma autónoma sem colocar dúvidas. O aluno utilizou o subitizing conceptual para encontrar o número de berlindes, reconhecendo padrões que permitiram decompor o todo em partes (figura 72).

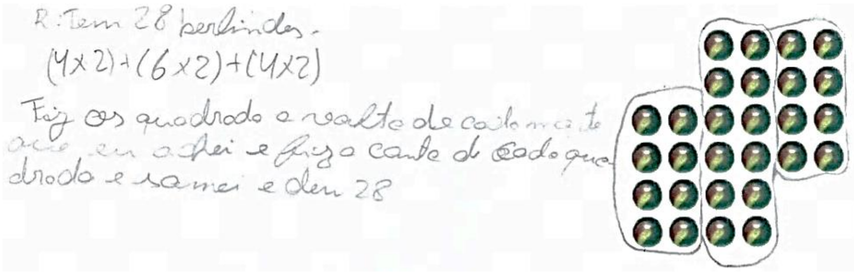


Figura 72. Resolução da questão 1 da tarefa "Os berlindes do Carlos" apresentada pelo André.

Apesar de na figura o André ter destacado três retângulos, a interpretação que faz da mesma relaciona-se com a disposição linear dos berlindes na vertical em quatro filas de 4 elementos e duas filas de 6 elementos.

Pela primeira vez, o aluno apresentou uma expressão numérica que não se adequa ao contexto exposto. Identificou dois conjuntos com igual número de elementos em cada agrupamento formado mas, ao traduzir essa ideia através da expressão numérica, representou 4 conjuntos de 2 e seis conjuntos de 2 evidenciando que não estabeleceu um paralelismo entre a componente visual e a componente numérica. Esta situação poderá dever-se ao facto de o aluno estar habituado a trabalhar em contexto numérico em que, segundo a propriedade comutativa, a ordem dos fatores não altera o valor do produto, revelando estar habituado a manipular os números de forma descontextualizada, o que é o caso nesta situação.

Na questão 2 o André apresentou três formas diferentes de ver o conjunto de berlindes (figura 73 e 74), formando grupos com o mesmo número de elementos: (1) Disposição retangular formando sete grupos de 4 elementos, ou seja, quadrados com dimensões 2x2 (representado a lápis); (2) Dois grupos de 14 elementos (representado a preto); (3) Catorze grupos de 2 elementos (representado a verde).

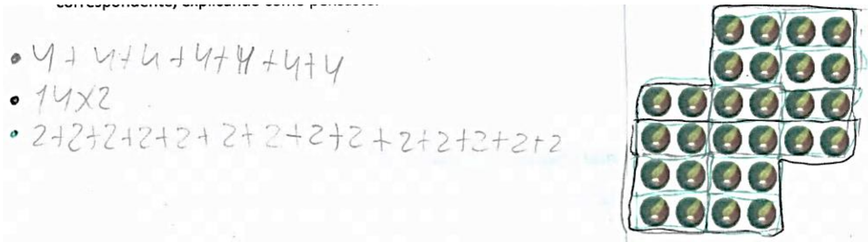


Figura 73. Resolução da questão 2 da tarefa "Os berlindes do Carlos" apresentada pelo André.

Na entrevista, foi-lhe pedido que clarificasse o esquema elaborado, usando as mesmas cores do seu registo (figura 74).

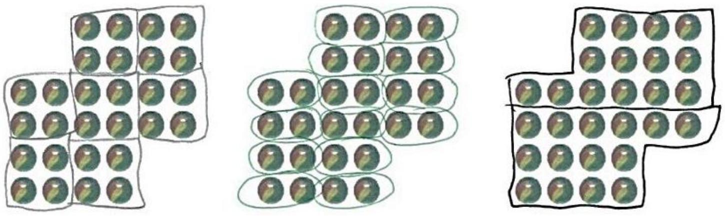


Figura 74. Esquema da questão 2 da tarefa "Os berlindes do Carlos" apresentada pelo André na entrevista.

Analisando as expressões numéricas, verifica-se que 14×2 não corresponde ao contexto figurativo apresentado pelo aluno (esquema representado a preto na figura 3), ou seja, dois conjuntos com 14 berlindes. O aluno representou, através da expressão, catorze grupos de 2 elementos e visualmente identificou dois grupos de 14 elementos. Nesta segunda abordagem, o André voltou a apresentar uma expressão numérica que não traduz o contexto figurativo, tal como sucedera na questão 1, situação também evidenciada por vários alunos da turma.

Na terceira questão o aluno concluiu, tal como na tarefa anterior, que "todas as expressões numéricas dão o mesmo resultado".

André considerou que, quando formou dois grupos de 14 elementos, descobriu mais rapidamente o número total de berlindes considerando também esta a forma mais fácil de efetuar a contagem.

Na entrevista, devido à não correspondência entre o contexto numérico e o contexto figurativo demonstrada na questão 2 (figura 73 e 74), foi pedido ao aluno que esclarecesse o que significava para ele dividir "em duas partes", que mencionou no questionário, tendo sido confirmado que eram dois grupos de 14 elementos:

> Investigadora: Na resposta à questão no verso da folha disseste que achaste mais fácil quando dividiste em duas partes porque vias logo o resultado. O que significa dividir em duas partes?
> André: … É fazer assim… (apontando para a figura) Este e este…
> Investigadora: Então faz na figura o que é dividir em duas partes. Mostra-me.
> André: Assim mais estes. (O aluno aponta para a figura onde representou dois grupos de 14 elementos mas numa disposição vertical – figura 5).
> Investigadora: Esta forma está aqui representada? (apontando para as representações da questão 2).
> André: Está de uma forma diferente.
> Investigadora: Mas diz-me qual é.
> André: A preto.

Verifica-se que o aluno conseguiu concluir que as representações (figura 75) correspondem à mesma visualização, apenas com orientações diferentes, uma na vertical e a outra na horizontal.

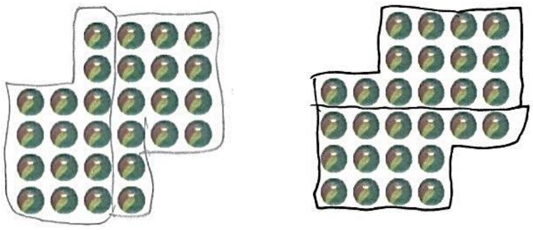


Figura 75. Esquema apresentado pelo André na entrevista para resposta à questão 2

Ao contrário da maioria dos alunos, o André referiu que teve algumas dificuldades na resolução desta tarefa, nomeadamente na visualização de outras formas de contagem.

> Investigadora: Na tua resposta disseste que tiveste dificuldades em ver para fazer as expressões. Tiveste dificuldades onde? Em olhar para a figura e perceber na figura?
> André: Tive… tentar fazer grupos de… outros números sem serem estes que estão aqui.
> Investigadora: Tiveste dificuldades em descobrir outras formas?
> André: Sim.

Apesar de recorrer a estratégias de contagem visuais, o André mostrou tendência para recorrer ao contexto numérico descontextualizado da representação figurativa.

Tarefa 5: A coleção de moedas

O André voltou a mostrar-se motivado e empenhado, realizando o seu trabalho de forma autónoma. Para resolver a tarefa, tal como os restantes alunos da turma, optou por escrever uma expressão numérica que traduzisse a contagem efetuada, apesar de no enunciado do problema não ser pedido. O aluno poderá ter sido influenciado pela resolução das tarefas anteriores, nas quais era solicitada a apresentação de uma expressão numérica. Na resolução das questões 1 e 2 utilizou o subitizing conceptual.

Na questão 1 o aluno recorreu a uma estratégia baseada na ideia de desconstrução da figura já que a visualizou como sendo constituída por três "folhas" completas, às quais retirou os espaços sem moedas (figura 76).

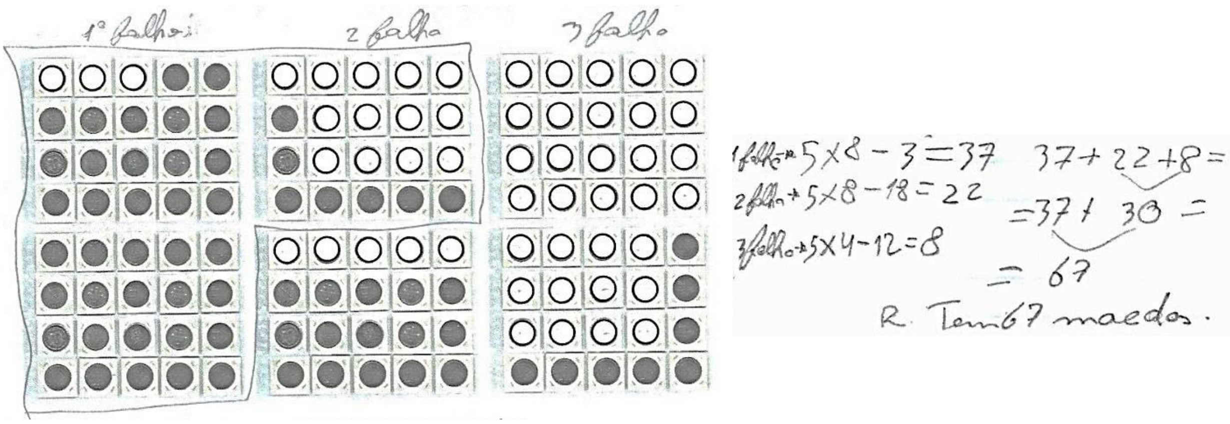


Figura 76. Resolução da questão 1 da tarefa "A coleção de moedas" apresentada pelo André.

Segundo o registo apresentado, por exemplo na 1.ª folha, o aluno representou cinco grupos de 8 moedas, o que corresponde a uma visualização numa disposição linear vertical, retirando os 3 espaços vazios. Como na figura não está explícita a forma como visualizou, e para clarificar esta interpretação, o aluno foi questionado aquando da entrevista sobre a forma como viu a figura:

> Investigadora: Na questão 1 escreveste $5 \times 8 - 3$. Podes explicar o que representa 5×8?
> André: É cinco vezes o oito (apontando para a folha inteira).
> Investigadora: Então representa uma folha inteira?
> André: Sim. Eu fiz a área da folha inteira e tirei os três.
> Investigadora: Quando fizeste 5x8 estavas a ver a figura na vertical ou na horizontal?
> André: 5×8? Estava a ver…
> Investigadora: Na vertical (demonstrando na folha) ou na horizontal (demonstrando na folha)?
> André: Assim (mostrando linhas horizontais)
> Investigadora: Então estavas a ver na horizontal.
> André: Sim.

Após a entrevista, verifica-se que o aluno não visualizou a figura verticalmente, como a expressão numérica demonstra, mas viu as moedas dispostas horizontalmente. Assim, tal como na tarefa anterior, o André apresentou uma expressão numérica que não traduz o contexto figurativo. À visualização das moedas na horizontal corresponderia a expressão numérica 8×5, representando oito grupos de 5 moedas e não 5×8 como o aluno apresentou na sua resolução.

Na questão 2 o André apresentou uma resolução muito semelhante à da questão 1, mas em vez de visualizar a figura composta por três folhas, identificou seis partes, tendo dividido cada uma em duas partes. Manteve a estratégia de desconstrução da figura, retirando os espaços vazios (figura 77).

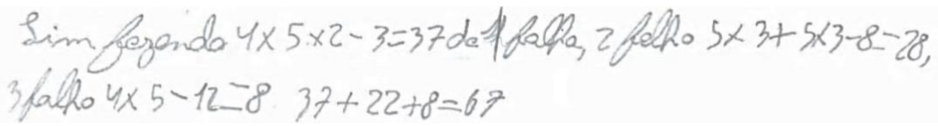


Figura 77. Resolução da questão 2 da tarefa "A coleção de moedas" apresentada pelo André.

Na entrevista, foi novamente questionado acerca da forma como visualizou a figura mas agora na questão 2:

> Investigadora: Na questão 2 escreveste $4 \times 5 \times 2$. O que representa $4 \times 5 \times 2$?
> André: Estes quatro (deslocando o dedo na vertical) vezes estes (apontando para o retângulo formado na parte superior da 1.ª folha).
> Investigadora: Isso é 4×5. E escreveste $\times 2$ porquê?
> André: Porque é meia folha.

Segundo o registo correspondente à 1.ª folha, o aluno representou quatro grupos de 5 moedas, o que corresponde à visualização das moedas numa disposição linear horizontal. Apesar disso, pela entrevista verifica-se que ele observou a figura numa disposição linear na vertical. Tal como na questão anterior, o André apresentou uma expressão numérica que não traduz o contexto figurativo tal como o interpretou. Contudo, apesar da expressão numérica formulada para a 1.ª folha corresponder a uma visualização na horizontal, na expressão numérica apresentada para a segunda folha o aluno representa uma visualização da figura na vertical. Verifica-se assim que não revela uma continuidade na linha de pensamento, dando a entender dificuldades no trabalho em contexto figurativo.

Tal como grande parte dos alunos da turma, o André teve dificuldades em resolver a questão 3. Reconheceu que 12×5 representava uma folha e meia completas. No entanto, não foi capaz de estabelecer uma associação direta entre a expressão numérica e a distribuição das moedas apresentadas na figura (figura 78).

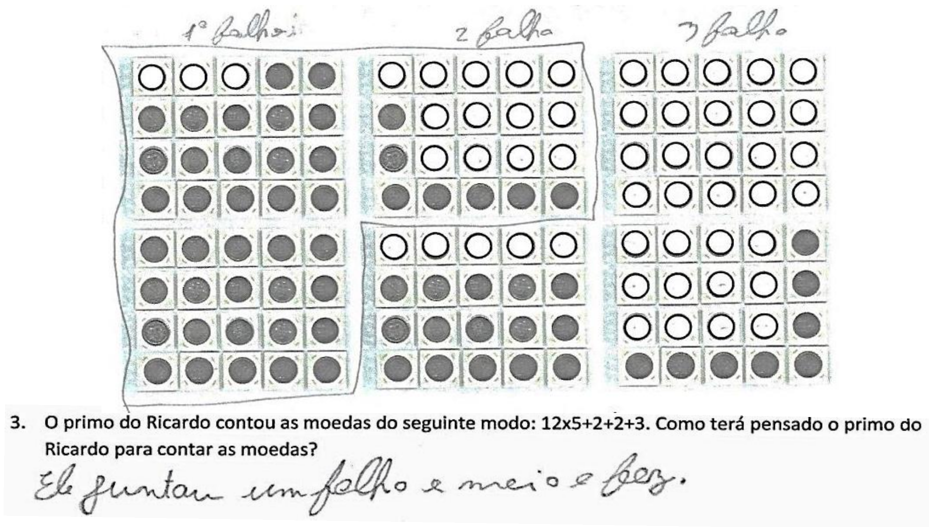


Figura 78. Resolução da questão 3 da tarefa "A coleção de moedas" apresentada pelo André.

Investigadora: Respondeste que ele viu folha e meia?
André: Estava a ver esta forma de ele fazer (apontando para a parte a lápis da figura – figura 3).
Investigadora: Mas isto corresponde a toda a expressão ou só a parte dela?
André: Para mim correspondia a toda.
Investigadora: Porque associaste a expressão a uma folha e meia?
André: Porque eu estava a ver… Na horizontal… 12×5.
Investigadora: E onde estão os restantes?
André: Eu fazia 12×5 que dava o total destas folhas (apontando para a folha e meia).
Investigadora: Então o 12×5 é isso?
André: Sim.
Investigadora: E o que é o 2+2+3? Não fizeste pois não?
André: Não.

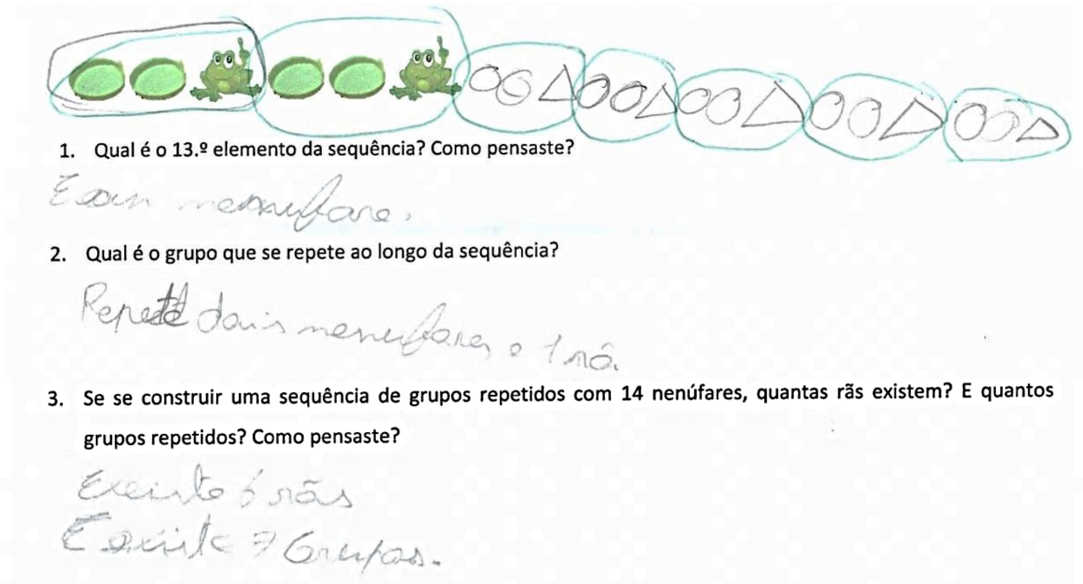
Mais uma vez se verifica que o aluno teve dificuldades em trabalhar em contexto figurativo. Percebeu o que representaria na figura 12x5, mas partiu da expressão para a figura sem refletir sobre a disposição das moedas.

O aluno considerou a resolução apresentada na questão 1 como sendo a mais fácil de efetuar a contagem. Verifica-se que esta resolução corresponde à visualização da figura numa disposição linear na horizontal e composta por três folhas. O André reconheceu ter sentido dificuldades na questão 3, o que se pôde verificar pela sua resolução, não tendo sentido mais dificuldades para além desta. Continua a constatar-se que, apesar de recorrer a estratégias de contagem visuais, o André mostrou tendência para recorrer ao contexto numérico descontextualizado da representação figurativa.

