



INSTITUTO POLITÉCNICO  
DE VIANA DO CASTELO

**Filipe Tiago de Matos**

**Métodos de dimensionamento de pilares de BA segundo o EC2**  
**Avaliação de segurança com base numa análise não linear**

Mestrado Engenharia Civil e do Ambiente  
Especialização em estruturas

Trabalho efetuado sob a orientação do  
Professor Doutor Jorge Moreno Delgado

---

Novembro de 2015

MESTRADO EM ENGENHARIA CIVIL E DO AMBIENTE 2015/2016

ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO

Tel. +351-258 819 700

Fax +351-258 827 636

Editado por

ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO

Av. do Atlântico, s/n

4900-648 VIANA DO CASTELO

Portugal

Tel. +351-258 819 700

Fax +351-351-258 827 636



[direcao@estg.ipvc.pt](mailto:direcao@estg.ipvc.pt)



<http://www.estg.ipvc.pt>

Reproduções parciais deste documento serão autorizadas na condição que seja mencionado o Autor e feita referência a Mestrado em Engenharia Civil e do Ambiente - 2015/2016 – Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Viana do Castelo, Portugal, 2015.

As opiniões e informações incluídas neste documento representam unicamente o ponto de vista do respetivo Autor, não podendo o Editor aceitar qualquer responsabilidade legal ou outra em relação a erros ou omissões que possam existir.

Este documento foi produzido a partir de versão eletrónica fornecida pelo respetivo Autor.

**Aos meus pais e irmão**

## Agradecimentos

Venho por este meio expressar a minha gratidão a todos aqueles que me ajudaram ao longo destes anos, sem os quais não teria sido possível a realização desta dissertação.

Agradeço ao meu orientador Professor Doutor Jorge Moreno Delgado, mentor de todo o meu trabalho, que partilhou toda a disponibilidade e dedicação para o sucesso deste trabalho.

Deixo também uma palavra de agradecimento a todo o departamento de Engenharia Civil, pela tremenda contribuição para a minha formação, assim como todos os colegas de curso, em especial ao Carlos Gonçalves, Fábio Leitão, José Costa, Miguel Pimenta e Pedro Dias, pelo afeto e apoio que encontrei ao longo destes anos.

Agradeço a toda a minha família, em especial aos meus pais e irmão, pelo apoio, não só pela elaboração da dissertação, como ao longo do meu percurso académico.

Finalmente e não esquecidos como é claro, a todos os meus amigos do percurso da minha vida pessoal, que proporcionaram motivação e força para a realização da dissertação.

## Resumo

O regulamento europeu EC2 dispõe de metodologias simplificadas de quantificação dos efeitos de 2ª ordem para o dimensionamento dos pilares das estruturas reticuladas de betão armado. Todavia, por terem incorporadas as referidas simplificações, surgem dúvidas se o regulamento quantifica, ou não, o real comportamento da estrutura. Pretende-se assim, realizar um estudo de avaliação de segurança das metodologias simplificadas propostas pelo EC2, nomeadamente o Método da Curvatura Nominal e o Método da Rigidez Nominal, de quantificação dos efeitos de 2ª ordem.

Com o intuito de contextualizar o objetivo de estudo deste trabalho apresentam-se os traços gerais das metodologias simplificadas, assim como o enquadramento da inclusão das imperfeições geométricas no dimensionamento de pilares. De seguida, expõem-se aspetos importantes referentes à segurança estrutural e descreve-se a metodologia, proposta por Delgado (2002) para quantificação das probabilidades de ruína associadas às estruturas, aplicada neste trabalho.

Para a avaliação da segurança dos métodos simplificados do EC2, procedeu-se inicialmente ao dimensionamento, segundo os dois métodos do EC2, de um conjunto de cinco pórticos com diferentes geometrias, secções e ações, e em seguida efetuaram-se as respetivas comparações e discussões de resultados. Depois da aferição dos resultados obtidos, e como um dos objetivos principais deste trabalho, realizou-se o cálculo das probabilidades de ruína dos cinco pórticos, analisando os resultados obtidos para os diferentes dimensionamentos.

Palavras-chave: Efeitos de 2ª ordem, Imperfeições geométricas, Método da Rigidez Nominal, Método da Curvatura Nominal, segurança estrutural, probabilidades de ruína.



## Abstract

The European regulation EC2 includes simplified methodologies for the quantification of 2<sup>nd</sup> order effects of framed structures columns. However, since they have incorporated a set of simplifications, there are some doubts whether the regulation quantifies or not the real behavior of the structure. In this work, it is intended to make a study that assesses the security of the simplified methodologies proposed by the EC2, namely the nominal curvature method and the nominal rigidity of quantification of 2<sup>nd</sup> order effects.

Having in mind contextualizing the aim of study of this work, the general features of simplified methodologies are presented, as well as the framing of the inclusion of geometrical imperfections in the dimensioning of the pillars. Afterwards, important aspects are exposed referring to the structural security and the methodology is described, proposed by Delgado (2002) to quantify the probabilities of ruin associated to the structures, applied in this essay.

To assess the security of the simplified methods of EC2, we have first design a set of five framed structures with different geometries, sections and actions, according to both methods of EC2, and afterwards, the respective comparisons and results were discussed. After checking the results, and according to one of the goals of this work, the calculation of probability of ruin of the five framed structures has been made, and the results for the different dimensioning's were analyzed.

Keywords: 2<sup>nd</sup> order effects, Geometrical imperfections, Nominal rigidity Method, Nominal Curvature Method, structural safety, probability of failure.



## Índice

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Enquadramento geral do trabalho .....</b>	<b>1</b>
<b>1.2 Objetivos gerais.....</b>	<b>2</b>
<b>1.3 Organização da tese .....</b>	<b>2</b>
<b>2. ASPETOS REGULAMENTARES PARA QUANTIFICAÇÃO DOS EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM EM ESTRUTURAS DE BETÃO ARMADO .....</b>	<b>3</b>
<b>2.1 Introdução .....</b>	<b>3</b>
<b>2.2 Classificação de estruturas.....</b>	<b>3</b>
<b>2.3 Imperfeições geométricas .....</b>	<b>4</b>
<b>2.4 Esbelteza e comprimento efetivo de encurvadura .....</b>	<b>7</b>
<b>2.5 Métodos simplificados de quantificação dos efeitos de 2ª ordem .....</b>	<b>10</b>
2.5.1 Método baseado na rigidez nominal.....	10
2.5.1.1 Sequência de cálculo .....	12
2.5.2 Método baseado na curvatura nominal.....	14
2.5.2.1 Sequência de cálculo .....	16
<b>3. SEGURANÇA ESTRUTURAL .....</b>	<b>19</b>
<b>3.1 Introdução .....</b>	<b>19</b>
<b>3.2 Conceito de estado limite.....</b>	<b>19</b>
<b>3.3 Segurança estrutural na regulamentação em vigor: Nível 1.....</b>	<b>20</b>
<b>3.4 Segurança em análises não lineares: Nível 2 .....</b>	<b>22</b>
3.4.1 Probabilidade de ruína.....	22
3.4.2 Índice de fiabilidade .....	23
<b>3.5 Metodologia de avaliação de segurança proposta por Delgado (2002) .....</b>	<b>24</b>
3.5.1 Lei de distribuição da Solicitação S .....	25
3.5.2 Lei de distribuição da resistência R.....	26
<b>4. COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS DE DIMENSIONAMENTO AOS EFEITOS DE 2ª ORDEM.....</b>	<b>31</b>
<b>4.1 Introdução .....</b>	<b>31</b>
<b>4.2 Descrição geral das estruturas analisadas e hipóteses gerais de dimensionamento .....</b>	<b>31</b>
<b>4.3 Critérios gerais do método de avaliação de segurança.....</b>	<b>32</b>
<b>4.4 Pórtico de um andar e um tramo – PT11 .....</b>	<b>34</b>
4.4.1 Efeitos de 1ª ordem .....	34