Tarefa 6: Nenúfares e rãs

O André voltou a mostrar-se motivado e empenhado, realizando o seu trabalho de forma autónoma. O aluno não pediu qualquer esclarecimento ao longo da resolução da tarefa. Demonstrou-se muito atento aquando da clarificação das questões na leitura inicial e só resolveu a questão 9 após a explicação dada à turma.

O aluno identificou o motivo de repetição da sequência, tendo-o rodeado sempre que estava representado, e descrito como sendo constituído por dois nenúfares e uma rã (figura 79). Tal como a maioria dos alunos da turma, para descobrir o 13º elemento da sequência (questão 1) e para responder à questão 3, o André recorreu à estratégia recursiva, tendo continuado a sequência até encontrar o termo pretendido (figura 79).


1. Qual é o 13.º elemento da sequência? Como pensaste?

É um nenúfare.

2. Qual é o grupo que se repete ao longo da sequência?

Repete dois nenúfares e 1 rã.

3. Se se construir uma sequência de grupos repetidos com 14 nenúfares, quantas rãs existem? E quantos grupos repetidos? Como pensaste?

Exeiste 6 rãs
Exeiste 7 Grupos.

Figura 79. Resolução das questões 1, 2 e 3 da tarefa "Nenúfares e rãs" apresentada pelo André.

Investigadora: Na questão 1 disseste que era um nenúfar. Como sabes que era um nenúfar o 13º? O que fizeste para saber?
André: Desenhei até ao 13º. (A investigadora começou a contar os elementos desenhados na sequência parando no 13º, existiam mais elementos desenhados).
André: Mas é que eu desenhei mais…
Investigadora: Na 3.ª questão disseste que existem 6 rãs e 7 grupos. Como chegaste a estes valores… 6 rãs e sete grupos?
André: 6 rãs porque há uma rã por grupo…
Investigadora: Mas o que fizeste para descobrir?
André: A ordem que era 2 nenúfares em cada grupo e 1 rã em cada grupo.

Investigadora: Mas este esquema (apontando para a continuação da sequência efetuada pelo aluno) tu fizeste por causa dos catorze nenúfares? Desenhaste para descobrir esta resposta ou só pensaste no cálculo?
André: Desenhei mais por causa dos 14 nenúfares.
Investigadora: Então para descobrir esta resposta fizeste aqui o desenho…
André: Sim.
Investigadora: Com 14 nenúfares quantas rãs existem? Disseste 6 rãs. Por que disseste 6?
André: No… (silêncio)
Investigadora: Tu aqui (apontando para a sequência) quantas rãs desenhaste?
André: 7.
Investigadora: E por que disseste 6?
André: Porque estava a pensar que este grupo (apontando para o 6º grupo de repetição) também fazia parte.
Investigadora: Então tu achaste que se era 14 nenúfares tinha que terminar na rã anterior e não completar o grupo?
André: Sim.

Na questão 3, apesar de ter desenhado o grupo de repetição completo (figura 79), concluiu que existiam apenas 6 rãs, o que significa que não completou a unidade de repetição.

Na questão 4, o aluno recorreu à estratégia explícita, facto confirmado através da entrevista, já que na resolução o aluno respondeu sem apresentar qualquer explicação.

Investigadora: Na trigésima posição encontra-se uma rã. Como é que tu sabes?
André: Porque é um múltiplo de três e como havia uma só rã em cada grupo… Uhm…
Investigadora: Mas aqui pergunta, "*na trigésima posição encontra-se um nenúfar ou uma rã?*". Por que é que tu sabias que na trigésima posição, sem desenhar ou fazer cálculos, tinha uma rã?
André: Porque tinha encontrado uma…uma lei.
Investigadora: Uma lei…E as rãs estavam sempre onde?
André: Na terceira posição.
Investigadora: Na terceira posição de cada grupo?
André: Sim.
Investigadora: Mas ao fim de vários grupos como é que tu saberias que seria uma rã? A terceira posição significa o quê?
André: Que é um múltiplo de 3.
Investigadora: Foi assim que tu descobriste a resposta a esta questão?
André: Sim.

Ao analisar a estrutura do padrão, o André concluiu que a posição ocupada pelas rãs correspondia a um múltiplo de três, encontrando assim uma regra associada à formação da sequência, o que lhe permitiu concluir que na 30ª posição se encontrava uma rã porque 30 é um múltiplo de três.

Na questões 5 e 6, nas quais se pretendia trabalhar a generalização distante, o André recorreu à estratégia explícita. Apesar de na resolução o aluno não apresentar uma justificação, foi possível compreender aquando da entrevista que identificou a estrutura do padrão, descobrindo relações entre os vários termos e a ordem que ocupavam na sequência, possibilitando-lhe aplicar uma regra para descobrir diversos elementos da mesma.

Investigadora: Na questão 5 fazes $17 \times 2 = 34$. 34 representa o quê?
André: O número de nenúfares.

Investigadora: E por que multiplicaste por 2?
André: Porque num grupo só existe uma rã e nenúfares existem dois. Fiz o número de rãs vezes dois porque havia dois nenúfares.
Investigadora: Em cada grupo.
André: Sim.
Investigadora: Mas não fizeste o número de grupos repetidos. Esqueceste-te ou não sabias?
André: Esqueci-me.
Investigadora: Então, se há 17 rãs quantos grupos repetidos existem?
André: 17.
Investigadora: Porquê?
André: Porque em cada grupo há uma rã.

O aluno reconheceu que o número de nenúfares é o dobro do número de rãs, 34, e que o número de grupos repetidos é igual ao número de rãs, 17.

Investigadora: Na questão 6, dividiste os 71 nenúfares por 2. Porquê?
André: Porque, como havia dois nenúfares em cada grupo, eu dividi que era para…obter o número de rãs, que é metade.
Investigadora: Metade do número de?
André: Nenúfares.
Investigadora: Mas depois não dás resposta! Afinal quantas rãs existem?
André: 35.
Investigadora: 35…E esta divisão está completa?
André: Não.
Investigadora: Poderias continuar… Por que é que tu dizes que há 35 rãs?
André: Porque isto dava….35…e meio.
Investigadora: Sim. E por que são 35 rãs?
André: Porque não há 35 rãs e meia.
Investigadora: Então ficarias no grupo anterior?
André: Sim.
Investigadora: E grupos repetidos quantos existem?
André: Uhm….35.
Investigadora: Mas aqui na questão 3, disseste que as rãs eram 6, ficaste no grupo anterior mas disseste que grupos repetidos eram 7. Disseste mais um. Não estás com o mesmo raciocínio nesta questão.
(silêncio)
Investigadora: Por que é que aqui achas que só seriam 35 grupos repetidos?
André: Porque é o mesmo número de rãs.

O André aplicou a relação descoberta, sabendo que o número de nenúfares é o dobro do número de rãs, e por isso dividiu 71 por 2. Como não podem existir meias rãs, considerou 35, deixando assim por completar o grupo de repetição. Da mesma forma, também considerou que o número de grupos repetidos era 35, porque era igual ao número de rãs. Este raciocínio diferiu do apresentado na questão 3 em que, apesar de também não completar o grupo repetido, considerou existirem 6 rãs, mas 7 grupos repetidos. Verifica-se que o aluno revelou dificuldades na transição entre a identificação de valores próximos e de valores mais distantes já que, quando explorou termos com uma ordem próxima e de fácil representação, considerou a existência do grupo de repetição incompleto (questão 3). Quando os elementos da sequência são de uma ordem de grandeza mais elevada, em que o aluno não recorre à representação, não considera a existência do grupo de repetição incompleto (questão 6).

Na questão 7, em que também se pretendia evidenciar a generalização distante, o aluno apresentou uma resolução incorreta, pois considerou que existiam 30 elementos ao todo e não 30 grupos repetidos. Apesar de existir um erro de compreensão, o aluno utilizou uma estratégia explícita que seria adequada.

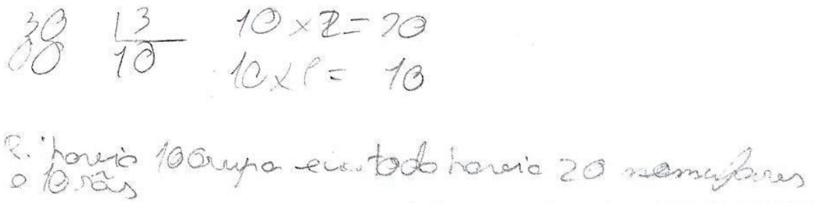


Figura 80. Resolução da questão 7 da tarefa “Nenúfares e rãs” apresentada pelo André.

Investigadora: Na questão 7…Em 30 grupos repetidos, quantos elementos havia ao todo? E nenúfares? E rãs?…Tu foste ao 30 e dividiste por 3. Para encontrar o quê?
André: Uhm…Eu dividi por três porque era o número de elementos que havia no grupo.

O aluno interpretou a questão de forma errada, entendo existirem 30 termos no total e, por isso, tentou descobrir o número de grupos repetidos, dividindo por 3, para poder saber posteriormente o número de rãs e de nenúfares.

O raciocínio que o aluno utilizou na questão 7 aplicou-o também na resolução da questão 8 (figura 81), mas desta vez de forma apropriada, já que era dado o número total de elementos e se pedia o número de rãs e nenúfares, revelando reversibilidade do pensamento.

Figura 81. Resolução da questão 8 da tarefa “Nenúfares e rãs” apresentada pelo André.

Investigadora: Na questão 8 não respondeste. Fizeste os cálculos mas não disseste quantos eram os nenúfares e as rãs.
André: É o número de grupos.
Investigadora: Por que é o número de grupos? Aqui não pede o número de grupos…
André: Para saber quantas rãs havia.
Investigadora: Porquê?
André: Porque o número de grupos é igual ao número de rãs.
Investigadora: Então $780 - 260 = 520$. O que representa o 520?
André: O número de nenúfares.

Apesar de no registo não ter identificado o número de nenúfares e rãs (figura 81), através da entrevista verifica-se que o André identificou corretamente o número destes elementos, tendo aplicado as regras previamente descobertas.

Na questão 9, o aluno conseguiu, em parte, generalizar o número de grupos repetidos, de rãs e de nenúfares Contudo, revelou dificuldades na manipulação da variável já que os nenúfares, por exemplo, deveriam ser representados por 2n. Na resolução, o aluno não apresenta uma generalização para o número total de elementos (figura 82).

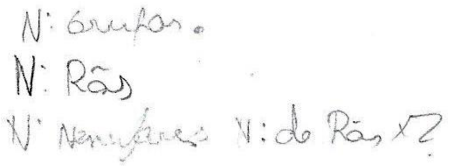


Figura 82. Resolução da questão 9 da tarefa "Nenúfares e rãs" apresentada pelo André.

Investigadora: Fizeste para as rãs, para os nenúfares, para os grupos…e o número de elementos ao todo? Não fizeste. Esqueceste-te?
André: Sim.
Investigadora: E como é que seria?
André: Como fiz aqui?
Investigadora: Sim.
André: N: nenúfares mais rãs.

Pela entrevista, verifica-se que o aluno não tinha apresentado a generalização para o número total de elementos por esquecimento. Contudo, a regra que expressou na entrevista não será uma correta generalização pois deveria ter substituído os nenúfares e rãs por 2n e n respetivamente.

Analisando as resoluções do aluno referentes às questões 5, 7 e 9, verifica-se que apresentou, novamente, expressões numéricas que não se adequam ao contexto explorado, demonstrando não ter estabelecido um paralelismo entre a componente numérica e a componente visual. Recorreu quer à estratégia recursiva quer à estratégia explícita para resolver as questões de generalização próxima, enquanto que nas questões de generalização distante usou apenas a estratégia explícita. A questão 9 foi aquela em que o aluno considerou ter sentido dificuldades pois não estava a conseguir resolvê-la, facto que se poderá relacionar com a falta de experiências prévias neste contexto. O André considerou que, com esta tarefa, aprendeu que podia representar um número qualquer por uma letra.

Tarefa 7: Os smiles

O André, tal como nas tarefas anteriores, mostrou-se motivado e empenhado. Manteve-se bastante atento aquando da clarificação das questões na leitura inicial da tarefa, tendo realizado o trabalho de forma autónoma e sem colocar dúvidas. Ao longo da tarefa, baseou o seu raciocínio no contexto figurativo.

O André utilizou sempre a mesma estratégia, a explícita, quer na questão de generalização próxima, questão 1, quer nas questões de generalização distante. O aluno aplicou uma regra representativa da relação entre as variáveis dependente e independente. Baseando-se na forma como visualizou as figuras. Descobriu uma expressão numérica que lhe permitiria calcular o número de smiles para um termo de qualquer ordem. O aluno identificou um smile no centro e três grupos com o mesmo número de smiles à volta, o que corresponde a uma generalização construtiva, resultante da decomposição da estrutura do padrão em partes disjuntas.

Na questão 1, apresentou a expressão numérica que lhe permitiu calcular o número de smiles da 4.ª figura (figura 83).

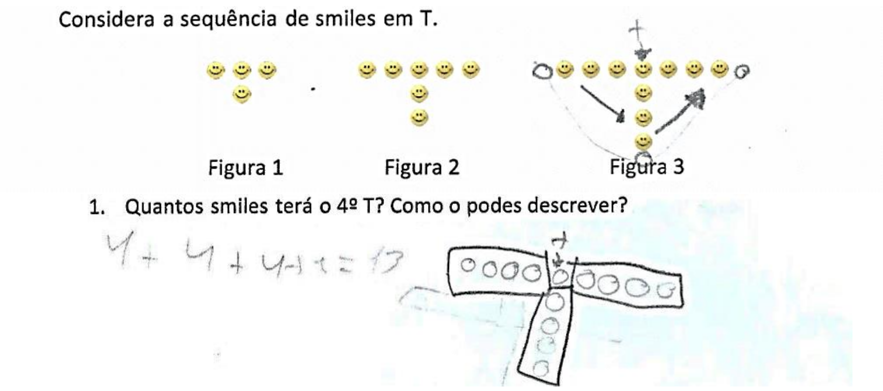


Figura 83. Resolução apresentada pelo André para a questão 1 da tarefa “Smiles”

O aluno elaborou um esquema correspondente ao termo de ordem 4 (figura 83) para clarificar o seu raciocínio e descrever a forma como viu a figura, não tendo realizado a contagem dos seus elementos.

Na questão 2, o André reconheceu que a 100.ª figura seria composta por três grupos de 100 smiles mais o smile central, baseando o seu raciocínio na regularidade encontrada nas figuras 1, 2 e 3. Apesar de não ter desenhado os 100 smiles de cada grupo, apresentou um esquema em que evidenciou isso (figura 84).

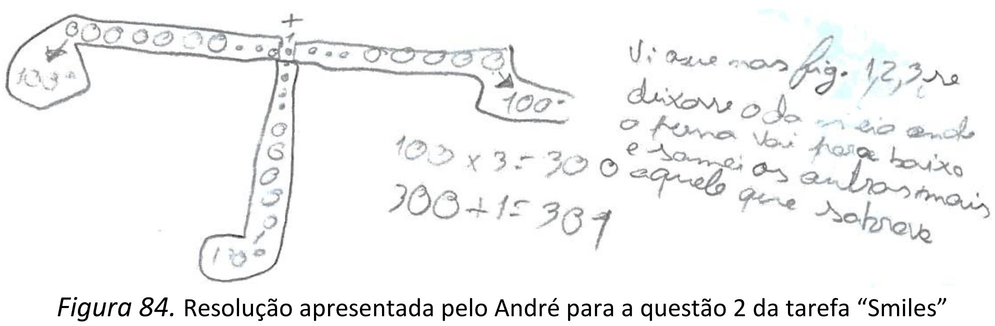


Figura 84. Resolução apresentada pelo André para a questão 2 da tarefa “Smiles”

Pela entrevista, verifica-se que, nesta questão, o aluno elabora primeiramente o esquema da 100.ª figura baseando-se nas figuras 1, 2 e 3 e posteriormente apresentou as expressões numéricas que lhe permitiram calcular o número de smiles:

Investigadora: O que querias dizer com isto? (apontando para o texto da resolução)
André: Queria dizer que tirava este do meio…
Investigadora: Tiravas o central…
André: E depois multiplicava estes, esta fila (apontando para um dos “braços do T”) por 3. Depois aumentava este (apontando para o smile central).
Investigadora: E tu fizeste este cálculo 100×3…
André: Primeiro fiz isto… (apontando para o esquema)
Investigadora: Primeiro fizeste o esquema.
André: Sim. E depois é que expliquei por cálculo.
Investigadora: Então foi ao contrário da primeira.
André: Sim.

Na questão 3, o aluno foi capaz de aplicar a regra descoberta, usando o raciocínio inverso. Retirou o smile central e dividiu os 120 smiles restantes por 3. Descobriu o número de smiles de cada “braço” do T, concluindo que seria possível construir uma figura com 121 smiles (figura 85).

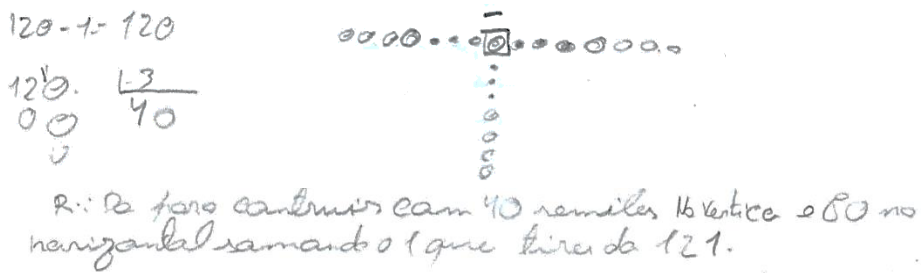


Figura 85. Resolução apresentada pelo André para a questão 3 da tarefa “Smiles”

O aluno reconheceu a necessidade de retirar o smile central porque não se repetia, dividindo os restantes smiles por três porque cada “braço do T” se repetia três vezes. Assim, verificou que cada “braço” é composto por 40 smiles, obtendo 80 smiles na horizontal e 40 na vertical.

Investigadora: Na questão 3, porque subtraíste um?
André: Porque era este do meio.
Investigadora: Era o central. E ele não se repetia, era?
André: Sim.
Investigadora: Este 80 a que corresponde? O que querias dizer?
André: Queria dizer que aqui ao todo tinha 80 (deslocando o dedo na horizontal).
Investigadora: E este sentido que estás a fazer qual é?
André: Na horizontal… tinha 80, e na vertical tinha 40.
Investigadora: E o 80 resulta de quê?
André: De 40 mais 40.

Na resolução da questão 4, tal como nas questões anteriores, o André voltou a basear o seu raciocínio na visualização, tendo elaborado um esquema da forma como via a figura de ordem *n* mas também apresentou uma expressão algébrica que traduzia a generalização algébrica. O aluno relacionou o número de smiles com a ordem da figura. À figura de ordem *n* fez corresponder *n,* smiles em cada braço, que multiplicou por três adicionando posteriormente o smile central (figura 86).

Figura 86. Resolução apresentada pelo André para a questão 4 da tarefa "Smiles"

Apesar de na tarefa anterior o aluno ter apresentado dificuldades na manipulação simbólica, nesta conseguiu elaborar uma expressão algébrica que traduzia a generalização. Contudo, nas respostas finais afirmou ter sentido dificuldades nesta questão, referindo que inicialmente não estava a conseguir resolvê-la:

Investigadora: Na questão 4 quais eram as tuas dificuldades?
André: Não estava a perceber muito bem o que era o *n*.
Investigadora: Então só fizeste esta questão depois de ter explicado à turma o que era o *n*?
André: Sim.

Na questão 5, o André conseguiu dar significado às expressões numéricas apresentadas, fundamentando o seu raciocínio através de esquemas, quer na que representava a generalização construtiva ($1 + 3 \times 250$), quer na representava a generalização desconstrutiva ($(250 + 1) \times 3 - 2$) (figura 87).

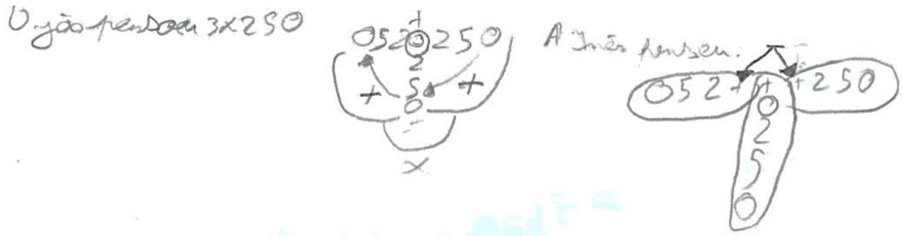


Figura 87. Resolução apresentada pelo André para a questão 5 da tarefa "Smiles"

Para explicar a expressão numérica do João, o aluno apresentou um esquema semelhante aos que efetuou nas outras questões, pois esta forma de ver correspondia ao modo como o André visualizou a figura. Apesar de no esquema apresentado para explicar a expressão apresentada pela Inês não ser percetível, através da entrevista verifica-se que o aluno compreendeu que havia repetição do smile central e por isso se subtraíam 2 smiles:

Investigadora: O esquema do João eu entendo. Agora, no esquema da Inês o que é este +?
André: É o smile.
Investigadora: Este mais é um smile?
André: Sim.
Investigadora: Então $250\ + 1$, este $+1$ seria o + da figura?
André: Sim.
Investigadora: E o representa o $3 - 2$?
André: Eu fiz este conjunto (apontando para um dos "braços do T") vezes 3 menos estes dois (apontando para 2 sinais + da figura).

Analisando as resoluções do aluno referentes às questões 2 e 4, verifica-se que apresentou, novamente, uma expressão numérica que não se adequa ao contexto explorado, demonstrando que, apesar de basear o seu raciocínio no contexto figurativo, não estabeleceu um paralelismo entre a componente numérica e a componente visual. Ao longo de toda a tarefa recorreu à estratégia explícita, usando uma estratégia de natureza visual, tendo baseado o seu raciocínio na visualização e no contexto figurativo, o que se verificou ter sido favorável na correta resolução da mesma. Verifica-se que, neste caso, a visualização apresentou-se como meio facilitador da resolução da tarefa e do desenvolvimento do pensamento algébrico. Para além das dificuldades na questão 4, o aluno afirmou não ter sentido mais dificuldades na resolução da tarefa. Considerou que, com esta tarefa, aprendeu a "olhar para a figura e imaginar smiles a entrarem na figura", o que revela que a visualização e o contexto figurativo foram decisivos para o seu sucesso nesta tarefa.

Tarefa 8: Os Z's

O André, tal como nas tarefas anteriores, mostrou-se motivado e empenhado. Ao longo da tarefa, o aluno baseou o seu raciocínio no contexto figurativo, valorizando a componente visual. O aluno visualizou a estrutura do padrão e identificou relações entre a variável dependente e a variável independente, tendo recorrido à estratégia explícita para a resolução das questões quer de generalização próxima quer de generalização distante. Identificou em cada *Z* um retângulo central e dois quadradinhos, um em cima (do lado esquerdo) e outro em baixo (do lado direito), o que corresponde a uma generalização construtiva.

Pela entrevista verificou-se que o André, inicialmente, analisou o padrão e continuou a sequência de forma errada, pois não aumentou de forma correta as linhas. Quando estava a resolver a questão 5 apercebeu-se de que tinha continuado a sequência de forma incorreta e resolvido erradamente as questões, mas já não teve tempo de retificar todas, fazendo-o apenas na questão 2. Esta situação explica o facto do aluno, ao longo da tarefa, apesar de recorrer sempre à estratégia explícita, ter utilizado leis de formação diferentes.

Na questão 1 o André não continuou a sequência de forma correta, desenhando de forma errada a 5.ª figura. Pela resolução, verifica-se que também tinha desenhado de forma incorreta a 4.ª figura e, quando compreendeu isso, acrescentou a linha com cinco quadradinhos que faltava em baixo, tendo-se esquecido de apagar o 5.º quadradinho da linha anterior (figura 88).

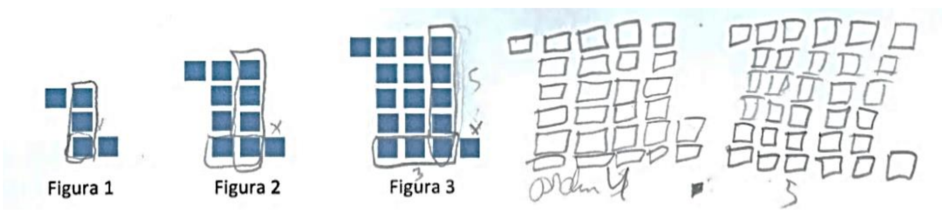


Figura 88. Resolução apresentada pelo André para a questão 1 da tarefa "Z's"

Aquando da entrevista, reconheceu que aquele quadradinho não deveria estar ali.

Investigadora: Na figura 4, este quadradinho está correto?
André: Não.
Investigadora: Está a mais?
André: Sim.
Investigadora: Quando construíste a figura 5 seguiste a mesma regra que para construir a figura 4?
André: (O aluno observa atentamente a figura durante alguns segundos e depois responde) Não.

O André, tal como alguns colegas da turma, teve dificuldades em identificar visualmente a estrutura do padrão, situação muito frequente em padrões não lineares. Neste caso, as figuras variavam nas duas dimensões: comprimento e altura.

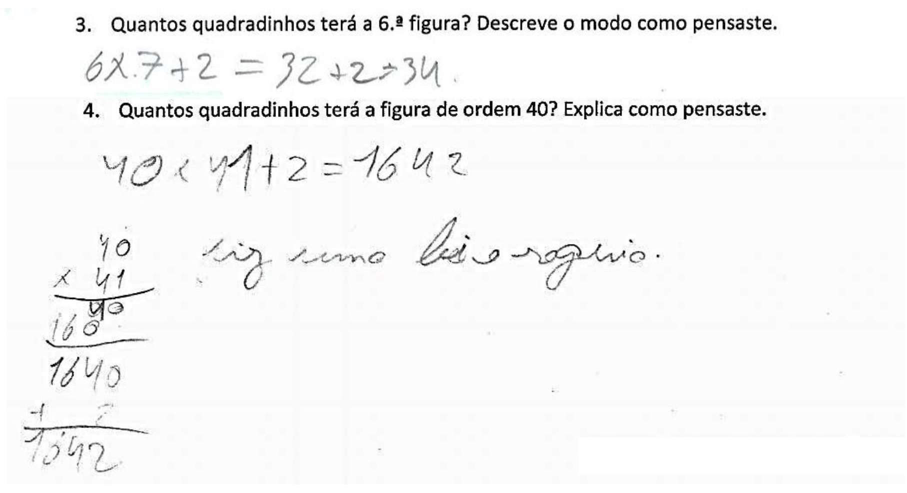
Na questão 2 apresentou uma expressão numérica que correspondia à estrutura do padrão, relacionando corretamente as duas variáveis, o que lhe permitiu calcular o número de quadradinhos da 3.ª figura (figura 89).

$$3 \times 5 + 2 = 17$$

Figura 89. Resolução apresentada pelo André para a questão 2 da tarefa "Z's"

O aluno identificou um retângulo de dimensões 3x5 e dois quadradinhos, um em cima e outro em baixo, correspondendo a uma generalização construtiva.

O André não utilizou a mesma regra para descobrir o número de quadradinhos da 6.ª figura, generalização próxima, e da 40.ª figura, generalização distante. Recorreu à estratégia explícita, mas a regra que utilizou teve por base o erro que cometeu na construção da 5.ª figura, já que, na 6.ª as dimensões do retângulo central seriam 6x8 e na figura de ordem 40 seriam 40x42.


3. Quantos quadradinhos terá a 6.ª figura? Descreve o modo como pensaste.

6x7+2 = 32+2=34.

4. Quantos quadradinhos terá a figura de ordem 40? Explica como pensaste.

40x41+2=1642

Figura 90. Resolução apresentada pelo André para as questões 3 e 4 da tarefa "Z's"

Investigadora: Observa a questão 3. Achas que está correto segundo a sequência apresentada?
André: humm… (silêncio durante 10 segundos)
Investigadora: Seria 6x7?
André: Eu vi… uhmm… Aqui devia ter 8 (apontando para o 7).

Investigadora: E porque erraste?
André: Porque a 5.ª…
Investigadora: Porque tinhas a 5.ª figura mal construída?
André: Sim.
Investigadora: A resposta à questão 4 também está correta?
André: Não.
Investigadora: É a figura de ordem 40. Como ficaria?
André: 40x42.

O aluno compreendeu que tinha continuado a sequência de forma errada e que, por essa razão, as expressões numéricas apresentadas não permitiram calcular de forma correta o número de quadradinhos da 6.ª e da 40.ª figuras. Contudo, identificou o erro e demonstrou que teria sido capaz de calcular o número de quadradinhos corretamente.

A questão 5 implicava, para além da generalização distante, a reversibilidade do pensamento. O André tentou aplicar a regra descoberta anteriormente, usando o raciocínio inverso, subtraindo dois ao total dos quadradinhos. Contudo, não conseguiu continuar o raciocínio de forma a chegar a valores corretos. O aluno dividiu os restantes quadradinhos por dois na tentativa de encontrar o número de quadradinhos que compunham os lados do retângulo central. Assim, pensou ter encontrado um dos lados do retângulo, subtraindo de seguida dois porque era a diferença de quadradinhos entre os lados do retângulo (figura 191). Por isso, concluiu que seria possível construir a figura. Como não calculou o valor da expressão numérica que apresentou, não verificou que desta forma não obtinha 964 quadradinhos.

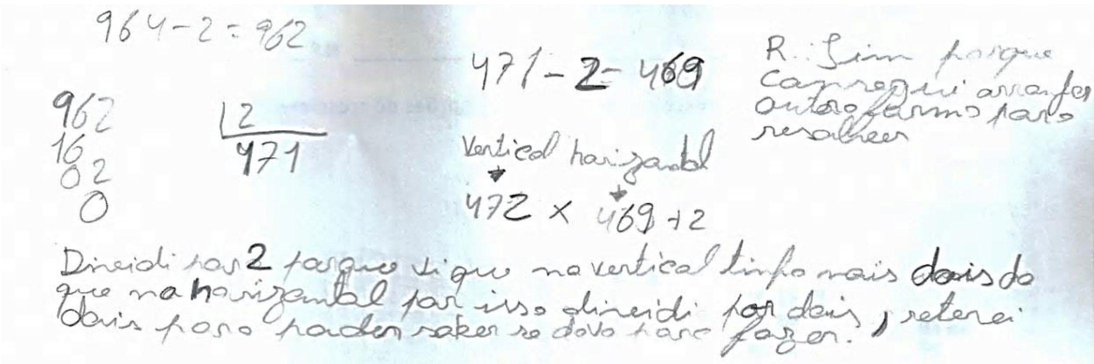


Figura 91. Resolução apresentada pelo André para a questão 5 da tarefa "Z's"

Apesar de não ter encontrado valores corretos para os lados do retângulo, o aluno revelou indícios da reversibilidade no pensamento pois procurou utilizar a regra descoberta anteriormente tentando associar a sua fundamentação ao contexto visual.

Foi ao pensar como iria resolver esta questão que o aluno se apercebeu que tinha continuado a sequência de forma incorreta e que por isso tinha resolvido as questões subsequentes de forma errada. Contudo, como já estava no final e não pediu mais tempo, não teve tempo para alterar todas as respostas, fazendo-o apenas na questão 2.

Na questão 6, o André apresentou uma expressão algébrica que traduzia a generalização da estrutura que tinha identificado. Contudo, esta expressão não era a correta devido ao erro cometido anteriormente pelo aluno. Pela entrevista, verifica-se que percebeu que esta expressão, tal como as das questões 3 e 4, estaria errada mas não teve tempo de a corrigir. Aquando da resolução, o aluno teve algumas dificuldades na manipulação simbólica, tendo conseguido representar $n + 1$ após alguns esclarecimentos da investigadora:

André: Isto aqui é n (apontando para o comprimento do retângulo da 5.ª figura) e depois é n? (apontando para a largura do retângulo)
Investigadora: Conta quantos quadradinhos tem para cima.
André: 6.
Investigadora: Aqui tens 5 (apontando para o comprimento do retângulo da 5.ª figura) que tu dizes que é o?
André: n.
Investigadora: Se 5 é o n quanto é que é 6? (silêncio durante 5 segundos). O 6 quanto é mais que o 5?
André: Mais 1.
Investigadora: Se 5 é o n quanto é que é 6?
André: n.
Investigadora: Se fosse n era 5×5?
André: Ah!
Investigadora: Quanto é que tem mais que n?
André: Mais 1.
Investigadora: Então quanto é? n…
André: $n \times n + 1$.

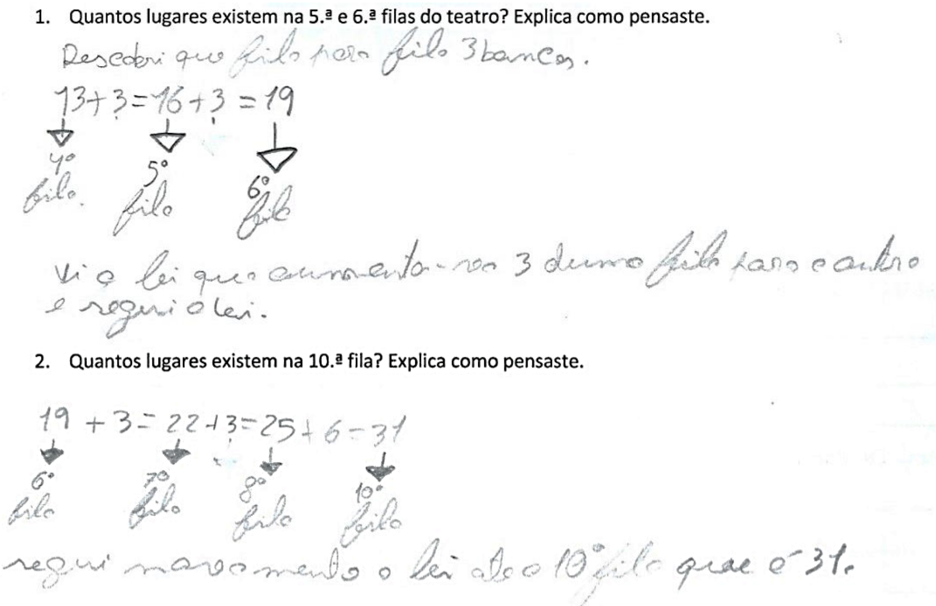
O aluno compreendeu que não poderia representar valores diferentes com a mesma variável e que neste caso seria $n + 1$. Se o aluno tivesse corrigido o erro apresentado, teria conseguido escrever uma expressão algébrica que traduziria a generalização da sequência.

Ao longo de toda a tarefa recorreu à estratégia explícita, usando uma estratégia de natureza visual, tendo baseado o seu raciocínio no contexto figurativo, o que, apesar do erro apresentado, se tornou facilitador da resolução da mesma. O aluno referiu ter sentido dificuldades na resolução da questão 5, afirmando não ter sentido outras dificuldades nesta tarefa. Considerou que aprendeu a "descobrir uma lei" de formação da sequência.

Tarefa 9: Os lugares

O André voltou a mostrar-se motivado e empenhado na resolução da tarefa. Ao contrário das tarefas anteriores, baseou o seu raciocínio no contexto numérico desligando-se da componente visual. O aluno não foi capaz de compreender a estrutura do padrão, não identificando relações entre a variável dependente e independente, tendo recorrido a estratégias não visuais.

Tal como a maioria dos alunos da turma, o André recorreu à estratégia recursiva para as questões em que tinha que descobrir o número de lugares da 5.ª fila, da 6.ª fila (questão 1) e da 10.ª fila (questão 2), questões de generalização próxima. O aluno verificou que a diferença entre filas consecutivas era de três lugares e assim obteve a 5.ª fila, adicionando 3 à fila anterior, tendo procedido da mesma forma para encontrar o número de lugares da 6.ª e da 10.ª filas (figura 92).


1. Quantos lugares existem na 5.ª e 6.ª filas do teatro? Explica como pensaste.

Descobri que fila para fila 3 bancos.

13+3=16+3=19

4º fila 5º fila 6º fila

vi a lei que aumentava 3 duma fila para a outra e segui a lei.