4.4.2 Esforços finais.....	35
4.4.3 Comparação de esforços: Momentos atuantes .....	36
4.4.4 Comparação de secções de armadura: 1ª ordem e esforços finais .....	38
4.4.5 Avaliação de segurança.....	39
4.4.5.1 Lei de distribuição do fator de carga da resistência – $\lambda R$ .....	39
4.4.5.2 Probabilidade de ruína e índices de fiabilidade.....	41
4.4.5.2.1 REBAP e Eurocódigo2: 1ª ordem .....	42
4.4.5.2.2 REBAP e Eurocódigo2: Esforços finais .....	43
4.4.5.2.3 Eurocódigo2.....	44
<b>4.5 Pórtico de quatro andares e um tramo – PT41.....</b>	<b>45</b>
4.5.1 Efeitos de 1ª ordem .....	46
4.5.2 Esforços finais.....	47
4.5.3 Comparação de esforços: Momentos atuantes .....	47
4.5.4 Comparação de secções de armadura: 1ª ordem e esforços finais .....	49
4.5.5 Avaliação de segurança.....	50
4.5.5.1 Lei de distribuição do fator de carga da resistência – $\lambda R$ .....	50
4.5.5.2 Probabilidade de ruína e índices de fiabilidade.....	53
4.5.5.2.1 REBAP e Eurocódigo2: 1ª ordem .....	53
4.5.5.2.2 REBAP e Eurocódigo2: Esforços finais .....	54
4.5.5.2.3 Eurocódigo2.....	55
<b>4.6 Pórtico de quatro andares e dois tramos – PT42.....</b>	<b>57</b>
4.6.1 Efeitos de 1ª ordem .....	58
4.6.2 Esforços finais.....	58
4.6.3 Comparação de esforços: Momentos atuantes .....	60
4.6.4 Comparação de secções de armadura: 1ª ordem e esforços finais .....	61
4.6.5 Avaliação de segurança.....	63
4.6.5.1 Lei de distribuição do fator de carga de resistência – $\lambda R$ .....	63
4.6.5.2 Probabilidade de ruína e índices de fiabilidade.....	65
4.6.5.2.1 REBAP e Eurocódigo2: 1ª ordem .....	66
4.6.5.2.2 REBAP e Eurocódigo2: Esforços finais .....	67
4.6.5.2.3 Eurocódigo2.....	68
<b>4.7 Pórtico de quatro andares e três tramos – PT43 .....</b>	<b>69</b>
4.7.1 Efeitos de 1ª ordem .....	70
4.7.2 Esforços finais.....	71
4.7.3 Comparação de esforços: Momentos atuantes .....	73

4.7.4	Comparação de secções de armadura: 1ª ordem e esforços finais .....	75
4.7.5	Avaliação de segurança .....	76
4.7.5.1	Lei de distribuição do fator de carga de resistência – $\lambda R$ .....	76
4.7.5.2	Probabilidade de ruína e índice de fiabilidade.....	78
4.7.5.2.1	REBAP e Eurocódigo2: 1ª ordem.....	79
4.7.5.2.2	REBAP e Eurocódigo2: Esforços finais .....	80
4.7.5.2.3	Eurocódigo2.....	81
<b>4.8</b>	<b>Pórtico de nove andares e um tramo – PT91.....</b>	<b>82</b>
4.8.1	Efeitos de 1ª ordem .....	83
4.8.2	Esforços finais .....	84
4.8.3	Comparação de esforços: Momentos atuantes .....	85
4.8.4	Comparação de secções de armadura: 1ª ordem e esforços finais .....	86
4.8.5	Avaliação de segurança .....	88
4.8.5.1	Lei de distribuição do fator de carga de resistência – $\lambda R$ .....	88
4.8.5.2	Probabilidade de ruína e índices de fiabilidade .....	90
4.8.5.2.1	REBAP e Eurocódigo2: 1ª ordem.....	91
4.8.5.2.2	REBAP e Eurocódigo2: Esforços finais .....	92
4.8.5.2.3	Eurocódigo2.....	93
<b>5.</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>95</b>
5.1	Conclusões .....	95
5.1	Desenvolvimentos futuros.....	97
<b>6.</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>99</b>

## Índice de figuras

Figura 2.1 Configurações de instabilidade (Delgado, 2002).....	4
Figura 2.2 Imperfeições geométricas em estruturas porticadas .....	4
Figura 2.3 Imperfeições geométricas em pilar isolado .....	5
Figura 2.4 Efeito das imperfeições em pilares isolados (EC2, 2010) .....	6
Figura 2.5 Efeito da inclinação $\theta_i$ por forças horizontais $H_i$ .....	7
Figura 2.6 Comprimentos de encurvadura para elementos isolados (Válter Lúcio, 2006) ...	8
Figura 2.7 Exemplo de aplicação para quantificação das rigidezes (Válter Lúcio, 2006) ....	9
Figura 3.1 Representação esquemática dos valores característicos de ações (Delgado, 2002) .....	20
Figura 3.2 Representação esquemática dos valores característicos de resistências (Delgado, 2002).....	21
Figura 3.3 Representação esquemática do formato semi-probabilístico de segurança (Delgado, 2002).....	21
Figura 3.4 Representação gráfica da função de distribuição da margem de segurança $Z$ e do índice de fiabilidade $\beta$ (Delgado, 2002) .....	24
Figura 4.1 Representação esquemática de esforços e secções de armaduras.....	32
Figura 4.2 Configuração geométrica, malha de elementos finitos e suas dimensões de secções de <i>PT11</i> .....	34
Figura 4.3 REBAP e EC2: Esforços de 1ª ordem e respetivas secções de armadura de <i>PT11</i> .....	35
Figura 4.4 REBAP: Esforços finais e respetivas secções de armadura de <i>PT11</i> . Delgado (2002) .....	35
Figura 4.5 EC2: Esforços finais e respetivas secções de armadura de <i>PT11</i> .....	36
Figura 4.6 REBAP e EC2: Momentos elásticos do pilar P2 de <i>PT11</i> .....	36
Figura 4.7 REBAP e EC2: Momentos de imperfeições geométricas do pilar P2 de <i>PT11</i> . 37	
Figura 4.8 REBAP e EC2: Momentos de 2ª ordem do pilar P2 de <i>PT11</i> .....	37
Figura 4.9 REBAP e EC2: Secções de armadura do pilar P2 de <i>PT11</i> . Efeitos de 1ª ordem .....	38
Figura 4.10 REBAP e EC2: Secções de armadura do pilar P2 de <i>PT11</i> . Esforços finais ...	38
Figura 4.11 Representação gráfica dos resultados das amostras da aplicação do MHL .....	40
Figura 4.12 Resultados do teste <i>Kolmogrov-Smirnov</i> de <i>PT11</i> .....	41

Figura 4.13 REBAP e EC2: Índice de fiabilidade $\beta$ para os casos 1ª ordem de <i>PT11</i> .....	42
Figura 4.14 REBAP e EC2: Probabilidade de ruína $p_f$ para os casos 1ª ordem de <i>PT11</i> ...	42
Figura 4.15 REBAP e EC2: Índice de fiabilidade $\beta$ para os casos de 2ª ordem (esforço final) de <i>PT11</i> .....	43
Figura 4.16 REBAP e EC2: Probabilidade de ruína $p_f$ para os casos de 2ª ordem (esforço final) de <i>PT11</i> .....	43
Figura 4.17 EC2: Índice de fiabilidade $\beta$ de <i>PT11</i> .....	44
Figura 4.18 EC2: Probabilidade de ruína $p_f$ de <i>PT11</i> .....	44
Figura 4.19 Configuração geométrica, malha de elementos finitos e suas dimensões de secções de <i>PT41</i> .....	45
Figura 4.20 REBAP e EC2: Esforços de 1ª ordem e respetivas secções de armadura de <i>PT41</i> .....	46
Figura 4.21 REBAP e EC2: Esforços finais e respetivas secções de armadura de <i>PT41</i> ...	47
Figura 4.22 REBAP e EC2: Momentos elásticos do pilar P2 de <i>PT41</i> .....	48
Figura 4.23 REBAP e EC2: Momentos de imperfeições geométricas do pilar P2 de <i>PT41</i> .....	48
Figura 4.24 REBAP e EC2: Momentos de 2ª ordem do pilar P2 de <i>PT41</i> .....	48
Figura 4.25 Comparação de secções de armadura do pilar P2 de <i>PT41</i> . Efeitos de 1ª ordem .....	49
Figura 4.26 REBAP e EC2: Secções de armadura do pilar P2 de <i>PT41</i> . Esforços finais ...	50
Figura 4.27 Representação gráfica dos resultados das amostras da aplicação do MHL .....	51
Figura 4.28 Resultados do teste <i>Kolmogorov-Smirnov</i> de <i>PT41</i> .....	53
Figura 4.29 REBAP e EC2: Índice de fiabilidade $\beta$ para os casos de 1ª ordem de <i>PT41</i> ...	53
Figura 4.30 REBAP e EC2: Probabilidade de ruína $p_f$ para os casos 1ª ordem de <i>PT41</i> ...	54
Figura 4.31 REBAP e EC2: Índice de fiabilidade $\beta$ para os casos de esforço final de <i>PT41</i> .....	54
Figura 4.32 REBAP e EC2: Probabilidade de ruína $p_f$ para os casos de esforço final de <i>PT41</i> .....	55
Figura 4.33 EC2: Índice de fiabilidade $\beta$ de <i>PT41</i> .....	55
Figura 4.34 EC2: Probabilidade de ruína $p_f$ de <i>PT41</i> .....	56
Figura 4.35 Configuração geométrica, malha de elementos finitos e suas dimensões de secções de <i>PT42</i> .....	57
Figura 4.36 REBAP e EC2: Esforços de 1ª ordem e respetivas secções de armadura de <i>PT42</i> .....	58