2. Quantos lugares existem na 10.ª fila? Explica como pensaste.

19 + 3 = 22+3=25+6=31

6º fila 7º fila 8º fila 10º fila

segui novamente a lei até a 10º fila que é 31.

Figura 92. Resolução apresentada pelo André para as questões 1 e 2 da tarefa "Os lugares"

Investigadora: Na questão 2, da 8.ª para a 10.ª fila somaste 6. Porquê?
André: Porque vi o dobro.
Investigadora: Porque aumentava duas filas. Então não aumentava 3 mas o dobro, 6.
André: Sim.

Pela entrevista, verifica-se que na questão 2 o aluno associou ao pensamento recursivo a estratégia múltiplo da diferença, já que multiplicou por 2 o valor da diferença entre termos consecutivos, sendo uma forma de obter o valor da 10.ª fila mais rapidamente.

O aluno não conseguiu identificar o padrão apresentado e não se centrou na sua estrutura visual, tendo-se focado apenas no contexto numérico, nomeadamente na diferença entre termos consecutivos. Por esta razão, apresentou dificuldades na formulação de uma estratégia para a resolução da questão de generalização distante, questão 3. Assim, o aluno não conseguiu resolver de forma correta a questão 3. Tal como outros alunos da turma, utilizou a estratégia *Parte Unidade* com ajuste, pois tomou como unidade o número de lugares encontrado na questão 2 para a 10.ª fila e foi adicionando esse valor até obter a 130.ª fila. De seguida, procedeu a um ajuste, recorrendo ao raciocínio recursivo e ao múltiplo da diferença até chegar ao número de lugares da 138.ª fila (figura 93).

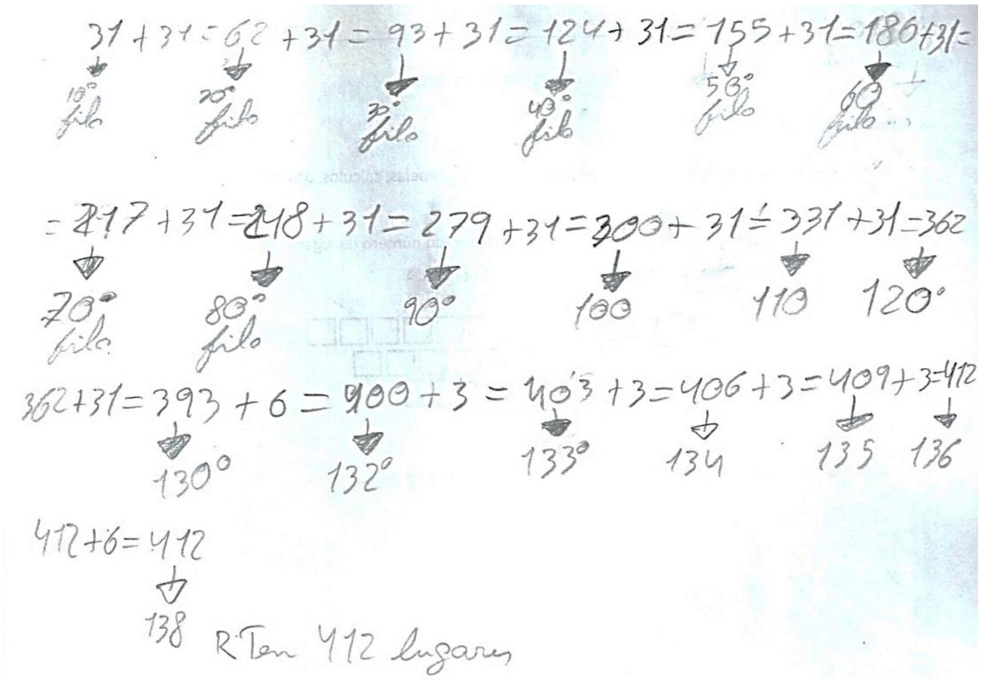


Figura 93. Resolução apresentada pelo André para a questão 3 da tarefa "Os lugares"

Investigadora: Na questão 3 não tentaste encontrar um raciocínio que fosse menos trabalhoso?
André: Nessa altura não tinha descoberto uma lei.
Investigadora: Porque é que da 10.ª para a 20.ª fila adicionaste 31 lugares?
André: Porque na 10.ª fila era 31 lugares mais 31 que já aumentava de 10. Em vez de estar a fazer 3+3+3…
Investigadora: Mas aqui (apontando para a questão 2), quando quiseste aumentar fizeste o dobro do número de lugares que aumentava.
André: De 3.
Investigadora: Então da 10.ª para a 20.ª era 31 que somavas?
André: Porque eu vi na 10.ª fila que era 31 lugares...
Investigadora: Sim, eu percebi. Aqui, (apontando para a questão 2), de fila em fila era 3, e adicionaste 6 porque era…
André: O dobro…
Investigadora: O dobro de quê?
André: De 3.
Investigadora: Porque era o número de filas que aumentava. Se aumentava 10 filas, quantos lugares aumentava?
André: (silêncio)

Apesar de nas questões 2 e 3 o aluno ter recorrido ao múltiplo da diferença entre termos consecutivos, teve dificuldades em compreender que da 10.ª para a 20.ª fila deveria aumentar 30 lugares porque não se conseguia desligar do raciocínio parte unidade utilizado. Na entrevista, inicialmente, não compreendeu que ao aumentar 10 filas teria de aumentar 30 lugares, entendendo isso após várias explicações.

Ao longo da tarefa, quer em questões de generalização próxima quer em questões de generalização distante, o André baseou o seu raciocínio no contexto numérico em detrimento do contexto visual, tendo recorrido a estratégias não visuais, a recursiva e a múltiplo da diferença com ajuste. Ao contrário das tarefas “Os smiles” e “Z’s”, não foi capaz de identificar a estrutura do padrão apresentado, tendo centrado o seu raciocínio na diferença entre termos consecutivos o que não lhe permitiu resolver com sucesso a questão 3. O aluno referiu ter sentido dificuldades na questão 3 devido à morosidade da estratégia escolhida, afirmando não ter sentido mais dificuldades. Considerou que com esta tarefa aprendeu a trabalhar com sequências.

Tarefa 10: A moldura

O André voltou a mostrar-se motivado e empenhado na resolução da tarefa. Utilizou sempre a mesma estratégia, a explícita, quer nas questões de generalização próxima quer nas questões de generalização distante. O aluno aplicou uma regra que entendeu ser representativa da relação entre as variáveis dependente e independente, baseando-se numa generalização construtiva, já que identificou a moldura composta por quatro grupos com o mesmo número de azulejos, correspondente às dimensões do quadrado. Contudo, essa regra não correspondia ao contexto apresentado e não lhe permitiu calcular de forma correta o número de azulejos. O aluno não foi capaz de compreender que, identificando na moldura quatro grupos com o mesmo número de elementos, posteriormente teria que proceder à subtração dos azulejos que já tinham sido contemplados nessa contagem, os cantos. Apesar de ter baseado o seu raciocínio na componente visual, o aluno revelou dificuldades na análise da estrutura do padrão, calculando o perímetro da moldura e não o número de azulejos que a compunham. Mesmo após a chamada de atenção da investigadora para que observasse bem a figura e relacionasse a sua resolução com o contexto apresentado, não foi capaz de compreender que a expressão numérica que tinha descoberto não traduzia o contexto figurativo.

Na questão 1, de generalização próxima, o André, tal como vários alunos da turma, recorreu à estratégia explícita para descobrir o número de azulejos da moldura de dimensões 8x8, multiplicando 8 por 4 (figura 94). Contudo, a expressão numérica utilizada não lhe permitiu calcular de forma correta o número de azulejos das molduras, revelando dificuldades na visualização, nomeadamente na atribuição de significado à expressão apresentada.

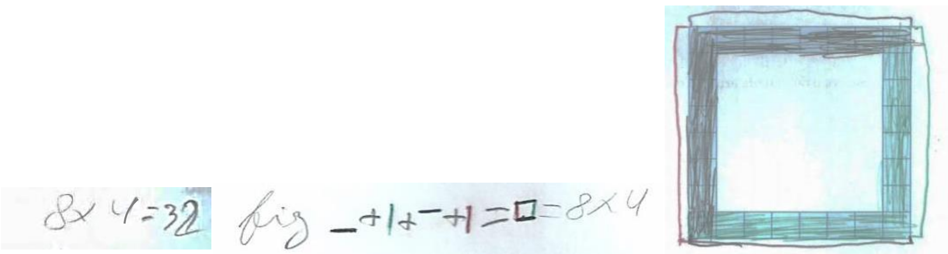
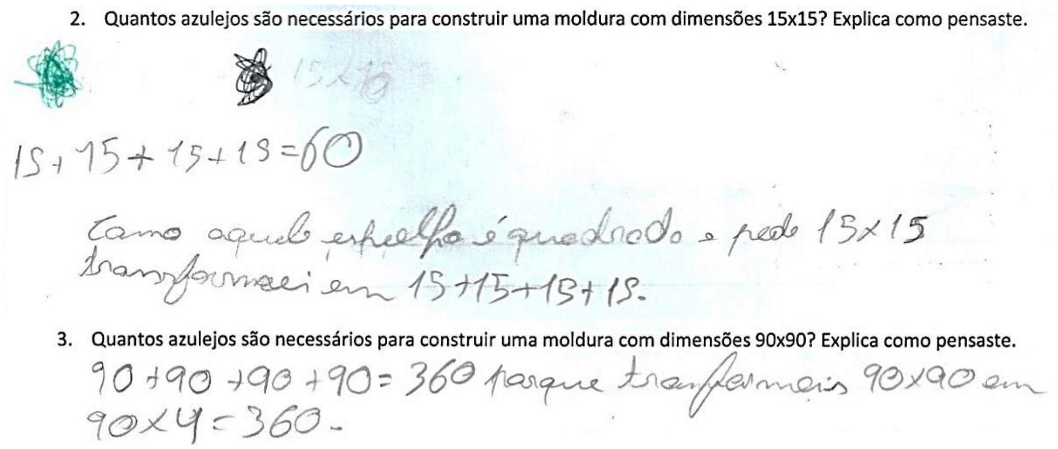


Figura 94. Resolução apresentada pelo André para a questão 1 da tarefa “A moldura”

No seu raciocínio, o aluno baseou-se no cálculo do perímetro e não percebeu que era necessário retirar os quadrados dos cantos.

> Investigadora: Para fazer a questão 1 apenas fizeste o cálculo, nunca contaste os quadrados?
> André: Não.
> Investigadora: Foi só o cálculo.
> André: Sim.
> Investigadora: E por que multiplicaste por 4?
> André: Porque era os lados.
> Investigadora: E como sabias que os lados tinham 8?
> André: Foi a dimensão.

Na questão 2, ainda de generalização próxima, em que tinha que descobrir o número de azulejos da moldura de dimensões 15x15 e na questão 3, de generalização distante em que estava envolvida a moldura de dimensões 90x90, o aluno recorreu também à estratégia explícita. Apesar de na base do seu raciocínio estar a mesma forma de ver o padrão usada na questão 1, não recorreu à multiplicação mas sim à adição dos lados que compunham a moldura (figura 95). Mais uma vez, o número total de azulejos de cada moldura não estava correto pois esta regra não traduzia o padrão apresentado, já que os cantos da moldura estavam a ser contabilizados duas vezes.


2. Quantos azulejos são necessários para construir uma moldura com dimensões 15x15? Explica como pensaste.

15+15+15+15=60

Como aquele espelho é quadrado e pede 15x15 transformei em 15+15+15+15.

3. Quantos azulejos são necessários para construir uma moldura com dimensões 90x90? Explica como pensaste.

90+90+90+90=360 porque transformeis 90x90 em 90x4=360.

Figura 95. Resolução apresentada pelo André para as questões 2 e 3 da tarefa "A moldura"

Na questão 4, que implicava a generalização distante e a reversibilidade de pensamento, o André foi capaz de aplicar a regra descoberta anteriormente revelando reversibilidade no pensamento, recorrendo à estratégia explícita. Contudo essa regra, que foi utilizada na resolução das questões anteriores, não estava certa o que não permitiu ao aluno obter conclusões corretas. O aluno decompôs o 420 em 400 e em 20, para facilitar a divisão, e de seguida efetuou a divisão de ambos por 4, tendo concluído que era possível construir uma moldura com este número de azulejos (figura 96).

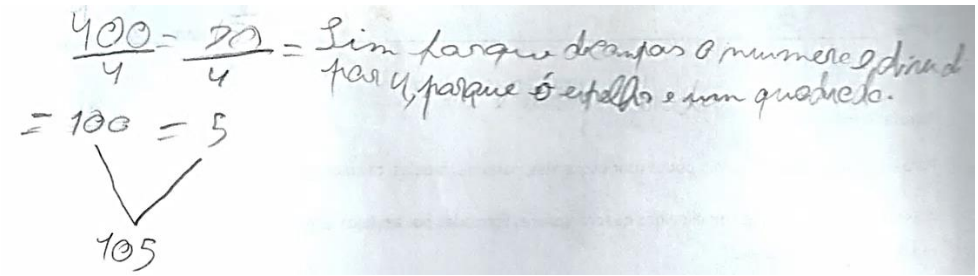


Figura 96. Resolução apresentada pelo André para a questão 4 da tarefa “A moldura”

Investigadora: Na questão 4, porque decompuseste o 420 em 400 e em 20?
André: Porque era mais fácil para dividir.
Investigadora: E dividiste por 4 porquê?
André: Porque era o número de lados.

Na questão 5, o André conseguiu elaborar uma expressão algébrica que traduzia a regra descoberta nas questões anteriores (figura 97). Contudo, esta não correspondia ao contexto apresentado porque o aluno não deduziu uma regra correta a partir da análise da estrutura do padrão.

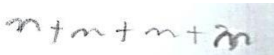


Figura 97. Resolução apresentada pelo André para a questão 4 da tarefa “A moldura”

Analisando a expressão numérica apresentada pelo André na questão 1 (figura 94), verifica-se que a expressão numérica não corresponde à interpretação do contexto explorado. Apesar ser capaz de formular expressões numéricas, não atribuiu significado diferente à mudança de ordem dos fatores envolvidos na multiplicação. Ao longo da tarefa, quer em questões de generalização próxima quer em questões de generalização distante, o André recorreu à estratégia explícita. Apesar de ter baseado o seu raciocínio no contexto figurativo, revelou dificuldades na análise do padrão, tendo sido influenciado pelo conceito de perímetro e não atribuiu na totalidade significado à expressão numérica apresentada. O aluno não compreendeu que, com a regra que descobriu, existiam azulejos que estavam a ser contabilizados em duplicado e que seria necessário proceder a uma subtração dos sobrepostos, o que revela dificuldades na generalização desconstrutiva, o que era expectável. O aluno afirmou não ter sentido dificuldades na resolução desta tarefa, referindo que aprendeu a trabalhar com números.

Síntese

O André revelou-se empenhado e interessado ao longo das sessões de exploração das tarefas. Nas tarefas de Contagens Visuais recorreu, quase na totalidade, ao subitizing conceptual, estratégia de natureza visual, reconhecendo diferentes agrupamentos nas figuras, levando-o a elaborar expressões numéricas equivalentes. Nas tarefas de sequências e problemas com padrões, recorreu a várias estratégias: recursiva, parte unidade, múltiplo da diferença e explícita. O aluno revelou preferência pela generalização construtiva, apesar de também ter recorrido à ideia de desconstrução na tarefa *Os berlindes do Carlos*. O André conseguiu, com facilidade, analisar a estrutura do padrão das tarefas *Nenúfares e rãs, Smiles* e *Os Z's*, o que lhe permitiu relacionar as variáveis dependente e independente e deduzir uma regra que traduzia a generalização. Nestes casos, recorreu a estratégias de natureza visual, baseando o seu raciocínio no contexto visual/figurativo. Na tarefa *A moldura*, conseguiu analisar a estrutura do padrão, mas a mesma não traduzia o contexto apresentado. Por sua vez, na tarefa *Os lugares* não conseguiu analisar a estrutura do padrão, baseando o seu raciocínio no contexto numérico, tendo algumas dificuldades, nomeadamente, na questão de generalização distante. Apesar de ter revelado algumas dificuldades, nos casos em recorreu a estratégias de natureza visual/figurativa, conseguiu formular expressões algébricas que traduzia a generalização, revelando evolução na manipulação simbólica.

CAPÍTULO VII – DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Este capítulo organiza-se em três secções. Na primeira, apresenta-se uma síntese do estudo, salientando alguns dos seus aspetos centrais. Na secção seguinte, são discutidas as principais conclusões do estudo, organizadas de acordo com as questões de investigação. As reflexões finais, apresentadas na última secção, incidem sobre algumas implicações para a prática profissional, recomendações para futuras investigações e limitações do estudo.

Síntese do estudo

Este estudo pretendeu compreender como se caracteriza o pensamento algébrico de alunos do 6.º ano de escolaridade ano no âmbito de contextos visuais. Para isso, foram delineadas as seguintes questões que orientaram a investigação:

1) Que aspetos do pensamento algébrico são evidenciados em contextos visuais?

2) Que tipo de estratégias utilizam os alunos no processo de generalização nestes contextos?

3) Que dificuldades são evidenciadas pelos alunos nestes contextos?

4) Que razões poderão explicar estas dificuldades?

Dadas as características do problema em estudo, optou-se por uma metodologia qualitativa, já que o foco da investigação não se centrava na generalizar conclusões mas sim na compreensão de um fenómeno em particular, como o pensamento algébrico. Recorreu-se a um design de estudo de caso, de natureza descritiva e interpretativa, sendo acompanhados dois alunos cujo trabalho foi enquadrado no contexto turma. Assim, foi elaborada uma proposta didática organizada em contagens visuais, sequências de repetição e de crescimento, e problemas que envolvem a exploração de padrões. Esta proposta baseou-se no trabalho desenvolvido por Vale e colaboradores (2011a) e nas orientações do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007), nomeadamente no tópico *Relações e Regularidades*.

Na recolha de dados utilizaram-se múltiplas fontes de evidências como a observação, entrevistas semiestruturadas, gravações áudio e vídeo, questionários e análise documental, tendo a investigadora assumido o papel de observadora participante. Durante o estudo procurou-se compreender a forma como os participantes desenvolveram o pensamento algébrico, procedendo à análise dos dados de forma indutiva, o que levou a uma categorização dos mesmos, permitindo assim compreender aspetos como as estratégias utilizadas pelos alunos e dificuldades emergentes do seu trabalho.

Conclusões do estudo

Aspetos do pensamento algébrico evidenciados em contextos visuais

Neste ponto, são discutidos alguns aspetos reveladores da emergência do pensamento algébrico no trabalho realizado pelos alunos caso, fazendo-se referência à turma sempre que se achar pertinente. Optou-se por evidenciar três processos destacados na literatura: exploração de padrões e relações; generalização; e simbolização.

Padrões e relações

Padrões de repetição. O Daniel e o André revelaram facilidade em reconhecer a existência de regularidades e em estabelecer relações na exploração de padrões de repetição (Tarefa *Rãs e nenúfares*). Os alunos continuaram o padrão e identificaram a unidade de repetição, mostrando-se capazes de reconhecer a estrutura do padrão, descobrir relações entre os vários termos e a ordem que ocupavam na sequência, aplicando uma regra para descobrir diversos elementos da mesma. Os alunos caso, assim como a maioria dos alunos da turma, foram capazes de identificar a unidade de repetição, facto considerado fundamental por Threlfall (1999) no trabalho com padrões de repetição, pois contribui para o desenvolvimento da capacidade de generalizar e do pensamento algébrico. Os alunos caso, tiveram, no entanto, desempenhos diferentes em situações de continuação do padrão de repetição, optando ou pela unidade de repetição completa ou pela sua subdivisão (Threlfall, 1999). Contudo, as suas opções revelaram algumas dificuldades na transição entre a identificação de valores próximos e distantes, uma vez que o Daniel considerou o grupo de repetição completo para valores mais baixos de variável independente, enquanto que em valores mais altos consideram-no incompleto. Já o André, em valores próximos considerou o grupo de repetição incompleto, enquanto que em valores distantes considerou não existir o último grupo de repetição que estava incompleto.

Padrões de crescimento. O Daniel, inicialmente, revelou algumas dificuldades nas tarefas com padrões de crescimento, nomeadamente na tarefa *Smiles*. O aluno não foi capaz de compreender a estrutura do padrão, baseando-se apenas num raciocínio de tipo recursivo. Não reconheceu relações nas figuras da sequência, entendendo-as como meros objetos, recorrendo, dentro da perceção visual, à perceção sensorial (Rivera & Becker, 2008). Contudo, nas tarefas seguintes, o aluno percebeu as vantagens da adoção de uma abordagem visual e recorreu, dentro da perceção visual, à perceção cognitiva, reconhecendo relações nas figuras que compunham a sequência, revelando compreender a estrutura do padrão (Rivera & Becker, 2008). Por sua vez, o André, nas tarefas *Smiles*, Os *Z's* e *A moldura* também percecionou as figuras da sequência de forma cognitiva, identificando a existência de relações entre as variáveis dependente e independente e, consequentemente, a estrutura do padrão (Rivera & Becker, 2008). Contudo, na tarefa *A moldura*, a regra que entendeu como representativa das relações entre as duas variáveis não correspondia ao contexto apresentado. Na tarefa *Os lugares*, o André revelou-se incapaz de identificar a estrutura do padrão, salientando-se que não se centrou na sua estrutura visual, mas sim no contexto numérico, recorrendo à diferença entre termos consecutivos.

Apesar de terem evidenciado algumas dificuldades nas tarefas que envolveram exploração de padrões, verificou-se que os alunos recorreram a ferramentas que se revelaram úteis na criação, interpretação e representação de generalizações como a continuação do padrão, a análise da variação ao longo dos termos da sequência, a utilização de simbologia para criar e expressar a generalização, favorecendo assim o desenvolvimento do pensamento algébrico (Billings, 2008).

A forma de ver o padrão. Rivera e Becker (2008) afirmam que a investigação demonstra que ao observar um mesmo padrão existe uma tendência para este ser visto de diferentes formas pelos observadores, o que leva à produção de diferentes generalizações. Neste estudo, verificou-se este facto apenas nas tarefas *Os Z's* e *A moldura*, em que a forma como visualizaram as figuras variou levando à formulação de expressões numéricas diferentes que se basearam nas diferentes conceções das relações parte-parte-todo (Vale et al., 2011a). Nas outras tarefas de sequências e problemas com padrões, apesar do padrão poder dar lugar a diferentes interpretações, os alunos que conseguiram identificar a sua estrutura fizeram-no da mesma forma.

Generalização

Capacidade de generalizar. Os alunos caso foram capazes de generalizar, quer padrões de repetição quer de crescimento, na medida em que reconheceram, de forma explícita, o que existia de semelhante em termos específicos da sequência, tendo conseguindo ainda elevar esse raciocínio a um foco que deixou de estar centrado nos termos considerados inicialmente, passando para termos distantes (Kaput, 1999). Numa outra perspetiva, compreenderam o que existe de comum entre alguns termos em particular, encontrando uma propriedade ou relação invariante, que aplicaram de seguida a todos os termos da sequência (Radford, 2006). Nestes casos, os alunos revelaram flexibilidade de pensamento, competência considerada fundamental para desenvolver a capacidade de generalizar, pois conseguiram abstrair-se de um caso específico, encontrando uma a regra geral (English & Warren, 1998; Smith et al. 2007). Contudo, não foram capazes de o fazer em todas as tarefas. O Daniel revelou claramente flexibilidade de pensamento e capacidade de generalizar nas tarefas *Nenúfares e rãs*, *Z's*, *Os lugares* e *A moldura* enquanto o André apresentou nas tarefas *Nenúfares e rãs, Smiles*, *Z's* e *A moldura*.

Tipo de generalização. De uma forma geral, os alunos da turma revelaram maior facilidade na generalização próxima do que na generalização distante. Na segunda, os alunos que se sustentaram em abordagens não visuais evidenciaram muitas dificuldades em conseguir generalizar. Apenas os que optaram por abordagens visuais conseguiram generalizar para termos distantes. Os alunos caso mostraram mais facilidade na generalização distante do que a maioria dos alunos da turma pois, nas tarefas supracitadas, recorreram a estratégias de natureza visual, tendo conseguido compreender a estrutura do padrão e, a partir daí, generalizar para valores distantes. O André e o Daniel, assim como os restantes alunos, apresentaram preferência pela generalização construtiva, sendo que apenas na tarefa *A moldura* alguns alunos, entre os quais o Daniel, recorreram à generalização desconstrutiva, tal como referido na literatura (Barbosa, 2010; Rivera & Becker, 2008). Esta preferência poderá estar relacionada com o facto de a generalização desconstrutiva implicar, ao nível da visualização, um nível cognitivo superior.

Assim, com base nos aspetos discutidos, pode-se afirmar que, neste estudo, e apesar das dificuldades evidenciadas, tarefas que envolvem a exploração de padrões em contextos figurativos/visuais fomentaram o desenvolvimento da capacidade de generalizar.

Simbolização

Ao longo das tarefas verificou-se que os alunos que recorreram a estratégias de natureza não visual evidenciaram mais dificuldades nas questões de generalização distante e não conseguiram apresentar uma expressão algébrica que traduzisse a generalização. Aqueles que apresentaram uma expressão algébrica que traduzia a generalização usaram estratégias visuais, nomeadamente a estratégia explícita. Verificou-se que as expressões algébricas formuladas traduziam a forma de *ver* as figuras e que os alunos entendiam as relações simbólicas apresentadas, manipulando com maior facilidade esses símbolos, tal como defendem Rivera e

Becker (2005). Contudo, nem todos os alunos, que em questões anteriores recorreram a este tipo de estratégia, foram capazes de generalizar algebricamente, o que revela dificuldades na manipulação simbólica. Neste estudo, os alunos evidenciaram algumas dificuldades na generalização distante, especialmente na formulação da expressão algébrica da mesma, ou seja, na escrita simbólica de uma generalização, dificuldade que já tinha sido identificada na literatura (English & Warren, 1998; Pereira & Saraiva, 2010). Esta dificuldade na formulação de expressões algébricas era expectável na medida em que os alunos não tinham experiências nestes contextos, sendo a primeira vez que trabalhavam com o conceito de variável. Tal como descrito na literatura por English e Warren (1998), os alunos revelaram mais facilidade em expressar uma generalização verbalmente do que simbolicamente. Na tarefa *Nenúfares e rãs* o Daniel e o André, assim como a maioria dos alunos da turma, apesar de conseguirem expressar a generalização do padrão por palavras não conseguiram transpor essa informação para uma expressão algébrica que traduzisse a generalização. No entanto, é de salientar que, ao longo da aplicação das tarefas, apesar de existirem alunos que não foram capazes de generalizar algebricamente, verificou-se alguma evolução na capacidade de manipulação simbólica, o que sugere que tarefas com padrões para além de poderem ser atividades introdutórias ao simbolismo algébrico (Radford, 2006), podem potenciar o desenvolvimento do simbolismo associado ao pensamento algébrico (Vale, 2011).

Estratégias de generalização em contextos visuais

Ao longo da proposta didática implementada no estudo, os alunos exploraram tarefas de contagens visuais, sequências de repetição e de crescimento e problemas com padrões, o que implicou a aplicação de estratégias quer de contagem quer de generalização.

Categorização das estratégias de contagem. Nas tarefas iniciais que envolviam contagens visuais, verificou-se que o Daniel e o André, tal como grande parte dos alunos da turma, recorreram unicamente a estratégias de natureza visual, quase na totalidade envolvendo subitizing conceptual. Reconheceram padrões na disposição dos elementos de cada figura, identificando que o todo resultava da composição das várias partes. Nestas situações, que evidenciaram o subitizing conceptual, é de salientar que as figuras foram observadas de formas diferentes, já que os alunos reconheceram várias disposições dos padrões através da composição de diferentes agrupamentos. Os arranjos identificados têm por base a conceptualização de cada aluno das relações parte-parte-todo (Vale et al., 2011a). Assim, na mesma figura, foram reconhecidos diferentes agrupamentos, de acordo com a forma de *ver*, tendo sido realçadas disposições lineares na horizontal, na vertical e na diagonal, e disposições por grupos, onde apareceram frequentemente arranjos retangulares. Estas diferentes visualizações das figuras permitiram obter uma grande diversidade de expressões numéricas que traduziam várias formas de *ver*, mas que eram equivalentes, concordante com os resultados apresentados por Vale e colaboradores (2011a). No que refere aos alunos da turma, surgiram pontualmente situações em que recorreram a estratégias de contagem de natureza não visual, nomeadamente à contagem um a um. Nestas tarefas de contagens visuais também emergiram, de forma pouco significativa, estratégias de contagem mistas pois, apesar de recorrerem ao subitizing conceptual, ao reconhecer padrões na disposição dos elementos, formaram grupos de modo a encontrarem números de referência, como o dois e o cinco, na perspetiva de facilitar o cálculo mental. Esta procura de números de referência também é reconhecida por Vale e colaboradores (2011a).

Categorização das estratégias de generalização. Neste estudo, os alunos da turma utilizaram várias estratégias de generalização, nomeadamente: contagem, recursiva, parte unidade, múltiplo da diferença, tentativa e erro e explícita. Assim, verifica-se que tarefas que envolvam padrões em contextos figurativos permitem e facilitam o recurso a múltiplas estratégias de generalização na resolução da mesma tarefa, tal como é referido por vários autores em estudos que privilegiaram a exploração de padrões figurativos (Barbosa, 2011; Becker & Rivera, 2005; García-Cruz & Martinón, 1997; Lannin, 2005; Lannin et al., 2006; Rivera & Becker, 2008). Destas estratégias, verificou-se que o Daniel utilizou todas com a exceção da estratégia contagem, enquanto que o André usou as estratégias recursiva, múltiplo da diferença, parte unidade e explícita.

As estratégias e o nível de generalização – próxima e distante. Nas questões de generalização próxima, o Daniel usou as estratégias parte unidade, recursiva e explícita, enquanto que o André utilizou as estratégias recursiva e explícita. Nenhum dos alunos caso recorreu à estratégia contagem, que foi muito frequente na resolução de questões de generalização próxima por parte dos outros alunos da turma. Em questões deste nível predominaram as estratégias contagem e recursiva. Nas questões de generalização distante o Daniel utilizou as estratégias recursiva, tentativa e erro e explícita e o André recorreu às estratégias recursiva, parte unidade, múltiplo da diferença e explícita. Neste tipo de questões, a estratégia dominante nos alunos caso, tal como na turma, foi a explícita, tal como sucedeu no estudo de Barbosa (2010). Contudo, nos resultados da turma verificou-se que na tarefa *Smiles* também surgiu com frequência a estratégia recursiva, sendo estes resultados concordantes com o que Orton e Orton (1999) defendem, enquanto que na tarefa *Os lugares* surgiram várias, como a recursiva, parte unidade e múltiplo da diferença, sem uma dominância clara. É de salientar que, ao longo de todas as tarefas com sequências e problemas com padrões, surgiram estratégias não possíveis de categorizar, ou porque o raciocínio apresentado não estava claro ou porque não resolveram a questão, sendo mais evidente nas questões de generalização distante nas tarefas *Smiles*, *Os Z´s* e *Os lugares*. Este facto revela dificuldades por parte dos alunos nas tarefas que envolvem sequências nomeadamente nas questões de generalização distante.

As estratégias e o tipo de generalização – construtiva e desconstrutiva. Na quase totalidade das tarefas de contagem, predominaram estratégias baseadas na ideia de construção da figura como resultado da reunião de todos os elementos. Contudo, na tarefa *A coleção de moedas*, o André, tal como alguns alunos da turma, recorreu a uma estratégia baseada na ideia de desconstrução da figura, identificando o todo como junção das partes mas sendo necessário um processo de subtração dos espaços sem moedas. Também na tarefa *Os berlindes do Carlos*, um dos alunos da turma socorreu-se desta ideia de desconstrução da figura, já que a visualizou com sobreposição dos berlindes centrais, procedendo de seguida a um ajuste de cálculo, retirando os elementos repetidos. Tal como é referido na literatura (Barbosa, 2010; Rivera & Becker, 2008), nas tarefas que envolviam sequências e problemas com padrões predominaram também as estratégias de generalização de tipo construtivo. Os alunos recorreram a generalizações de natureza construtiva, procedendo à decomposição da estrutura do padrão em partes disjuntas. Apenas na tarefa *A moldura* o Daniel, e alguns alunos da turma, recorreram a uma generalização de natureza desconstrutiva, identificando a moldura composta por quatro conjuntos com o mesmo número de azulejos, procedendo de seguida à subtração dos cantos que estavam sobrepostos.

Adequação das estratégias de generalização utilizadas. Em questões de generalização distante, as estratégias utilizadas pelos alunos nem sempre foram apropriadas ao tipo de questão. Na tarefa *Smiles* o Daniel recorreu à estratégia recursiva, que se revelou demasiado extensa. Como forma de contornar a morosidade da recursão, o Daniel associou-lhe a estratégia múltiplo da diferença com ajuste. Também o André recorreu ao raciocínio recursivo na tarefa *Os lugares,* associado a outras estratégias como a parte unidade com ajuste, para tornar mais expedita a resolução. Verificou-se que os alunos da turma, nas tarefas *Nenúfares e rãs*, *Smiles* e *Os lugares* recorreram à estratégia recursiva, que se mostrou desadequada pela sua morosidade, tendo também associado a outras estratégias de forma a diminuir a morosidade. Contudo, em questões de generalização próxima, as estratégias utilizadas pelo Daniel e pelo André, assim como pelos restantes alunos, revelaram-se adequadas.

Sucesso das estratégias de generalização tendo em conta a sua natureza – visual e não visual. Verificou-se que em questões de generalização próxima foram utilizadas estratégias de natureza visual e não visual, sendo que, em ambos os casos, o Daniel e o André, tal como os alunos da turma, conseguiram ser bem sucedidos. Em questões de generalização distante concluiu-se que, quando o Daniel e o André, assim como alguns alunos da turma, basearam o seu raciocínio no contexto figurativo/visual, recorrendo a estratégias de natureza visual, como a explícita, obtiveram mais sucesso do que os alunos que se basearam no contexto numérico, recorrendo a estratégias não visuais, como a recursiva, a parte unidade e múltiplo da diferença. Assim, verificou-se que a visualização constituiu um meio facilitador da generalização e do desenvolvimento do pensamento algébrico, tal como é referido na literatura (Barbosa, 2010; Mason, 1996). Verificou-se também que os alunos que recorreram a estratégias de natureza não visual, suportaram o seu raciocínio no contexto numérico, desvalorizando o contexto figurativo enquanto que os que recorriam a estratégias de natureza visual valorizaram o contexto figurativo e compreenderam relações existentes no padrão, o que lhes permitiu apresentar melhor desempenho, estando de acordo com os resultados obtidos por Lannin (2005), Rivera e Becker (2005) e Vale e Pimentel (2005). Tal como é referido por Lannin et al. (2006), concluiu-se que os alunos que se basearam na visualização do padrão que compunha a sequência, revelaram compreensão da relação existente entre as variáveis dependente e independente, enquanto que os alunos que se basearam no contexto numérico desvalorizaram as relações que surgiam do contexto apresentado, tendo maiores dificuldades em compreender a relação existente entre as duas variáveis. As regras formuladas pelos alunos que usaram estratégias de natureza visual eram uma clara indicação da forma como foram visualizadas as figuras que compunham a sequência (Rivera & Becker, 2005). Nestes casos, dentro da perceção visual, os alunos recorreram à perceção cognitiva, uma vez que foram capazes de reconhecer a existência de relações nas figuras e assim compreender a estrutura do padrão (Rivera & Becker, 2008).