Figura 4.37 REBAP: Esforços finais e respetivas secções de armadura de <i>PT42</i> .....	59
Figura 4.38 EC2: Esforços finais e respetivas secções de armadura de <i>PT42</i> .....	59
Figura 4.39 REBAP e EC2: Momentos elásticos do pilar P2 e P3 de <i>PT42</i> .....	60
Figura 4.40 REBAP e EC2: Momentos de imperfeições geométricas do pilar P2 P3 de <i>PT42</i> .....	60
Figura 4.41 REBAP e EC2: Momentos de 2ª ordem do pilar P2 e P3 de <i>PT42</i> .....	61
Figura 4.42 REBAP e EC2: Secções de armadura do pilar P2 e P3 de <i>PT42</i> . Efeitos de 1ª ordem.....	62
Figura 4.43 REBAP e EC2: Secções de armadura do pilar P2 e P3 de <i>PT42</i> . Esforços finais .....	62
Figura 4.44 Representação gráfica dos resultados das amostras da aplicação do MHL .....	63
Figura 4.45 Resultados do teste de <i>Kolmogorov-Smirnov</i> de <i>PT42</i> .....	65
Figura 4.46 REBAP e EC2: Índice de fiabilidade $\beta$ para os casos de 1ª ordem de <i>PT42</i> ...	66
Figura 4.47 REBAP e EC2: Probabilidade de ruína $p_f$ para os casos de 1ª ordem de <i>PT42</i>	66
Figura 4.48 Índice de fiabilidade $\beta$ para os casos de esforço final de <i>PT42</i> .....	67
Figura 4.49 Probabilidade de ruína $p_f$ para os casos de esforço final de <i>PT42</i> .....	67
Figura 4.50 EC2: Índice de fiabilidade $\beta$ de <i>PT42</i> .....	68
Figura 4.51 EC2: Probabilidade de ruína $p_f$ de <i>PT42</i> .....	68
Figura 4.52 Configuração geométrica, malha de elementos finitos e dimensões das secções de <i>PT43</i> .....	69
Figura 4.53 REBAP: Esforços de 1ª ordem e respetivas secções de armadura de <i>PT43</i> ....	70
Figura 4.54 EC2: Esforços de 1ª ordem e respetivas secções de armadura de <i>PT43</i> .....	71
Figura 4.55 REBAP: Esforços finais e respetivas secções de armadura de <i>PT43</i> .....	72
Figura 4.56 EC2: Esforços finais e secções de armadura de <i>PT43</i> . Método rigidez nominal .....	72
Figura 4.57 EC2: Esforços finais e secções de armadura de <i>PT43</i> . Método curvatura nominal .....	73
Figura 4.58 REBAP e EC2: Momentos elásticos do pilar P3 e P4 de <i>PT43</i> .....	73
Figura 4.59 REBAP e EC2: Momentos relativos à excentricidade accidental/imperfeições geométricas do pilar P3 e P4 de <i>PT43</i> .....	74
Figura 4.60 REBAP e EC2: Momentos de 2ª ordem do pilar P3 e P4 de <i>PT43</i> .....	74
Figura 4.61 REBAP e EC2: Secções de armadura do pilar P3 e P4 de <i>PT43</i> . Esforços de 1ª ordem.....	75

Figura 4.62 REBAP e EC2: Secções de armadura do pilar P3 e P4 de <i>PT43</i> . Esforços finais .....	75
Figura 4.63 Representação gráfica dos resultados das amostras da aplicação do MHL .....	77
Figura 4.64 Resultados do teste de <i>Kolmogorov-Smirnov</i> de <i>PT43</i> .....	78
Figura 4.65 REBAP e EC2: Índice de fiabilidade $\beta$ para os casos de 1ª ordem de <i>PT43</i> ...	79
Figura 4.66 REBAP e EC2: Probabilidade de ruína $p_f$ para os casos de 1ª ordem de <i>PT43</i>	79
Figura 4.67 Índice de fiabilidade $\beta$ para os casos de esforço final de <i>PT43</i> .....	80
Figura 4.68 Probabilidade de ruína $p_f$ para os casos de esforço final de <i>PT43</i> .....	80
Figura 4.69 EC2: Índice de fiabilidade $\beta$ de <i>PT43</i> .....	81
Figura 4.70 EC2: Probabilidade de ruína $p_f$ de <i>PT43</i> .....	81
Figura 4.71 Configuração geométrica, malha de elementos finitos, valores de combinações das ações e dimensões das secções de <i>PT91</i> .....	82
Figura 4.72 REBAP e EC2: Esforços de 1ª ordem e respetivas secções de armadura de <i>PT91</i> .....	83
Figura 4.73 REBAP e EC2: Esforços finais e respetivas secções de armadura de <i>PT91</i> ....	84
Figura 4.74 REBAP e EC2: Momentos elásticos do pilar P2 de <i>PT91</i> .....	85
Figura 4.75 REBAP e EC2: Momentos relativos de imperfeições geométricas do pilar P2 de <i>PT91</i> .....	85
Figura 4.76 REBAP e EC2: Momentos de 2ª ordem do pilar P2 de <i>PT91</i> .....	86
Figura 4.77 REBAP e EC2: Secções de armadura do pilar P2 de <i>PT91</i> . Efeitos de 1ª ordem .....	87
Figura 4.78 REBAP e EC2: Secções de armadura do pilar P2 de <i>PT91</i> . Esforços finais ...	87
Figura 4.79 Representação gráfica dos resultados das amostras da aplicação do MHL .....	88
Figura 4.80 Resultados do teste de <i>Kolmogorov-Smirnov</i> de <i>PT91</i> .....	90
Figura 4.81 REBAP e EC2: Índice de fiabilidade $\beta$ para os casos de 1ª ordem de <i>PT91</i> ...	91
Figura 4.82 REBAP e EC2: Probabilidade de ruína $p_f$ para os casos de 1ª ordem de <i>PT91</i>	91
Figura 4.83 Índice de fiabilidade $\beta$ para os casos de esforço final de <i>PT91</i> .....	92
Figura 4.84 Probabilidade de ruína $p_f$ para os casos de esforço final de <i>PT91</i> .....	92
Figura 4.85 EC2: Índice de fiabilidade $\beta$ de <i>PT91</i> .....	93
Figura 4.86 EC2: Probabilidade de ruína $p_f$ de <i>PT91</i> .....	93

## Índice de tabelas

Tabela 2.1 Iterações do Método da Rigidez Nominal .....	14
Tabela 2.2 Iterações do Método da Curvatura Nominal .....	17
Tabela 3.1 Parâmetros estatísticos da distribuição de $f'_c$ para as diferentes classes de betão .....	29
Tabela 3.2 Parâmetros estatísticos da distribuição $f_{sy}$ para as diferentes classes de aço .....	29
Tabela 4.1 Pórticos analisados .....	32
Tabela 4.2 Parâmetros estatísticos das leis de distribuição de $f'_c$ e $f_{sy}$ .....	33
Tabela 4.3 Valores de combinação das ações de <i>PT11</i> .....	34
Tabela 4.4 Resultados das amostras da aplicação do MHL de <i>PT11</i> .....	39
Tabela 4.5 Parâmetros estatísticos das leis de distribuição normais $\lambda R$ de <i>PT11</i> .....	40
Tabela 4.6 Resultados do teste de normalidade de <i>PT11</i> .....	41
Tabela 4.7 Valores de combinação das ações de <i>PT41</i> .....	46
Tabela 4.8 Resultados das amostras da aplicação do MHL de <i>PT41</i> .....	51
Tabela 4.9 Parâmetros estatísticos das leis de distribuição normais $\lambda R$ de <i>PT41</i> .....	52
Tabela 4.10 Resultados do teste de normalidade de <i>PT41</i> .....	52
Tabela 4.11 Valores de combinação das ações de <i>PT42</i> .....	58
Tabela 4.12 Resultados das amostras da aplicação do MHL de <i>PT42</i> .....	63
Tabela 4.13 Parâmetros estatísticos das leis de distribuição normais $\lambda R$ de <i>PT42</i> .....	64
Tabela 4.14 Resultados do teste de normalidade de <i>PT42</i> .....	64
Tabela 4.15 Valores de combinação das ações de <i>PT43</i> .....	70
Tabela 4.16 Resultados das amostras da aplicação do MHL de <i>PT43</i> .....	76
Tabela 4.17 Parâmetros estatísticos das leis de distribuição normais $\lambda R$ de <i>PT43</i> .....	77
Tabela 4.18 Resultados do teste de normalidade de <i>PT43</i> .....	78
Tabela 4.19 Resultados das amostras da aplicação do MHL de <i>PT91</i> .....	88
Tabela 4.20 Parâmetros estatísticos das leis de distribuição normais $\lambda R$ de <i>PT91</i> .....	89
Tabela 4.21 Resultados do teste de normalidade de <i>PT91</i> .....	89

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1 Enquadramento geral do trabalho

A vida do Homem é a maior grandeza do mundo. No entanto, quando se discute tal facto intervêm sempre algumas questões. O que faz o Homem dormir descansado? O que permite ao Homem acordar no dia seguinte? O que motiva o Homem a sair de casa, todos os dias?

Se estas perguntas forem efetuadas a diversos profissionais, de áreas distintas, as respostas, obviamente, vão divergir. O sociólogo irá abordar segundo a visão antropológica, o padre atenderá ao prisma da assistência religiosa, o médico incidirá sobre a anatomia e o padeiro vai preferir observar que é o fermento que lhe permite fazer crescer a massa e produzir um pão mais saboroso.

À engenharia Civil pede-se que se veja, nestas questões, a busca de algo que está implícito em qualquer obra, reabilitação ou projeto: a segurança.

A segurança existe para minorar a existência de acidentes. Estes podem ocorrer em qualquer lugar e sob múltiplas causas. A capacidade de reduzir os riscos e a probabilidade destes ocorrerem, torna cada vez mais importante um estudo que possibilite criar uma sensação de bem-estar permanente no Homem.

O comportamento mecânico de estruturas de betão armado é geométrico e materialmente não linear, e o seu dimensionamento, através desse tipo de análises, envolve uma grande complexidade. O EC2 disponibiliza várias metodologias simplificadas para a quantificação dos efeitos não lineares, em especial para o dimensionamento de pilares. Contudo, como consequência desse elevado grau de simplificação, os resultados desses métodos incluem elevadas incertezas.

Com este trabalho procurou-se desenvolver uma análise das metodologias simplificadas de dimensionamento de pilares de betão armado, previstas na regulamentação europeia Eurocódigo2 e efetuar uma avaliação da segurança obtida com a sua aplicação.

Para avaliar a fiabilidade e confiança no dimensionamento dos efeitos de 2ª ordem, por recurso aos métodos simplificados do EC2, utilizou-se uma metodologia de avaliação de segurança, proposta por Delgado (2002), que permite estimar a sua probabilidade de ruína.

## 1.2 Objetivos gerais

A dissertação tem como principal objetivo a avaliação da qualidade do dimensionamento de pilares de betão armado, através das metodologias simplificadas propostas pelo Eurocódigo2, nomeadamente o Método da Rigidez Nominal e o Método da Curvatura Nominal. Para o efeito analisaram-se cinco pórticos também estudados anteriormente por Delgado (2002), com a classificação de estruturas não contraventadas, sendo que esta avaliação de qualidade é efetuada recorrendo a um método de avaliação de segurança proposto pelo mesmo autor. Para alargar a discussão dos resultados ao nível da evolução dos métodos de dimensionamento e da sua qualidade, procedeu-se à comparação das metodologias acima descritas com a aplicação do previsto no regulamento REBAP.

## 1.3 Organização da tese

Os objetivos gerais da dissertação foram organizados nos seguintes capítulos:

- No capítulo 2 são apresentados os traços gerais de dimensionamento das imperfeições geométricas e das metodologias simplificadas de 2ª ordem apresentadas no EC2: Método da Rigidez Nominal e Método da Curvatura Nominal.
- O capítulo 3 é relativo à segurança estrutural, onde será descrito o conceito de estado limite e dos níveis de segurança associados, bem como a apresentação da metodologia de avaliação de segurança aplicada na dissertação, proposta por Delgado (2002).
- No capítulo 4 apresenta-se a quantificação dos efeitos de 2ª ordem para o conjunto de cinco pórticos estudados. São apresentadas comparações de esforços e de armaduras entre os regulamentos REBAP e EC2. De seguida, procede-se a aplicação da metodologia de avaliação da segurança estrutural proposta por Delgado (2002), tendo-se quantificado as probabilidades de ruína para os esforços de 1ª ordem e esforços finais obtidos com a aplicação do regulamento em vigor EC2, e com a aplicação do REBAP.
- No capítulo 5 serão apresentadas as principais conclusões deste trabalho e algumas propostas de desenvolvimentos futuros.

## **2. ASPETOS REGULAMENTARES PARA QUANTIFICAÇÃO DOS EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM EM ESTRUTURAS DE BETÃO ARMADO**

### **2.1 Introdução**

Muito se debate, hoje em dia se o regulamento EC2 consegue ou não projetar estruturas de forma adequada e realista, quando se trata do dimensionamento dos efeitos de 2ª ordem e imperfeições geométricas.

Para uma dada estrutura, quando a quantificação de esforços resulta de uma análise elástica, com a inclusão dos efeitos desfavoráveis das imperfeições geométricas, estes designam-se por esforços de 1ª ordem, onde não existe consideração da sua deformada podendo estabelecer uma relação entre as forças e os deslocamentos. Com a existência dos deslocamentos e a deformada, é necessário realizar uma análise da estrutura em que há necessidade de consideração da deformada e a atualização da geometria ao longo do incremento das ações, que se designa por um comportamento não linear geométrico. No entanto, tal comportamento está associado ao comportamento não linear material, em que as propriedades dos materiais, betão e aço, poderão ser alteradas ao longo de todo o processo. Os esforços que resultam de tais comportamentos designam-se por efeitos de 2ª ordem.

No presente capítulo serão apresentadas as linhas gerais dos métodos simplificados de quantificação dos efeitos de 2ª ordem presentes no EC2, designadamente, o Método da Rigidez Nominal, o Método da Curvatura Nominal e as imperfeições geométricas.

### **2.2 Classificação de estruturas**

Quanto à classificação das estruturas, o EC2 impõe uma distinção das estruturas que contribuem, ou não, para a estabilidade horizontal. As estruturas com elementos de grande rigidez, com resistência suficiente para absorver maior parte das ações horizontais, são classificadas como contraventadas. As que não possuem elementos suficientes para dissipar essas ações horizontais designam-se por não contraventadas. Na figura 2.1 apresenta-se a representação das deformadas globais para cada um dos casos das classificações referidas.