Escolha das estratégias de generalização. Nas tarefas em que o Daniel e o André valorizaram a componente visual do padrão e conseguiram analisar a sua estrutura, recorreram sempre à estratégia explícita, deduzindo uma regra representativa da relação entre as variáveis dependente e independente, tendo por base a forma como visualizaram a figura. Tal como é referido por Lannin et al. (2006), verificou-se que valores elevados (generalização distante) propiciam uma maior utilização da estratégia explícita. Contudo, quando os alunos caso, assim como outros alunos da turma, basearam o seu raciocínio no contexto figurativo e conseguiram identificar a relação entre as variáveis dependente e independente, utilizaram, quase sempre, a estratégia explícita também em valores próximos (generalização próxima). Em questões de generalização distante, verificou-se que, quando os alunos da turma se basearam no contexto numérico, sempre que o padrão era linear, predominou o raciocínio recursivo. Quando o padrão era quadrático, muitos dos alunos preferiram a estratégia recursiva porque a diferença entre termos consecutivos não era constante, tendo evidenciado dificuldades em encontrar uma estratégia adequada, registando-se muitas estratégias não categorizáveis e que não permitiram resolver estas questões. O Daniel e o André não sentiram estas dificuldades porque se basearam na visualização e recorreram à estratégia explícita. Segundo Lannin et al. (2006), os alunos com dificuldades de visualização socorrem-se da estratégia tentativa e erro para realizar generalizações (distantes). Contudo, neste estudo este facto não se verificou já que esta estratégia foi pouco utilizada. Apenas se evidenciou nas questões que envolviam reversibilidade de pensamento.

Dificuldades evidenciadas em contextos visuais

Tarefas de Contagens Visuais. Nas tarefas iniciais de contagens visuais, tanto o Daniel como o André, assim como vários alunos da turma, apesar de serem capazes de interpretar o contexto figurativo apresentado, ao traduzir a figura para uma expressão numérica frequentemente trocaram a ordem dos fatores nas multiplicações. Nessas situações, revelaram dificuldades em apresentar uma expressão numérica que traduzisse esse contexto, não conseguindo estabelecer totalmente um paralelismo entre a componente visual e a componente numérica. Verificou-se que estes alunos, apesar de recorrerem a estratégias de contagem de natureza visual, como a explícita, apresentaram alguma tendência para o trabalho em contexto numérico, descontextualizado da representação, já que manifestaram dificuldades em trabalhar em contexto figurativo, nomeadamente em passar para o contexto numérico aquilo que visualizaram numa figura. Na tarefa *A coleção de moedas* foram evidentes as dificuldades dos alunos em contexto figurativo, na medida em que, a grande maioria, incluindo os alunos definidos como caso, não conseguiram interpretar o significado da expressão numérica apresentada tendo por base a visualização da figura (questão 3). Os alunos apresentaram dificuldades em manipular os números associados a um contexto figurativo, sendo que o facto de não estabelecerem um paralelismo entre a componente visual e a numérica aumentam este obstáculo. Contudo, destaca-se um pequeno grupo de alunos que demonstrou maior facilidade no contexto figurativo já que conseguiu identificar, na figura, a visualização que correspondia à expressão numérica apresentada, fundamentando o seu significado. Na tarefa *Qual tem mais estrelas?* o André e o Daniel, tal como a maioria dos alunos da turma, sentiram mais dificuldades na contagem do cartão D, o que é coerente com a literatura sobre o tema, já que se afirma que a disposição aleatória de elementos é considerada como mais difícil para realizar o subitizing (Clements, 1999). Nas tarefas de contagens visuais, o André, tal como vários alunos da turma, apenas foi capaz de reconhecer que as diferentes expressões numéricas obtidas eram equivalentes, enquanto que o Daniel, e alguns alunos da turma foram, capaz de reconhecer que eram equivalentes e que resultavam de diferentes processos de contagem.

Sequências e Problemas com padrões. Neste tipo de tarefas, verificou-se que vários alunos apresentaram dificuldades na análise da estrutura do padrão, não conseguindo identificar relações entre as variáveis dependente e independente, baseando o seu raciocínio no contexto puramente numérico, o que dificultou a abordagem às questões de generalização distante. Na tarefa *Smiles* o Daniel, assim como a maior parte dos alunos da turma, demonstrou dificuldades na visualização e no trabalho em contexto figurativo, já que não conseguiu interpretar o significado das expressões numéricas apresentadas, tendo por base a visualização da sequência. Na mesma tarefa, o André e outro aluno da turma foram capazes de identificar na sequência o significado das expressões numéricas apresentadas. É de salientar a natureza das estratégias de generalização utilizadas em cada um dos casos descritos anteriormente. O Daniel, que não conseguiu interpretar o significado das expressões dadas, recorreu a estratégias de generalização de natureza não visual, desvalorizando o contexto figurativo, enquanto que o André, que tinha recorrido a estratégias de generalização do tipo visual, conseguiu dar significado às expressões apresentadas.

Nível de generalização – próxima e distante. Os alunos da turma revelaram mais dificuldades em definir uma estratégia de generalização para valores distantes do que para valores próximos. A esta dificuldade pode-se associar as dificuldades que tiveram em analisar o padrão e em visualizar a sua estrutura. Os alunos que se basearam em contextos numéricos, desvalorizando a componente figurativa e as relações que daí advinham, utilizaram estratégias para a generalização próxima que não conseguiram aplicar nas questões de generalização distante, como é o caso da recursiva, como se verificou no caso do Daniel. Na tarefa *Smiles,* este aluno baseou-se num raciocínio recursivo, tendo usado a estratégia múltiplo da diferença nas questões de generalização distante, para contornar a morosidade da recursão. Apoiou o seu raciocínio no contexto numérico, em detrimento do figurativo, o que não lhe permitiu resolver algumas questões de generalização distante. O mesmo aluno, na tarefa *Os lugares,* baseou o seu raciocínio no contexto figurativo, valorizando as relações que as figuras evidenciavam, facto que lhe permitiu resolver com sucesso as questões de generalização próxima e distante apresentadas. É de referir que, na turma, em questões de generalização distante surgiram muitas estratégias que não foram possíveis de categorizar e que não permitiram aos alunos responder de forma correta às questões apresentadas.

Tipo de padrão e as dificuldades de visualização. Verificou-se que quando o padrão presente na tarefa era quadrático, os alunos revelaram maiores dificuldades na sua análise e na compreensão da variação entre os termos da sequência. Na tarefa *Os Z's*, que evidenciava um padrão quadrático, verificou-se ser complexo para o André e para alguns alunos continuar a sequência de forma correta, uma vez que revelou dificuldades em compreender e identificar a estrutura do padrão, pois as figuras variavam em comprimento e em altura. Assim, os alunos apresentaram maior sucesso nas tarefas que envolviam padrões de crescimento lineares, tal como é referido por Orton e Orton (1999). Os alunos apresentaram maiores dificuldades em analisar a estrutura do padrão em padrões de crescimento do que nos padrões de repetição. No padrão de repetição (Tarefa *Nenúfares e rãs*) o Daniel e o André, como quase todos os alunos da turma, conseguiram identificar a estrutura do padrão e reconhecer o motivo que se repetia na sequência. Como já se referiu, nos padrões de crescimento (Tarefas *Smiles, Os Z's, Os lugares*, *A moldura*), os alunos manifestaram mais dificuldades na análise da estrutura do padrão e na identificação de relações entre as variáveis dependente e independente. Tal como defende Threlfall (1999), em situações de continuação do padrão de repetição os alunos evidenciaram comportamentos diferentes. Assim, tendo em conta esta situação, o Daniel considerou a unidade de repetição incompleta. No caso do André, em questões que envolviam valores próximos, considerou a existência do grupo de repetição incompleto, enquanto que em questões de generalização distante, em que não recorreu à representação, não considerou que existisse o grupo de repetição incompleto. Esta situação revela que o André apresentou dificuldades na transição entre a identificação de valores próximos e de valores mais distantes. Na turma verificaram-se também dificuldades já que, em questões de generalização próxima, quase todos os alunos consideraram o grupo de repetição completo, enquanto que em questões de generalização distante consideraram o grupo de repetição incompleto.

Reversibilidade de pensamento. Nas tarefas *Nenúfares e rãs*, *Smiles, Os Z's e A moldura, o* André e o Daniel, tal como os alunos da turma, revelaram dificuldades nas questões que envolviam a reversibilidade de pensamento, as quais requeriam a utilização de operações inversas. O Daniel foi capaz de utilizar o raciocínio inverso apenas na tarefa *Nenúfares e rãs,* enquanto que o André usou a reversibilidade de pensamento nas tarefas *Nenúfares e rãs*, *Smiles e A moldura*. Salienta-se o facto de, apenas nas tarefas em que utilizaram a estratégia explícita, terem conseguido responder às questões de reversibilidade de pensamento. Estas dificuldades tinham já sido identificadas por Warren e Cooper (2008a), podendo estar relacionadas com o facto de estas questões basearem-se na relação entre as variáveis independente e dependente e porque exigem uma boa compreensão das relações numéricas.

Razões que poderão explicar as dificuldades evidenciadas em contextos visuais

O facto de o Daniel e o André, assim como outros alunos da turma, não estabelecerem um paralelismo entre a componente visual e a numérica poderá estar relacionado com uma forte habituação à manipulação dos números sem um contexto figurativo associado. Numa abordagem puramente numérica, considerando a propriedade comutativa, a ordem dos fatores não altera o valor do produto. Esta situação revela uma valorização do contexto numérico em detrimento do figurativo

Os obstáculos sentidos pelos alunos na análise da estrutura do padrão e na identificação de relações entre as variáveis dependente e independente, nas tarefas que envolveram sequências e problemas com padrões, poderão estar relacionadas com o facto de terem dificuldades em identificar a estrutura visual do padrão e em descobrirem um modo de contagem baseado na visualização. Apesar de nas tarefas iniciais de contagem, terem encontrado diferentes formas de *ver,* que conduziram a expressões numéricas diferentes mas equivalentes, não conseguiram transpor esse raciocínio para as tarefas que envolviam sequências e fazer o mesmo nas figuras que as compunham. Os alunos revelaram bastantes dificuldades em *ver* o padrão e em analisar a estrutura do mesmo. Para Lee e Freiman (2006) o primeiro passo na exploração de padrões é *ver* o padrão, tendo em conta que existe uma multiplicidade de formas de *ver*. As dificuldades dos alunos que não conseguiram analisar a estrutura do padrão prenderam-se com este primeiro fator, já que não conseguiram visualizar o padrão e traduzir a sua estrutura numa expressão numérica. Radford (2008) considera que a generalização algébrica se inicia com a identificação de uma regularidade local, em alguns membros da sequência, o que implica que exista um reconhecimento entre o que se mantém igual e o que é diferente. As dificuldades evidenciadas pelos alunos neste âmbito também poderão estar relacionadas com o facto de não terem conseguido identificar essa regularidade de figura para figura e não conseguirem reconhecer o que se mantinha igual e diferente. Estes fatores são visíveis se comparamos o desempenho do

Daniel em duas tarefas que envolviam sequências de crescimento. Na tarefa *Smiles*, revelou bastantes dificuldades em resolver as questões de generalização distante, possivelmente por ter desvalorizado o contexto figurativo. Na questão em que era pedido que o aluno descrevesse a 4.ª figura, apenas se limitou a desenhá-la não se tendo centrado na estrutura visual do padrão. O aluno não procurou *ver* o padrão, como referem Lee e Freiman (2006), de forma a descobrir um modo de contagem que o conduzisse à descoberta de uma expressão numérica que facilitasse a generalização distante, nem conseguiu identificar uma regularidade local em alguns membros da sequência, reconhecendo o que se mantém igual e o que é diferente (Radford, 2008). O Daniel focou-se na diferença numérica entre termos consecutivos, valorizando apenas o contexto numérico, o que lhe trouxe muitas dificuldades. Na tarefa *Os Z's* o aluno teve uma abordagem completamente diferente, valorizando o contexto figurativo tendo conseguido resolver as questões com sucesso. Começou por *ver* o padrão, descobrindo um modo de contagem que o conduziu a uma expressão numérica, reconhecendo o que se mantém igual e o que variava, identificando uma regularidade.

Os resultados apresentados sugerem dificuldades dos alunos na visualização. As dificuldades evidenciadas no trabalho em contexto figurativo pelos alunos definidos como caso, assim como pelos outros alunos da turma, poderão também estar relacionadas com a falta de experiências neste contexto, tal como é referido na literatura (Vale et al., 2011a).

Reflexões Finais

Implicações para a prática profissional

A concretização deste estudo contribuiu de forma significativa para o desenvolvimento profissional da investigadora. Todo o trabalho que se realizou ao longo desta investigação, desde o delinear dos objetivos do estudo, a recolha bibliográfica, as opções metodológicas, a elaboração e aplicação da proposta didática, a recolha e análise dos dados envolvidos num profundo processo de reflexão, permitiram aprofundar os conhecimentos ao nível da didática da matemática e dos tópicos matemáticos.

Tem sido defendida a introdução do pensamento algébrico desde os primeiros anos (Kaput, 1999). Esta investigação permitiu verificar que o pensamento algébrico pode ser explorado desde cedo, através de tarefas que envolvam a exploração de padrões, e que uma abordagem de natureza figurativa facilita o seu desenvolvimento de forma sustentada. Assim, tarefas em contextos figurativos revelaram-se potenciadoras do desenvolvimento do pensamento algébrico baseado na generalização de padrões tal como defendiam Vale et al. (2011a). Concluiu-se que este tipo de tarefas promove a utilização de diversas estratégias, sendo que alguns alunos enveredam por uma abordagens não visuais enquanto que outros se socorreram de abordagens visuais. Foi notório que os alunos que suportavam o seu raciocínio no contexto figurativo conseguiram ser mais bem sucedidos e relevaram uma maior compreensão das relações existentes entre as variáveis dependente e independente, conseguindo explicar e justificar as regras apresentadas e expressar relações generalizadas em termos explícitos (Rivera & Becker, 2005). Este facto é concordante com a perspetiva de Mason (1996) que defende que os alunos devem recorrer à visualização para facilitar a generalização. Acredita-se que seja fundamental que os alunos compreendam as vantagens de uma abordagem visual na descoberta de estratégias de generalização, de forma a compreenderem as relações existentes e as expressarem em linguagem algébrica (Barbosa, 2011).

Apesar das dificuldades evidenciadas na manipulação simbólica, os resultados do estudo sugerem vantagens na utilização de tarefas que envolvem a exploração de padrões, como atividades introdutórias ao simbolismo algébrico, como sugere Radford (2006). Estas tarefas, envolvendo generalização de padrões em contexto figurativo, revelaram-se potenciadoras do desenvolvimento do simbolismo associado ao pensamento algébrico (Vale, 2011), fomentando a transição do pensamento numérico para o algébrico (Vale et al. 2011b) e promovendo o salto abstrato entre os números e as variáveis (Beigie, 2011).

Recomendações para futuras investigações

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) introduziu a Álgebra como tema programático no 2.º e 3.º ciclos, existindo também uma iniciação ao pensamento algébrico no 1.º ciclo. Vale et al. (2011a), defendem que as tarefas apresentadas em contexto figurativo são um bom ponto de partida para o desenvolvimento do pensamento algébrico e consideram a visualização como crucial na aprendizagem da Matemática. Tendo em conta estes pressupostos, seria interessante realizar um estudo semelhante a este mas noutro nível de ensino, nomeadamente no 1.º ciclo. Tendo em conta que estes alunos apresentavam falta de experiências prévias com padrões em contextos figurativos, e como este é um factor potenciador de dificuldades na transição da aritmética para a álgebra (Vale et al., 2011a), seria pertinente estudar os resultados de um estudo, com objetivos semelhantes, realizado com alunos com experiência na realização deste tipo de tarefas.

Este estudo estava focalizado no desenvolvimento do pensamento algébrico em contextos visuais, nomeadamente nas estratégias de generalização e nas dificuldades apresentadas pelos alunos. Atendendo à perspetiva de Kaput et al. (2008) que defendem que a simbolização e a generalização estão no coração do pensamento algébrico, seria pertinente investigar o sentido de símbolo no 2.º ciclo do ensino básico.

Atendendo ao facto de a visualização estar a adquirir um papel central em aprender e fazer matemática, sendo reconhecida como uma componente chave do raciocínio, da resolução de problemas e da demonstração (Arcavi, 2003), considera-se de todo o interesse a realização de mais investigações na área da visualização. Seria pertinente a compreensão de variados aspetos como: Qual a influência das capacidades de visualização na aprendizagem de áreas específicas da Matemática?; Que dificuldades evidenciam os alunos ao nível da visualização?; Quais as potencialidades de um ensino baseado na visualização, não como um fim ilustrativo mas como uma forma de raciocínio?. Estas investigações seriam dotadas de um interesse acrescido na medida em que existem poucas a nível nacional.

Limitações do estudo

Como é natural em qualquer investigação desta natureza, apontam-se algumas limitações neste estudo, estando a principal relacionada com o tempo dedicado à implementação da proposta didática. Atendendo ao facto de os conteúdos abordados integrarem um tópico do *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME-DGIDC, 2007), a aplicação das tarefas esteve condicionada à planificação da disciplina, concentrando-se em duas semanas. O professor titular da turma disponibilizou apenas 5 aulas para este tópico, que acrescidas com 2 do Laboratório de Matemática perfizeram um total de 7 aulas para aplicação da proposta didática. Considera-se que o tempo dedicado ao desenvolvimento da fase empírica foi insuficiente para investigar com profundidade as questões de investigação, que exigiam um trabalho mais continuado e prolongado no tempo. Entende-se que um trabalho desta natureza, tendo em conta o seu design, requeria mais tempo, tornando-se mais longitudinal o que permitiria compreender o fenómeno em estudo de forma mais pormenorizada. Reconhece-se também que esta investigação teria sido enriquecida se fosse possível a implementação de mais tarefas no âmbito das diferentes fases afetas à proposta didática, nomeadamente tarefas que envolvessem padrões de repetição e padrões de crescimento lineares.

Aquando da aplicação do estudo, a investigadora assumiu o duplo papel de investigadora e professora da turma, recorrendo a uma observação participante, que lhe permitiu envolver-se no contexto, contribuindo para uma maior compreensão do fenómeno em estudo, mas que também trouxe alguns constrangimentos, nomeadamente no registo sistemático das observações realizadas, assim como no dosear entre a observação e a participação. Contudo, considera-se que esta foi a forma mais apropriada para perceber e interpretar os fenómenos.