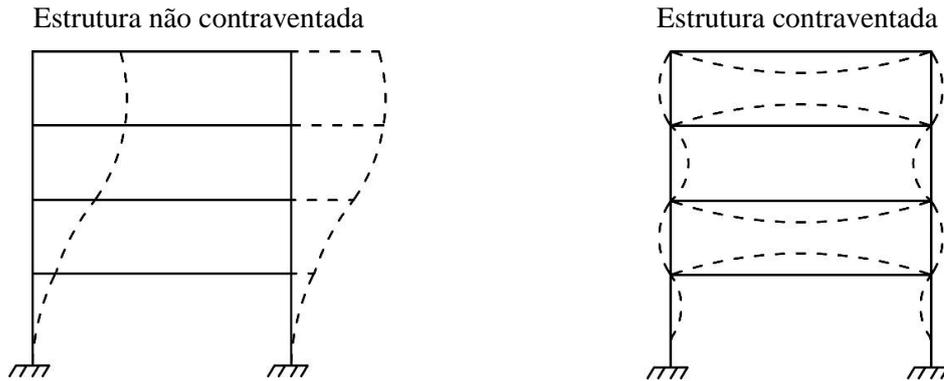


Figura 2.1 Configurações de instabilidade (Delgado, 2002)

### 2.3 Imperfeições geométricas

Numa dada estrutura existem sempre defeitos de construção, em relação à verticalidade dos pilares, bem como dúvidas da posição das cargas, o que constitui imperfeições que têm que ser consideradas no dimensionamento aos estados limites últimos. Segundo o EC2, as imperfeições geométricas são consideradas como um efeito de 1ª ordem, e esse efeito é quantificado pela definição da inclinação  $\theta_i$  da estrutura/elemento. Na figura 2.2 está representada a inclinação provocada pelas imperfeições geométricas para estruturas porticadas e a figura 2.3 é relativa ao mesmo efeito, mas em elementos isolados.

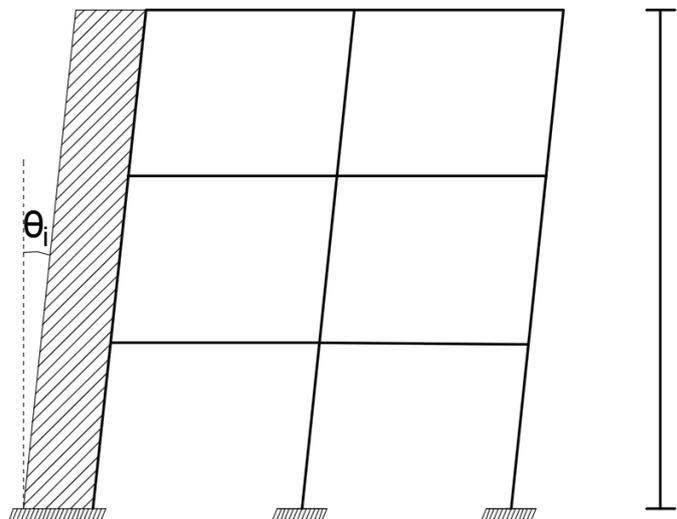


Figura 2.2 Imperfeições geométricas em estruturas porticadas

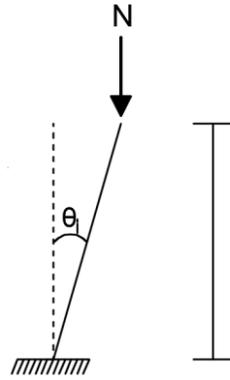


Figura 2.3 Imperfeições geométricas em pilar isolado

A inclinação  $\theta_i$ , pode ser determinada através de:

$$\theta_i = \theta_0 \cdot \alpha_h \cdot \alpha_m \quad (2.1)$$

em que:

- $\theta_0 = \frac{1}{200}$  – valor básico;
- $\alpha_h$  – coeficiente de redução relativo ao comprimento ou altura:  $\alpha_h = \frac{2}{\sqrt{l}}$ ;  $\frac{2}{3} \leq \alpha_h \leq 1$ ;
  - $l$  – comprimento ou altura (m), em que:
    - Elementos isolados:  $l$  = comprimento real do elemento;
    - Sistema de contraventamento:  $l$  = altura do edifício.
- $\alpha_m$  – coeficiente de redução relativo ao número de elementos:  $\sqrt{0,5 \left(1 + \frac{1}{m}\right)}$ ;
  - $m$  – número de elementos verticais que contribuem para o efeito total, em que:
    - Elementos isolados:  $m = 1$ ;
    - Sistema de contraventamento:  $m$  = número de elementos verticais que transmitem a força horizontal ao sistema de contraventamento.

Para elementos isolados e aplicado neste trabalho, o efeito das imperfeições geométricas pode ser considerado através de uma excentricidade inicial  $e_i$ , ou com uma força horizontal equivalente  $H_i$ . É importante referir que a excentricidade, ou a força horizontal, tem que ser instalada no momento máximo, como representa a figura 2.4.

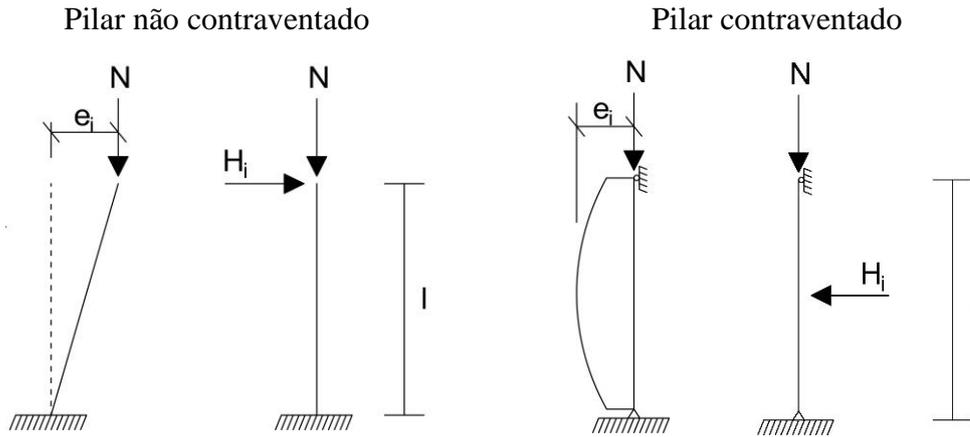


Figura 2.4 Efeito das imperfeições em pilares isolados (EC2, 2010)

A excentricidade  $e_i$  poderá ser determinada por:

$$e_i = \theta_i \cdot \frac{l_0}{2} \quad (2.2)$$

- $l_0$  – comprimento efetivo de encurvadura

e a força transversal  $H_i$ , poderá ser obtida por:

- Elementos não contraventados:

$$H_i = \theta_i \cdot N \quad (2.3)$$

- Elementos contraventados:

$$H_i = 2 \cdot \theta_i \cdot N \quad (2.4)$$

em que  $N$  é o esforço normal.

Em relação às estruturas porticadas, a inclinação  $\theta_i$  poderá ser representada por forças horizontais  $H_i$  na estrutura, ao nível dos vários pisos como está representada na figura 2.5, não esquecendo da inclusão das restantes ações,

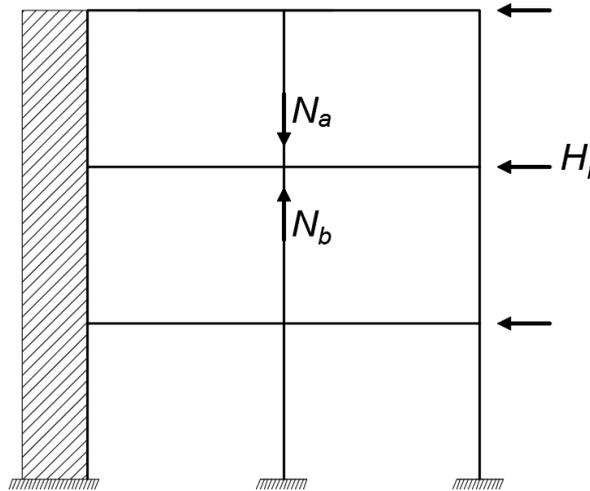


Figura 2.5 Efeito da inclinação  $\theta_i$  por forças horizontais  $H_i$

A força horizontal  $H_i$ , é determinada por:

$$H_i = \theta_i \cdot (N_b - N_a) \quad (2.5)$$

em que  $N_a$  e  $N_b$  são forças longitudinais que contribuem para  $H_i$

## 2.4 Esbelteza e comprimento efetivo de encurvadura

A esbelteza é um parâmetro muito importante quando se fala no dimensionamento aos efeitos de 2ª ordem. Este parâmetro permite caracterizar a sensibilidade dos elementos à encurvadura e é definido pela relação, entre o comprimento de encurvadura do pilar e o raio de giração da sua secção.

A esbelteza  $\lambda$  pode ser calculado através de:

$$\lambda = \frac{l_0}{i} \quad (2.6)$$

em que:

- $l_0$  – comprimento efetivo de encurvadura;
- $i$  – raio de giração da secção de betão não fendilhada.

Relativamente ao comprimento de encurvadura efetivo  $l_0$ , o EC2 permite quantificar, de uma forma simplificada, estes valores. Para os elementos comprimidos isolados, esse comprimento depende das condições de apoio das extremidades, que vão determinar a distância entre os pontos de inflexão da curvatura da deformada do elemento, como apresenta na figura 2.6.

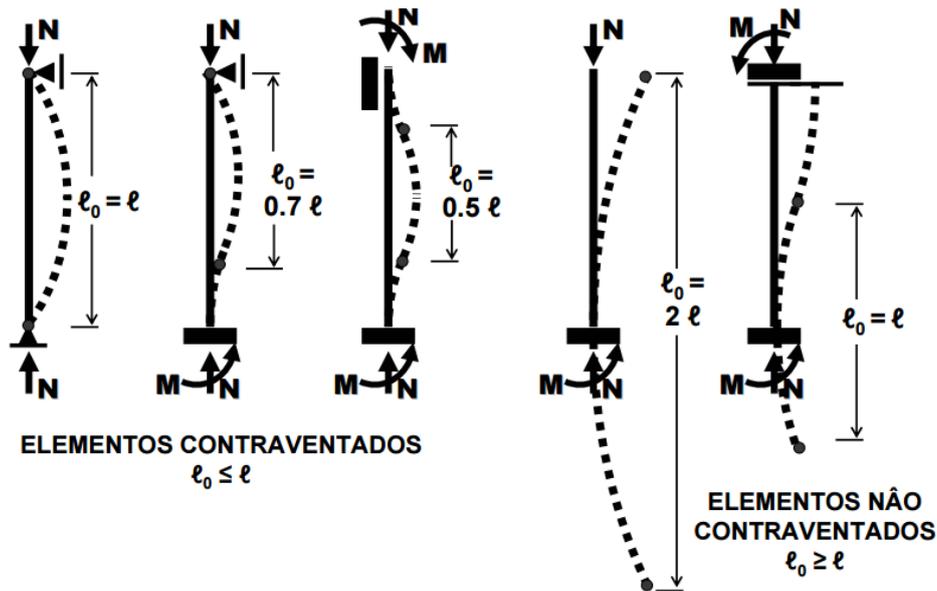


Figura 2.6 Comprimentos de encurvadura para elementos isolados (Válter Lúcio, 2006)

Quando os elementos comprimidos estão inseridos em estruturas porticadas, o cálculo do comprimento de encurvadura reveste-se de maior dificuldade. Para a sua quantificação, o regulamento EC2 propõe as seguintes expressões:

Elementos contraventados:

$$l_0 = 0,5l \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{k_1}{0,45 + k_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{k_2}{0,45 + k_2}\right)} \quad (2.7)$$

Elementos não contraventados:

$$l_0 = l \cdot \max \left\{ \sqrt{\left(1 + 10 \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}\right)}; \left(1 + \frac{k_1}{1 + k_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{k_2}{1 + k_2}\right) \right\} \quad (2.8)$$

sendo:

- $k_1, k_2$  – parâmetros relativos às extremidades do elemento, que traduzem a rigidez relativa à rotação dos nós. Caso a extremidade seja um encastramento, e como um encastramento perfeito na realidade é raro, recomenda-se o valor de  $k$  igual a 0,1. Para os restantes casos é definido por:

$$k_i = \left(\frac{\theta_i}{M_i}\right) \cdot \left(\frac{EI}{l}\right) \quad (2.9)$$

em que:

- $\theta_i$  – rotação dos elementos que restringem a rotação do nó;

- $EI$  – rigidez de flexão do elemento ou dos elementos comprimidos relativamente ao nó em estudo;
- $l$  – altura livre do pilar entre ligações de extremidade.

Como um método alternativo ou simplificado e aplicado neste trabalho, para a quantificação das rigidezes segundo EC2, tanto dos pilares como das vigas, Válder Lúcio (2006) mostra no seguinte exemplo, o cálculo do nó 2 relativamente ao pilar  $a$ .

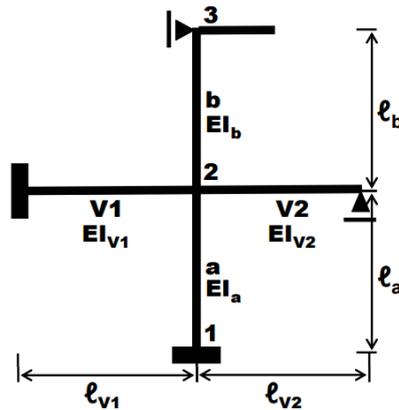


Figura 2.7 Exemplo de aplicação para quantificação das rigidezes (Válder Lúcio, 2006)

Para as vigas que restringem a rigidez rotacional dos elementos do nó 2, Válder Lúcio mostra como considerou sempre que existem diferentes condições de apoio nas extremidades das vigas.

$$\left(\frac{\theta}{M}\right) = \frac{1}{\frac{4EI_{V1}}{l_{V1}} + \frac{3EI_{V2}}{l_{V2}}} \quad (2.10)$$

Relativamente à rigidez dos pilares, as condições de apoio não têm influência, resultando apenas da soma das rigidezes dos pilares em ligação à extremidade em estudo.

$$\left(\frac{EI}{l}\right) = \left(\frac{EI}{l}\right)_a + \left(\frac{EI}{l}\right)_b \quad (2.11)$$

Por fim, a rigidez da extremidade superior do pilar  $a$ , é igual a:

$$k_2 = \frac{\frac{EI_a}{l_a} + \frac{EI_b}{l_b}}{\frac{4EI_{V1}}{l_{V1}} + \frac{3EI_{V2}}{l_{V2}}} \quad (2.12)$$

## 2.5 Métodos simplificados de quantificação dos efeitos de 2ª ordem

### 2.5.1 Método baseado na rigidez nominal

O Método Rigidez Nominal consiste em uma análise elástica de 2ª ordem, geometricamente não linear, baseada na rigidez nominal, na qual se recorre a uma redução de rigidez de flexão, considerando o comportamento não linear material do betão armado, em especial os efeitos de fendilhação e de fluência.

Para elementos comprimidos esbeltos, a rigidez nominal poderá ser calculada através de:

$$EI = K_c E_{cd} I_c + K_s E_s I_s \quad (2.13)$$

em que:

- $EI$  – rigidez nominal;
- $E_{cd}$  – valor de cálculo do módulo de elasticidade do betão;
- $I_c$  – momento de inercia da secção transversal do betão;
- $E_s$  – valor de cálculo do módulo de elasticidade do aço das armaduras;
- $I_s$  – momento de inercia das armaduras, em relação ao centro da área do betão;
- $K_c$  – coeficiente que toma em conta os efeitos da fendilhação, da fluência, etc.;
- $K_s$  – coeficiente que toma em conta a contribuição para a rigidez das armaduras ( $K_s=1$ ).

O coeficiente  $K_c$  poderá ser quantificado pela seguinte expressão:

$$K_c = \frac{k_1 k_2}{1 + \varphi_{ef}} \quad (2.14)$$

em que:

- $\varphi_{ef}$  – coeficiente de fluência efetivo, dado por  $\varphi_{ef} = \varphi_{(\infty, t_0)} \cdot M_{0Eqp} / M_{0Ed}$ , em que  $\varphi_{(\infty, t_0)}$  é o coeficiente de fluência, com valor médio de 2,5.  $M_{0Ed}$  é o momentos fletor de cálculo de 1ª ordem e  $M_{0Eqp}$  o momento fletor na combinação quase-permanente de ações;
- $k_1$  – coeficiente que depende da classe de resistência do betão e poderá ser determinado da seguinte forma:

$$k_1 = \sqrt{\frac{f_{ck}}{20}} \quad (2.15)$$

em que  $f_{ck}$  é o valor característico da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias de idade.

- $k_2$  – coeficiente que depende do esforço normal e da esbelteza:

$$k_2 = n \cdot \frac{\lambda}{170} \leq 0,20 \quad (2.16)$$

- $n$  – esforço normal reduzido,  $\frac{N_{Ed}}{A_c \cdot f_{cd}}$ ;
- $\lambda = \frac{l_0}{i}$  – coeficiente de esbelteza, em que  $i = \sqrt{\frac{I_c}{A}}$  é o raio de giração da secção de betão não fendilhada;

Para quantificação dos efeitos de 2ª ordem, o Método da Rigidez Nominal procede a amplificação do momento de 1ª ordem. Sendo o momento final de cálculo expresso pela seguinte expressão:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \left[ 1 + \frac{\beta}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1} \right] \quad (2.17)$$

em que:

- $M_{0Ed}$  – momento de primeira ordem (dependente da secção crítica com inclusão do momento relativo às imperfeições geométricas);
- $\beta$  – coeficiente que depende da distribuição dos momentos de 1ª e 2ª ordem e expresso da seguinte forma:

$$\beta = \frac{\pi^2}{c_0} \quad (2.18)$$

em que  $c_0$  depende da distribuição do momento de primeira ordem:

- diagrama de momentos de primeira ordem constantes ( $c_0 = 8$ );
- parabólicos ( $c_0 = 9,6$ );
- triangulares simétricos ( $c_0 = 12$ ).