Salienta-se que este estudo não tinha a pretensão de generalizar resultados, mas sim compreender um fenómeno como a caracterização do pensamento algébrico de alunos do 6.º ano de escolaridade no âmbito de contextos visuais. Destaca-se, ainda, que as conclusões deste estudo enquadram-se no contexto em que o mesmo decorreu e estão estritamente relacionadas com a turma que nele participou, em particular com os dois alunos que constituíram os casos. Assim, esta investigação não pretendeu chegar a generalizações mas sim compreender um fenómeno específico. Apesar das conclusões do estudo não poderem ser generalizadas a outras realidades, podem constituir um importante contributo para a compreensão global da temática quando a mesma for analisada noutros contextos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 20-47). Lisboa: SPCE.

Barbosa, A. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico.* Dissertação de Doutoramento, Universidade do Minho, Portugal.

Barbosa, A. (2011). Generalização de padrões em contextos visuais: um estudo no 6.º ano de escolaridade. In M. H. Martinho, R. Ferreira, I. Vale, & J. P. Ponte (Eds.), *Actas do EIEM 2011* (pp. 327-345). Póvoa de Varzim: SPCE.

Becker, J., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. In H. Chick, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 4*, pp. 121-128. Melbourne: PME.

Beigie, D. (2011). The leap from patterns to formulas. *Mathematics teaching in the middle school, 16* (6), 328-335.

Billings, E. (2008). Exploring generalization through pictorial growth patterns. In C. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 279-194). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Billings, E., Tiedt, T., & Slater, L. (2007). Algebraic thinking and pictorial growth patterns. *Teaching Children Mathematics, 14*(5), 302-308.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom pratice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization, a Global Dialogue from Multiple Perspectives Advances in Mathematics Education* (pp. 5-24). Verlag Berlin Heidelberg: Springer.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Porto: Porto Editora.

Clements, D. (1999). Subitizing: What is it? Why teach it? *Teaching Children Mathematics, 5*, 400-405.

Darley, J., & Leapard, B. (2010). Aritmetic to algebra. *Teaching children mathematics, 17*(3) (Focus issue: teaching math in a flat world), 184-191.

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática.* Lisboa: Gradiva.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (2003). Introduction: The discipline and pratice of qualitative research. In N. Denzin, & Y. Lincoln (Eds.), *The landscape of qualitative research: Theories and issues* (pp. 1-46). Thousand Oaks, California: Sage Publications.

Devlin, K. (2002). *Matemática: A ciência dos padrões.* Porto: Porto Editora.

Doyle, W. (1988). Work in Mathematics Classes: The Context of Students' Thinking During Instruction. *Educational Psychologist, 23*(2), 167-180.

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, pp. 33-48.

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: a guide for teachers, grades 6-8.* Porstmouth, NH: Heinemann.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana, & V. Villani (Eds.), *Perpectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Dordrecht, Netherlands: Kluver Academic Publishers.

English, L., & Warren, E. (1998). Introducing the variable trough pattern exploration. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking* (pp. 141-149). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: constructing multiplication and division.* Portsmouth: Heinemann.

Friel, S., & Markworth, K. (2009). A framework to analysing geometric pattern tasks. *Mathematics teaching in the middle school, 15*(1), 24-33.

García-Cruz, J. A., & Martinón, A. (1997). Actions and invariant schemata in linear generalising problems. *Proceedings of the XXI Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2*, pp. 289-296. Finland: University of Helsinki.

Hargreaves, M., Threlfall, J., Frobisher, L., & Shorrocks-Taylor, D. (1999). Children's strategies with linear and quadratic sequences. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67-83). London: Cassel.

Huberman, M., & Miles, M. (1994). Data Management and Analysis Methods. In N. Denzin, & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 428-441). Newbury Park, CA: Sage Publications.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J., Blanton, M., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-55). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: the role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante, XVI*(1), 5-26.

Lannin, J. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and learning, 7*(3), 231-258.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic Generalisation Strategies: Factors Influencing Student Strategy Selection. *Mathematics Education Research Journal 18*(3), 3-28.

Lee, L., & Freiman, V. (2006). Developing algebraic thinking through pattern exploration. *Mathematics teaching in the middle school, 11*(9), 428-433.

Lincoln, Y., & Guba, E. (2000). Paradigmatic Controversies, Contradictions, and Emerging Confluences. In N. Denzin, & I. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 163-188). Thousand Oaks CA: Sage Publications.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Aproaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordretch, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and Using Mathematical Tasks.* St. Albans, U.K.: Tarquin.

ME-DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Moyer-Packenham, P. (2005). Using Virtual Manipulatives to Investigate Patterns and Generate Rules in Algebra. *Teaching Children Mathematics, 11*(8), 437-444.

NCTM. (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: APM.

Orton, J. (1999). Children's perception of pattern in relation to shape. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematicas* (pp. 149-167). London: Cassel.

Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the Approach to Algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern and the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 104-120). London: Cassel.

Orton, J., Orton, A., & Roper, T. (1999). Pictorial and Pratical Contexts and the Perception of Pattern. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 121-136). London: Cassel.

Patton, M. (2002). *Qualitative evaluation and research methods* (3rd Ed.). Thousand Oaks: Sage.

Pereira, M., & Saraiva, M. (2010). A escrita simbólica de uma generalização. *Educação e Matemática, 107*, 28-35.

Pimentel, T., Vale, I., Fão, A., Alvarenga, D., & Freire, F. (2010). *Matemática nos primeiros anos - Tarefas e Desafios para a sala de Aula.* Lisboa: Texto Editores.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante, 3*(1), 3-18.

Ponte, J. P. (2005a). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática, 85*, 36-42.

Ponte, J. P. (2005b). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro, *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores – Actas do XIV EIEM* (pp. 5-27). Lisboa: SPCE.

Ponte, J. P. (2009). O novo programa de matemática como oportunidade de mudança para os professores. *Interacções, 12*, 96-114.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. *Educação e Matemática, 100*, 89-96.

Presmeg, N. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the learning of mathematics, 6*(3), 42-46.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 1*, pp. 2-21. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM: International Journal in Mathematics Education, 40*(1), 83-96.

Rivera, F., & Becker, J. (2005). Figural and Numerical Modes of Generalizing in Algebra. *Mathematics teaching in the middle school, 11*(4), 189-203.

Rivera, F., & Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education, 40*, 65-82.

Santos, L. (2002). A investigação e os seus implícitos: Contributos para uma discussão. In J. Murillo, P. M. Arnal, R. Escolano, & J. M. Gairín (Eds.), *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (pp. 157-170). Logroñ: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Sasman, M., Olivier, A., & Linchevski, L. (1999). Factors influencing students' generalization thinking processes. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th International Conference for Psychology of Mathematics Education*, *4*, pp. 161-168. Haifa, Israel: Technion Printing Center.

Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (2007). *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12* (pp. 150-156). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Simon, M., & Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Smith, E. (2003). Stasis and change integrating patterns functions and algebra throughout the k-12 curriculum. In J. Kilpatrick, W. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 136-150). Reston: NCTM.

Smith, M., Hillen, A., & Catania, C. (2007). Using Pattern Tasks to Develop Mathematical Understandings and Set Classroom Norms. *Mathematics teaching in the middle school, 13*(1), 38-44.

Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Stacey, K., & Macgregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & L. Rosamund (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 141-153). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Stake, R. (2009). *A arte da investigação com estudos de caso* (2.ª ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stein, M., & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. *Educação e Matemática, 105*, 22-28.

Taplin, M. (1995). Spacial patterning: A pilot study of pattern formation and generalization. In L. Meira, & D. Carraher (Ed.), *Proceedings of the 19th International Conference for Psychology of Mathematics Education*, *3*, pp. 42-49. Recife, Brazil: Universidade Federal de Pernambuco.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary grades. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). London: Cassel.

Townsend, B. (2005). *Examining secondary student's algebraic reasoning: flexibility and strategy used.* Dissertação de Doutoramento: University of Missouri, EUA.

Trigueros, M., & Ursini, S. (2003). First-year undergraduates' difficulties in working with different uses of variables. In A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel, & F. Hitt (Eds.), *CBMS issues in mathematics education* (pp. 1-29). Providence: American Mathematical Society.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and the uses of variables. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12* (pp. 5-13). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vale, I. (2004). Algumas notas sobre investigação qualitativa em educação matemática: o estudo de caso. In J. Portela, & I. Vale (Eds.), *Revista da Escola Superior de Educação*, 5, 171-202).

Vale, I. (2009). Das tarefas com padrões visuais à generalização. XX SIEM. In J. Fernandes, & F. Viseu(org.), *Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 35-63). Viana do Castelo: APM.

Vale, I. (2011). *Resolução de Tarefas com Padrões em Contextos Figurativos: exemplos de sala de aula.* Obtido em 9 de Janeiro de 2012, de Gterp: http://www2.rc.unesp.br/gterp/sites/default/files/artigos/ivale-palestratexto.pdf

Vale, I. (2012). As tarefas de padrões na sala de aula: um desafio para professores e alunos. *Interacções, 20*, 181-207.

Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L., & Pimentel, T. (2011a). *Padrões em matemática: uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico.* Lisboa: Texto Editores.

Vale, I., Fão, A., Alvarenga, D., Geraldes, F., Sousa, R., & Pimentel, T. (2008). *Matemática no 1.º e 2.º ciclos propostas para a sala de aula.* Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I., & Borralho, A. (2006). Os padrões no ensino e aprendizagem da álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 193-213). Lisboa: SPCE.

Vale, I., & Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal do currículo. *Educação e Matemática, 85*, 14-20.

Vale, I., Pimentel, T., Alvarenga, D., & Fão, A. (2011b). *Uma proposta didática envolvendo padrões (Material de apoio ao PMEB).* Obtido em 15 de setembro de 2011, de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/071_Tarefas_Padroes.pdf

Van de Walle, J., Karp, K., & Bay-Williams, J. (2010). *Elementary & middle school mathematics: teaching developmentally* (7th Ed.). Boston: Pearson Education.

Warren, E., & Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom, 11*(1), 9-14.

Warren, E., & Cooper, T. (2008a). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67*, 171-185.

Warren, E., & Cooper, T. (2008b). Patterns that support early algebraic thinking in the elementary school. In C. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 113-126). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematicas.

Yin, R. (2009). *Case study research: design and methods* (4th Ed.). Los angeles: Sage.

Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 435-457.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 379-402.

ANEXOS

Exmo. Sr. Diretor

do Agrupamento de Escolas ……………...

Venho, por este meio, solicitar a V. Ex.ª autorização para realizar uma investigação na Escola Básica …………………………………… no âmbito do Mestrado em Educação, especialidade Didática da Matemática e das Ciências, que frequento na Escola Superior de Educação – Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Este estudo irá debruçar-se sobre como se caracteriza o pensamento algébrico de alunos do 2.º ciclo no âmbito de contextos visuais e prevê-se que decorra durante o presente ano letivo 2011/2012, sendo aplicado numa turma de 6.º ano de escolaridade (turma …..). Envolve a resolução de tarefas relacionadas com a temática previamente referida, o respetivo registo, observação participante e gravação áudio e vídeo das aulas nas quais serão aplicadas as tarefas. Estas gravações serão utilizadas exclusivamente no estudo em questão, estando preservado o anonimato dos alunos. Serão também realizadas entrevistas a alguns alunos, sempre que necessário, de acordo com a sua disponibilidade. As tarefas a desenvolver estarão de acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico, não afetando por isso a planificação já efetuada.

Sendo-me concedida a autorização para a realização do estudo, será de imediato enviado um pedido formal aos encarregados de educação dos alunos envolvidos informando-os do estudo e do trabalho a desenvolver e solicitando a sua autorização.

Informo igualmente V. Ex.ª que o professor da disciplina de matemática da referida turma, professor ………………………., se encontra disponível para participar neste trabalho.

Manifestando desde já a minha disponibilidade para esclarecer possíveis dúvidas relacionadas com a aplicação do estudo, aguardo o vosso parecer.

Agradeço antecipadamente a vossa compreensão e colaboração.

Com os melhores cumprimentos

……….………….., 6 de dezembro de 2011

____

Marta Filipa da Costa Pinheiro

Exmo.(a). Encarregado(a) de Educação

No âmbito do curso de Mestrado em Educação, especialidade Didática da Matemática e das Ciências, que frequento na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, pretendo desenvolver uma investigação que se irá debruçar sobre como se caracteriza o pensamento algébrico de alunos do 6.º ano no âmbito de contextos visuais.

Prevê-se que esta investigação decorra durante o presente ano letivo, 2011/2012, e envolva a resolução de tarefas relacionadas com a temática previamente referida, o respetivo registo, observação participante e gravação áudio e vídeo das aulas nas quais serão aplicadas as tarefas. Mais informo que essas gravações foram autorizadas pelo Diretor do Agrupamento de Escolas ……………………, sendo utilizadas exclusivamente no estudo em questão, estando preservado o anonimato dos alunos. Serão também realizadas entrevistas a alguns alunos, sempre que necessário, de acordo com a sua disponibilidade. As tarefas a desenvolver estarão de acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico, não afetando por isso a planificação já efetuada.

Sendo professora da turma da disciplina de ciências da natureza e decorrendo o estudo na área da matemática, informo igualmente que o professor da disciplina de matemática se encontra disponível para participar neste trabalho.

Para o efeito, solicito a sua autorização para que o seu educando participe deste estudo e para proceder às gravações das referidas aulas.

Obrigada pela atenção.

……………….., 5 de Janeiro de 2012

A professora

____

(Marta Pinheiro)

- -

Autorização

No âmbito do projeto referido, declaro que autorizo que sejam registadas, em suporte áudio e vídeo, as aulas da turma …., do 6º ano, à qual o meu educando pertence.

Aluno

____ n.º ____

Encarregado de Educação

___/___/______ ____

Escola Básica ……………………….

Nome: ____ N.º ____ Data: ___/___/___

Questionário

Data de nascimento:______________________

Profissão do Pai:___________________ Habilitações académicas do Pai:____________________

Profissão da Mãe:__________________ Habilitações académicas da Mãe:___________________

Atividades extracurriculares:____

Disciplinas preferidas:____

Porquê? ____

O que é para ti Matemática?

____

____

____

Gostas da disciplina de Matemática? Porquê?

____

____

____

Quando te apresentam uma tarefa de matemática como te sentes? Porquê?

____

____

____

O que mais gostas de fazer nas aulas de Matemática? Porquê?

____

____

____

O que menos gostas de fazer nas aulas de Matemática? Porquê?

____

____

____

Quando ouves a palavra Matemática o que é que te vem imediatamente à ideia?

____

____

____

Guião de observação

Anexo 4

Data:
Tarefa(s):
Sessão n.º:
Tempo previsto:
Tempo gasto:

Introdução da tarefa:

Instruções da investigadora/professor

Reações dos alunos

Desenvolvimento da tarefa:

Alunos:

Reações

Comentários

Questões colocadas

Dificuldades evidenciadas

Estratégias utilizadas

Investigadora:

Atitudes

Questões colocadas

Discussão da tarefa:

Alunos:

Intervenções

Conclusões

Investigadora:

Gestão

Aspetos a salientar dos alunos-caso:

Outros aspetos relevantes durante a sessão:

Reflexão após a sessão:

Anexo 5

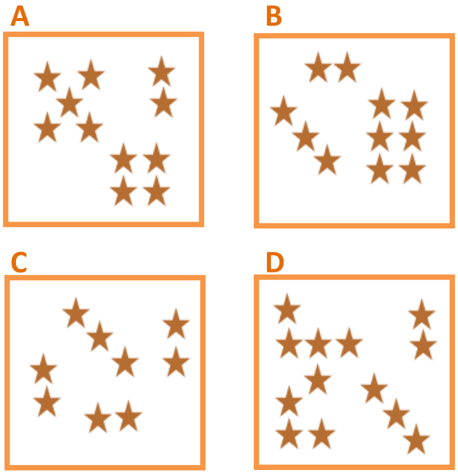
Escola Básica ……………………………

Nome: ____ N.º ____ Data: ___/___/___

Contagens visuais

Tarefa: Qual tem mais estrelas?

Consegues descobrir rapidamente qual o cartão que tem mais estrelas? Como pensaste? **Explica o modo como procedeste para efetuar a contagem**. (Para explicares o teu raciocínio podes usar esquemas, palavras, tabelas, cálculos, desenhos…)



Em qual conjunto conseguiste contar mais rapidamente? Porquê?

____

____

____

____

Em qual conjunto demoraste mais tempo a fazer a contagem? Porquê?

____

____

____

____

Que dificuldades tiveste ao resolver esta tarefa?

____

____

____

____

____

Adaptado de: Vale, Pimentel, Alvarenga, & Fão, 2011b

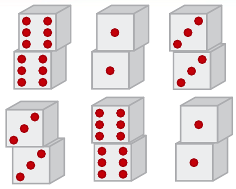
Anexo 6

Escola Básica ……………………………

Nome: ____ N.º _____ Data: ___/___/___

Contagens visuais

Tarefa: Dados



Consegues adicionar as pintas dos dados?

Antes de começar, pensa como poderás fazê-lo de um modo rápido.

Escreve uma expressão numérica e explica o teu raciocínio.

Que dificuldades tiveste ao resolver esta tarefa?

____

Adaptado de: Pimentel, Vale, Fão, Alvarenga, & Freire, 2010

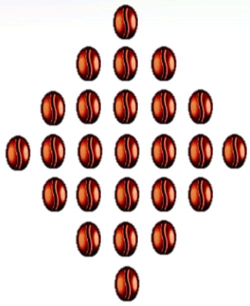
Anexo 7

Escola Básica ……………………………

Nome: ____ N.º ____ Data: ___/___/___

Contagens visuais

Tarefa: Os grãos de café



1. Quantos grãos de café vês na figura? Escreve a respetiva expressão numérica e explica como contaste.

2. Descobre outras formas de contar os grãos de café e, para cada caso, escreve a expressão numérica correspondente, explicando como pensaste.

3. O que podes concluir ao analisares as diferentes expressões numéricas que obtiveste?

Com qual das expressões numéricas chegaste mais rapidamente ao resultado?

____

____

Qual foi a forma de contar que achaste mais fácil? Porquê?

____

____

____

Que dificuldades tiveste ao resolver esta tarefa?