- $N_{Ed}$  – valor de cálculo do esforço axial;
- $N_B$  – carga crítica de Euler de encurvadura baseada na rigidez nominal. Os seus parâmetros devem ser quantificados considerando o efeito não linear material, e é dado por:

$$N_B = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} \quad (2.19)$$

### 2.5.1.1 Sequência de cálculo

Para a apresentação da sequência de cálculo de aplicação deste método, utilizou-se como exemplo o pilar  $P2$  do pórtico baliza  $PT11$ , estudado no capítulo 4.4. A classe de betão adotada é o C20/25 e o aço S400, não tendo sido considerado o efeito de fluência. Utilizado um algoritmo de cálculo elástico, foi possível obter os esforços de 1ª ordem: esforço axial e momento atuante da extremidade com maior valor onde se inclui o momento resultante das imperfeições geométricas.

$$M_{0Ed} = M_{elastico} + M_{Imperfeições\ Geométricas} = 76,5\ kN.m$$

$$N_{Ed} = 814,5\ kN$$

$$A_s = 11,27\ cm^2$$

Com os esforços de 1ª ordem e respetiva secção determinada, procedeu-se, então, à quantificação dos efeitos de 2ª ordem (esforço final), através do Método simplificado de Rigidez Nominal. Para tal quantificou-se:

– A Rigidez nominal:

$$EI = K_c E_{cd} I_c + K_s E_s I_s = EI_c + EI_s$$

onde:

$$EI_c = K_c E_{cd} I_c$$

$$K_c = \frac{k_1 k_2}{1 + \varphi_{ef}}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{f_{ck}}{20}} = \sqrt{\frac{20}{20}} = 1$$

$$k_2 = n \cdot \frac{\lambda}{170} = \frac{N_{Ed}}{A_c \cdot f_{cd}} \cdot \frac{\lambda}{170} = \frac{814,5}{0,09 \cdot \left(\frac{20 \times 10^3}{1,5}\right)} \cdot \frac{79,8}{170} = 0,32 \geq 0,2 \Rightarrow 0,2$$

$$K_c = \frac{k_1 k_2}{1 + \varphi_{ef}} = \frac{1 \times 0,2}{1 + 0} = 0,2$$

$$E_{cd} = \frac{30 \times 10^6}{1,2} = 25 \times 10^6 \text{ KPa}$$

$$I_c = \frac{0,3 \times 0,3^3}{12} = 6,75 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$EI_c = K_c E_{cd} I_c = 0,2 \times (25 \times 10^6) \times (6,75 \times 10^{-4}) = 3375 \text{ kNm}^2$$

$$EI_s = K_s E_s I_s$$

$$K_s = 1$$

$$E_s = 200 \text{ GPa}$$

$$I_s = \sum (I_i + A_i d_i^2) = (5,6335 \times 10^{-4} \times 0,12^2) \times 2 = 1,62245 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$I_i$  desprezada face ao valor de  $A_i d_i^2$ .

e:

$$EI_s = K_s E_s I_s = 1 \times (200 \times 10^6) \times (1,62245 \times 10^{-5}) = 3244,9 \text{ kNm}^2$$

Desta forma:

$$EI = K_c E_{cd} I_c + K_s E_s I_s = EI_c + EI_s = 3375 + 3244,9 = 6619,9 \text{ kNm}^2$$

– A carga crítica baseada na rigidez nominal  $N_b$  obtém-se através de:

$$N_b = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} = \frac{\pi^2 \times 6619,9}{6,91^2} = 1368,35 \text{ kN}$$

Como  $\beta$  é um fator que depende da distribuição do momento de primeira ordem, admitiu-se para  $c_0$  o valor 10, uma vez que o momento de 1ª ordem apresenta uma forma triangular, mas não simétrica. Assim sendo, obtém-se o momento final de cálculo:

$$\beta = \frac{\pi^2}{c_0} = \frac{\pi^2}{10} = 1$$

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \left[ 1 + \frac{\beta}{\frac{N_B}{N_{Ed}} - 1} \right] = 76,5 \left[ 1 + \frac{1}{\frac{1368,35}{814,5} - 1} \right] = 189 \text{ kN.m}$$

Como a armadura admitida para o cálculo de EI foi a armadura obtida dos esforços de 1ª ordem, para o método adotou-se um processo iterativo a fim de que houvesse uma correção de EI. O processo iterativo é convergente quando a armadura obtida para o cálculo de EI resulta no valor de EI igual ao de EI da iteração anterior, com uma tolerância de 1%.

Tabela 2.1 Iterações do Método da Rigidez Nominal

$A_s$ inicial [cm <sup>2</sup> ]	$I_s$ [m <sup>4</sup> ]	$K_c E_c I_c$ [kNm <sup>2</sup> ]	$K_s E_s I_s$ [kNm <sup>2</sup> ]	EI [kNm <sup>2</sup> ]	$N_b$ [kN]	$M_{Ed}$ [kNm]	$A_s$ final [cm <sup>2</sup> ]	Diferença EI [%]
11,27	1,62x10 <sup>-5</sup>	3375	3245	6620	1368	189,0	40,88	-
40,88	5,89x10 <sup>-5</sup>	3375	11774	15149	3130	103,1	18,31	-128,8%
18,31	4,12x10 <sup>-5</sup>	3375	8242	11617	2400	115,3	21,58	23,3%
21,58	3,11x10 <sup>-5</sup>	3375	6214	9589	1981	129,2	25,29	17,5%
25,29	3,64x10 <sup>-5</sup>	3375	7284	10659	2202	120,8	23,05	-11,2%
23,05	3,32x10 <sup>-5</sup>	3375	6639	10014	2069	125,5	24,31	6,1%
24,31	3,50x10 <sup>-5</sup>	3375	7000	10375	2143	122,8	23,57	-3,6%
23,57	3,39x10 <sup>-5</sup>	3375	6789	10164	2100	124,3	23,99	2,0%
23,99	3,45x10 <sup>-5</sup>	3375	6910	10285	2125	123,4	23,75	-1,2%
23,75	3,42x10 <sup>-5</sup>	3375	6839	10214	2110	123,8	23,89	0,7%

### 2.5.2 Método baseado na curvatura nominal

É um método simplificado para elementos isolados, baseado no cálculo de uma excentricidade adicional, que permite quantificar o momento de 2ª ordem, a partir da configuração da deformada obtida através da estimativa da curvatura máxima. O momento resultante deste método é o momento de 2ª ordem, sendo o valor do momento de cálculo obtido à custa da soma do momento de 1ª ordem com o momento de 2ª ordem, assim sendo:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2 \quad (2.20)$$

onde:

- $M_{0Ed}$  – momento de primeira ordem (dependente da secção crítica com inclusão do momento relativo às imperfeições geométricas);
- $M_2$  – momento nominal de segunda ordem.

O momento nominal de segunda ordem  $M_2$ , pode ser obtida através da seguinte expressão:

$$M_2 = N_{Ed} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{l_o^2}{c} \quad (2.21)$$

- $N_{Ed}$  – valor de cálculo do esforço normal;
- $\frac{1}{r}$  – curvatura;
- $l_o$  – comprimento efetivo de encurvadura (ver capítulo 2.4);
- $c$  – coeficiente que depende da distribuição da curvatura. No caso em que a secção transversal seja constante utiliza-se normalmente  $c=10$ . Quando o momento de primeira for constante, deve-se considerar  $c=8$ , em que corresponde ao valor limite inferior.