____

____

____

____

____

Adaptado de: Pimentel, Vale, Fão, Alvarenga, & Freire, 2010

Escola Básica ……………………………

Anexo 8

Nome: ____ N.º _____ Data: ___/___/___

Contagens visuais

Tarefa: Os berlindes do Carlos

1. Quantos berlindes vês na figura? Escreve a respetiva expressão numérica e explica como contaste.

2. Descobre outras formas de contar os berlindes e, para cada caso, escreve a expressão numérica correspondente, explicando como pensaste.

3. O que podes concluir ao analisares as diferentes expressões numéricas que obtiveste?

Com qual das expressões numéricas chegaste mais rapidamente ao resultado?

____

____

Qual foi a forma de contar que achaste mais fácil? Porquê?

____

____

____

Que dificuldades tiveste ao resolver esta tarefa?

____

____

____

____

____

Adaptado de: Vale, et al., 2011a

Anexo 9

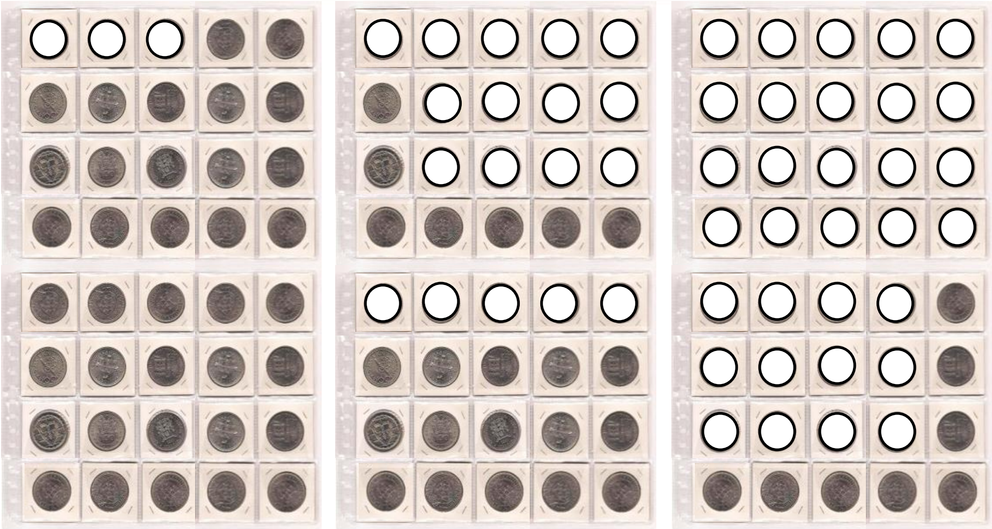
Escola Básica ……………………………

Nome: ____ N.º ____ Data: ___/___/___

Contagens visuais

Tarefa: A coleção de moedas

O Ricardo faz coleção de moedas e guarda-as cuidadosamente em álbuns. Ajuda-o a descobrir quantas moedas já conseguiu colecionar neste álbum.



1. Quantas moedas tem o Ricardo? Explica o modo como pensaste para contar as moedas.

2. Consegues encontrar outra forma de contar as moedas? Se sim, como?

3. O primo do Ricardo contou as moedas do seguinte modo: 12x5+2+2+3. Como terá pensado o primo do Ricardo para contar as moedas?

Qual a contagem que foi mais fácil?

Em que questão tiveste mais dificuldades? Porquê?

Para além desta, que outras dificuldades tiveste?

O que aprendeste com esta tarefa?

Adaptado de: Vale, et al., 2011a

Escola Básica ……………………………

Nome: ____ N.º _____ Data: ___/___/___

Contagens visuais Sequências – descobrir e generalizar padrões de repetição

Tarefa: Nenúfares e rãs

Considera uma sequência de nenúfares e rãs em fila conforme a imagem.

1. Qual é o 13.º elemento da sequência? Como pensaste?

2. Qual é o grupo que se repete ao longo da sequência?

3. Se se construir uma sequência de grupos repetidos com 14 nenúfares, quantas rãs existem? E quantos grupos repetidos? Como pensaste?

4. Na trigésima posição encontra-se um nenúfar ou uma rã? Como sabes?

5. Se houvesse 17 rãs, quantos nenúfares existiriam? E grupos repetidos?

6. E se se construir uma sequência com 71 nenúfares, quantas rãs existem? E quantos grupos repetidos? Explica como pensaste.

7. Se tivéssemos 30 grupos repetidos, quantos elementos havia ao todo? E nenúfares? E rãs?

8. Imagina uma sequência com 780 elementos ao todo. Nessa sequência quantos nenúfares haveria? E rãs?

9. Se numa sequência de nenúfares e rãs como a apresentada houver um número qualquer de grupos repetidos (n grupos repetidos), quantos nenúfares existem? E rãs? E elementos ao todo? Explica como pensaste.

Em que questão tiveste mais dificuldades? Porquê?

Tiveste outras dificuldades? Se sim, explica quais foram.

O que aprendeste com esta tarefa?

Adaptado de: Vale, et al., 2011a

Anexo 11

Escola Básica ……………………………

Nome: ____ N.º ____ Data: ___/___/___

Sequências – descobrir e generalizar padrões de repetição

Tarefa: Smiles

Considera a sequência de smiles em T.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. Quantos smiles terá o 4º T? Como o podes descrever?

2. Quantos smiles terá o 100º T? Explica como pensaste.

3. Numa caixa existem 121 smiles. Descobre se é possível construir uma figura desta sequência com esse número de smiles.

4. Determina o número de smiles necessários para construir a figura n.

5. Ao determinar o número de smiles da figura 250 o João e a Inês pensaram de modo diferente:

   João: 1+3x250
   Inês: (250+1)x3-2

Como terão pensado o João e a Inês?

Em que questão tiveste mais dificuldades? Porquê?

____

____

____

Tiveste outras dificuldades? Se sim, explica quais foram.

____

____

____

____

O que aprendeste com esta tarefa?

____

____

____

Adaptado de: Vale, Fão, Alvarenga, Geraldes, Sousa, & Pimentel, 2008

Escola Básica ……………………………

Nome: ____ N.º ____ Data: ___/___/___

Sequências – descobrir e generalizar padrões de crescimento

Tarefa: Os Z's

Considera a sequência de Z's

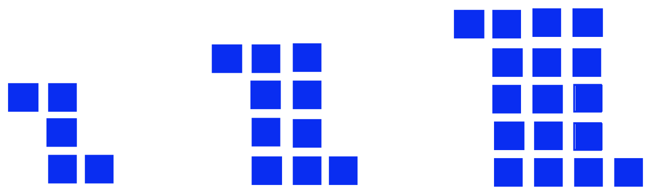


Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. Continua a sequência desenhando a figura de ordem 4 e a de ordem 5.

2. Conta o número de quadradinhos da 3.ª figura? Descreve o modo como efetuaste a contagem.

3. Quantos quadradinhos terá a 6.ª figura? Descreve o modo como pensaste.

4. Quantos quadradinhos terá a figura de ordem 40? Explica como pensaste.

5. Será possível construir uma figura com 964 quadradinhos? Explica o teu raciocínio.

6. Como podes descobrir o número de quadradinhos da figura de ordem n?

Em que questão tiveste mais dificuldades? Porquê?

___

___

___

___

Tiveste outras dificuldades? Se sim, explica quais foram.

___

___

___

___

O que aprendeste com esta tarefa?

___

___

___

Adaptado de : (Pimentel, Vale, Fão, Alvarenga, & Freire, 2010)

Anexo 13

Escola Básica ……………………………

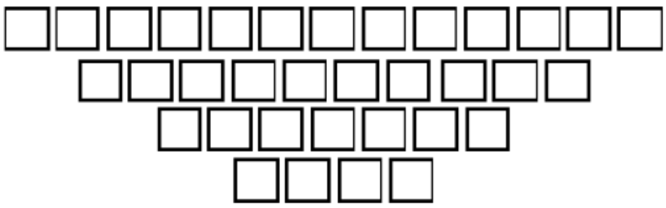
Nome: ____ N.º ____ Data: ___/___/___

Problemas com padrões

Tarefa: Os lugares

Para explicares o teu raciocínio podes usar esquemas, palavras, tabelas, cálculos, desenhos…

Num teatro existem quatro lugares na primeira fila. O aumento do número de lugares de fila para fila é sempre o mesmo. A figura seguinte ilustra as quatro primeiras filas do teatro.



1. Quantos lugares existem na 5.ª e 6.ª filas do teatro? Explica como pensaste.

2. Quantos lugares existem na 10.ª fila? Explica como pensaste.

3. Quantos lugares existem na 138.ª fila do teatro? Explica como pensaste

Em que questão tiveste mais dificuldades? Porquê?

____

____

____

____

Tiveste outras dificuldades? Se sim, explica quais foram.

____

____

____

____

O que aprendeste com esta tarefa?

____

____

____

____

Adaptado de: (Townsend, 2005)

Anexo 14

Escola Básica ……………………………

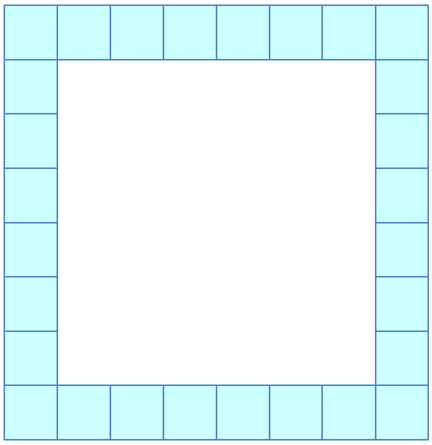
Nome: ____ N.º ____ Data: ___/___/___

Problemas com padrões

Tarefa: A moldura

Para explicares o teu raciocínio podes usar esquemas, palavras, tabelas, cálculos, desenhos…

A Esmoldura faz molduras em espelhos quadrangulares formadas por azulejos quadrados. A figura representa uma moldura de dimensões 8x8.



1. Quantos azulejos são necessários para fazer o espelho representado na figura? Explica como pensaste.

2. Quantos azulejos são necessários para construir uma moldura com dimensões 15x15? Explica como pensaste.

3. Quantos azulejos são necessários para construir uma moldura com dimensões 90x90? Explica como pensaste.

4. É possível construir uma moldura com 420 azulejos? Explica o teu raciocínio.

5. Descobre o número de azulejos necessários para construir uma moldura de qualquer dimensão.

Em que questão tiveste mais dificuldades? Porquê?

____

Tiveste outras dificuldades? Se sim, explica quais foram.

____

O que aprendeste com esta tarefa?

____

Adaptado de: (Vale, et al., Padrões em matemática: uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico, 2011a)

Anexo 15

Escola Básica ……………………………..

Nome: ____ N.º ____ Data: ___/___/___

Tarefas – Contagens visuais

Recorda as tarefas que realizaste nas aulas.

De qual gostaste mais? Porquê?

____

____

____

____

____

De qual gostaste menos? Porquê?

____

____

____

____

____

Qual achaste ser a mais fácil? Porquê?

____

____

____

____

____

Qual achaste ser a mais difícil? Porquê?

____

____

____

____

____

Anexo 16

Escola Básica ………………………………..

Nome: ____ N.º ____ Data: ___/___/___

Tarefas: Sequências – descobrir e generalizar padrões de repetição e crescimento

Recorda as tarefas sobre sequências que realizaste nas aulas.

De qual gostaste mais? Porquê?

____

____

____

____

____

De qual gostaste menos? Porquê?

____

____

____

____

____

Qual achaste ser a mais fácil? Porquê?

____

____

____

____

____

Qual achaste ser a mais difícil? Porquê?

____

____

____

____

____

Escola Básica ………………………..

Nome: ____ N.º ____ Data: ___/___/___

Tarefas: problemas padrão

Recorda as tarefas sobre problemas padrão que realizaste nas aulas.

De qual gostaste mais? Porquê?

____

____

____

____

____

De qual gostaste menos? Porquê?

____

____

____

____

____

Qual achaste ser a mais fácil? Porquê?

____

____

____

____

____

Qual achaste ser a mais difícil? Porquê?

____

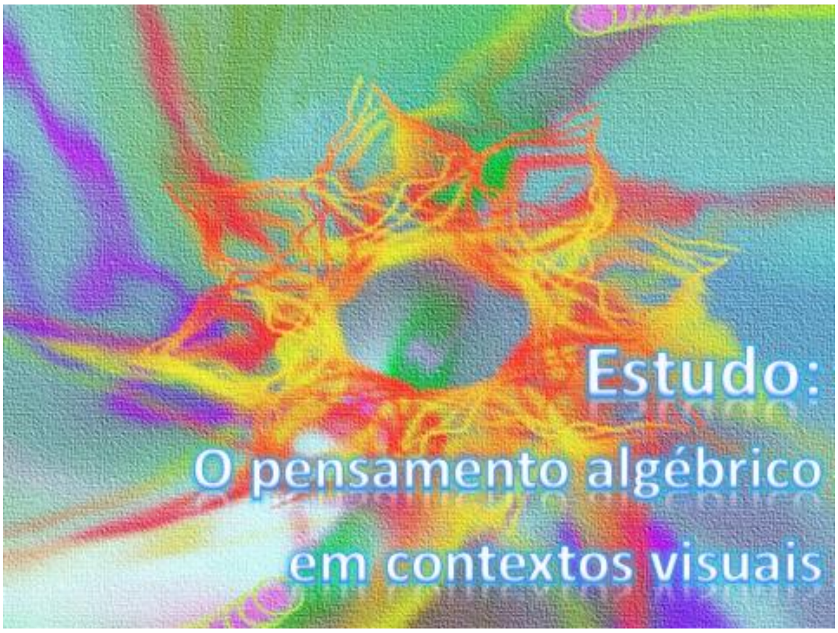
____

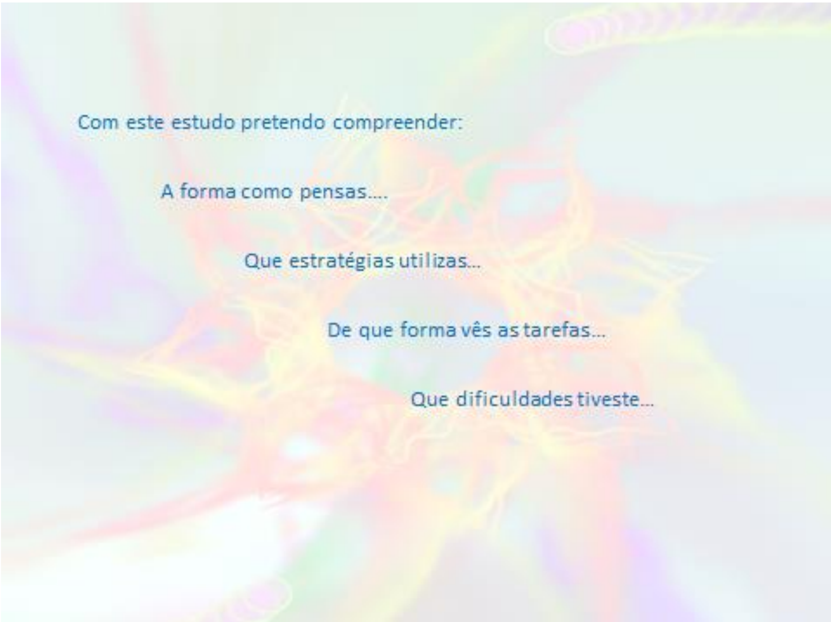
____

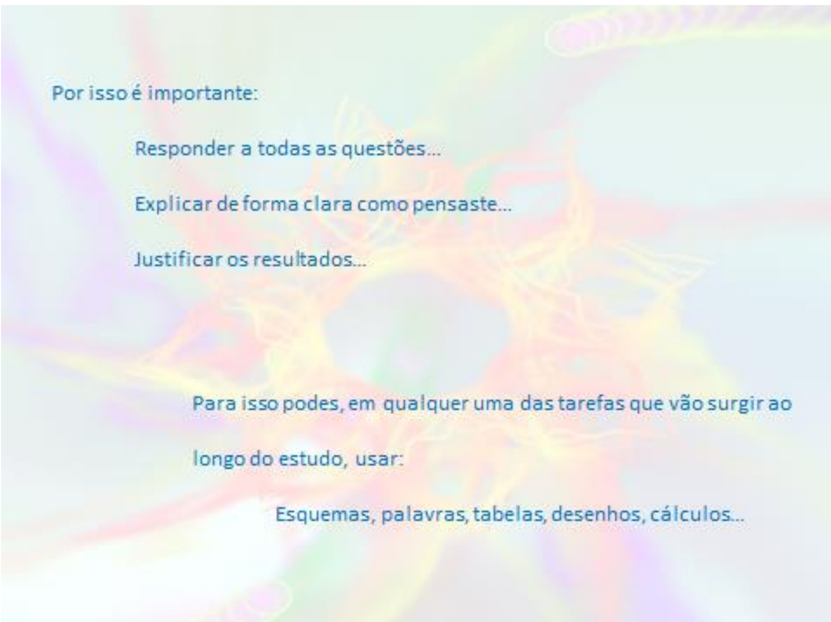
____

____

Anexo 18


Estudo:
O pensamento algébrico
em contextos visuais


Com este estudo pretendo compreender:
A forma como pensas....
Que estratégias utilizas...
De que forma vês as tarefas...
Que dificuldades tiveste...


Por isso é importante:
Responder a todas as questões...
Explicar de forma clara como pensaste...
Justificar os resultados...
Para isso podes, em qualquer uma das tarefas que vão surgir ao
longo do estudo, usar:
Esquemas, palavras, tabelas, desenhos, cálculos...

No final de cada tarefa, no verso da folha, vão surgir algumas questões sobre a forma como realizaste a tarefa e as dificuldades que tiveste.

É importante que respondas a todas as questões porque as tuas respostas vão ajudar a compreender as tuas dificuldades.

No final da resolução das tarefas vamos discutir em grande grupo as diversas possibilidades de resolução.

Não deves alterar nada na tua folha da tarefa mesmo que o teu raciocínio não esteja correto.

Caso seja necessário irei realizar entrevistas que permitam compreender melhor os raciocínios utilizados na resolução das tarefas.

As aulas serão gravadas em vídeo e em áudio para que eu possa analisar situações que não consegui observar durante o decorrer da mesma.

As gravações das aulas serão visualizadas e ouvidas apenas por mim. Ninguém mais terá cesso a elas.