Para os casos de elementos de secções constantes e simétricas, a curvatura poderá ser determinada da seguinte forma:

$$\frac{1}{r} = K_r \cdot K_\varphi \cdot \frac{1}{r_0} \quad (2.22)$$

em que:

- $K_r$  – fator de correção dependente dos esforço normal e pode ser determinado por:

$$K_r = \frac{n_u - n}{n_u - n_{bal}} \leq 1 \quad (2.23)$$

em que:

- $n_u = 1 + \omega$ , em que  $\omega = (A_s \cdot f_{yd}) / (A_c \cdot f_{cd})$ ;
- $n$  – esforço normal reduzido:  $\frac{N_{Ed}}{A_c \cdot f_{cd}}$ , em que  $N_{Ed}$  é o valor de cálculo do esforço normal e  $A_c$  área da secção transversal de betão;
- $n_{bal}$  – valor de  $n$  correspondente ao momento resistente máximo, que pode ser utilizado o valor de 0,4;
- $K_\varphi$  – fator relacionado com a fluência em que deverá ser considerado através da seguinte expressão:

$$K_\varphi = 1 + \beta \cdot \varphi_{ef} \quad (2.24)$$

em que:

- $\varphi_{ef}$  – coeficiente de fluência efetivo;
- $\beta = 0,35 + \frac{f_{ck}}{200} - \frac{\lambda}{150}$ , em que  $\lambda$  é o coeficiente de esbelteza (ver Capítulo 2.4);
- $\frac{1}{r_0}$  – curvatura não corrigida e pode ser determinada por:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\varepsilon_{yd}}{0,45d} \quad (2.25)$$

em que:

- $\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s}$ ;
- $d$  – altura útil.

### 2.5.2.1 Sequência de cálculo

Para a sequência de cálculo do Método Curvatura Nominal foi utilizado o mesmo exemplo de aplicação do Método Rigidez Nominal. Procedeu-se então à quantificação dos efeitos de 2ª ordem através do método simplificado da curvatura nominal, determinando-se:

– A curvatura:

$$\frac{1}{r} = K_r \cdot K_\varphi \cdot \frac{1}{r_0}$$

com:

$$K_r = \frac{n_u - n}{n_u - n_{bal}}$$

$$n_u = 1 + \omega = 1 + \frac{(A_s \cdot f_{yd})}{(A_c \cdot f_{cd})} = 1 + \frac{[(11,27 \times 10^{-4}) \times (\frac{400}{1,15})]}{[(0,3 \times 0,3) \times (\frac{20}{1,5})]} = 1,33$$

$$n = \frac{N_{Ed}}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{814,5}{[(0,3 \times 0,3) \times (\frac{20 \times 10^3}{1,5})]} = 0,68$$

$$n_{bal} = 0,4$$

$$K_r = \frac{n_u - n}{n_u - n_{bal}} = \frac{1,33 - 0,68}{1,33 - 0,4} = 0,70 \leq 1$$

e:

$$K_{\varphi} = 1 + \beta \cdot \varphi_{ef}$$

$$\beta = 0,35 + \frac{f_{ck}}{200} - \frac{\lambda}{150} = 0,35 + \frac{20}{200} - \frac{79,81}{150} = -0,082 \text{ m}^{-1}$$

$$\varphi_{ef} = 0$$

$$K_{\varphi} = 1 + \beta \cdot \varphi_{ef} = 1 + (-0,082 \times 0) = 1$$

e:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\varepsilon_{yd}}{0,45d}$$

$$d = 0,27 \text{ m}$$

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\varepsilon_{yd}}{0,45d} = \frac{\left(\frac{400}{1,15}\right) / (200 \times 10^3)}{0,45 \times 0,27} = 0,014 \text{ m}^{-1}$$

$$\frac{1}{r} = K_r \cdot K_{\varphi} \cdot \frac{1}{r_0} = 0,7 \times 1 \times 0,014 = 0,010 \text{ m}^{-1}$$

– O momento nominal de 2ª ordem  $M_2$  é obtido por:

$$M_2 = N_{Ed} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{l_0^2}{c} = 814,5 \times 0,010 \times \frac{6,92^2}{10} = 38,9 \text{ kN.m}$$

– e o momento de cálculo (incluindo momentos de 2ª ordem) será:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2 = 76,5 + 38,9 = 115,4 \text{ kN.m}$$

Para o método simplificado da curvatura nominal, também se aplicou um processo iterativo, como no Método da Rigidez Nominal. O processo iterativo converge aquando a excentricidade de segunda ordem ( $e_2$ ) obtida no cálculo, resultar num valor igual de excentricidade ( $e_2$ ) calculada na iteração anterior, com uma tolerância de 1%.

Tabela 2.2 Iterações do Método da Curvatura Nominal

$A_s$ inicial [cm <sup>2</sup> ]	$1/r_0$	w	$K_r$	$K_{\phi}$	$1/r$	$e_2$ [cm]	$M_{Ed}$ [kN.m]	$A_s$ final [cm <sup>2</sup> ]	Diferença [%]
11,27	0,0143	0,327	0,699	1	0,010	4,14	115,4	21,98	-
21,98	0,0143	0,637	0,774	1	0,011	5,30	119,7	23,13	28,0%
23,23	0,0143	0,670	0,780	1	0,011	5,34	120,0	23,23	0,8%



### 3. SEGURANÇA ESTRUTURAL

#### 3.1 Introdução

A segurança é fundamental quando se trata de vida e conforto humano. Quando se fala no meio onde vivemos, a segurança de uma estrutura é a capacidade que tem de conseguir suportar as ações a que vai ser submetida, sem atingir um determinado estado limite. Esse estado representa a margem de segurança que a estrutura apresenta para as situações de uso e situações de ruína.

Com o melhor conhecimento e caracterização das ações, do comportamento dos materiais e com a evolução dos modelos de cálculo ao longo do tempo, os níveis de segurança exigidos podem ser melhorados. A filosofia de segurança presente na regulamentação em vigor que garante estes níveis de segurança é baseada num conjunto de coeficientes parciais de segurança aplicado às ações e às resistências.

Para uma análise da fiabilidade do dimensionamento, Delgado (2002) desenvolveu um formato de verificação da segurança que, através de técnicas probabilísticas, quantifica as probabilidades de ruína associadas à estrutura. Neste capítulo será apresentado um breve conceito de estado limite, dos níveis de segurança e da metodologia aplicada, desenvolvido por Delgado (2002).

#### 3.2 Conceito de estado limite

De acordo com o regulamento em vigor, entende-se por estado limite um estado a partir do qual a estrutura deixa de atender os requisitos para qual foi dimensionada, deixando assim de desempenhar as suas funções como estrutura.

Esses estados são classificados como *estados limites últimos* e *estados limites de utilização*. Aos *estados limites últimos* observam-se situações de esgotamento da capacidade resistente, que provocam o colapso e colocam em risco a vida humana. Como exemplos deste estado, podem identificar-se situações em que ocorre uma rotura de secções críticas da estrutura (estado limite último de resistência), perda de estabilidade de equilíbrio (estado limite último de equilíbrio), instabilidade de elementos estruturais ou da estrutura no seu todo (estado limite de encurvadura). O *Estado limite de utilização* resulta em menores prejuízos e não põe em

risco vidas humanas, evitando consequências de degradação estética, de durabilidade e do nível de desempenho funcional para o qual a estrutura foi dimensionada. O estado visa evitar deformações excessivas, fissuração excessiva ou prematura, deslocamentos excessivos sem perda da estabilidade e vibrações excessivas.

### 3.3 Segurança estrutural na regulamentação em vigor: Nível 1

O formato semi-probabilístico, que serve de base aos critérios definidos nos atuais regulamentos para o dimensionamento estrutural, é classificado como nível 1. A segurança é garantida através da substituição de valores característicos de ação e resistência, afetados de coeficientes de segurança parciais. Estes valores são quantificados por estudos estatísticos da distribuição das diversas variáveis e os coeficientes de segurança calibrados por formatos de segurança de nível superior. A avaliação de segurança é feita comparando os valores de cálculo dos efeitos das ações com os valores de cálculo das resistências.

A verificação de segurança, de acordo com o formato semi-probabilístico regulamentar, cumpre-se, se assim se verificar:

$$S_d \leq R_d \quad (3.1)$$

Sendo  $S_d$  o valor de cálculo de esforços atuantes obtido a partir de uma majoração de ações tais que:

$$S_d = \gamma_S S_K \quad (3.2)$$

em que:

$\gamma_S$  – coeficiente parcial de segurança relativo à solicitação;

$S_K$  – valor de cálculo de esforços atuantes sem majoração;

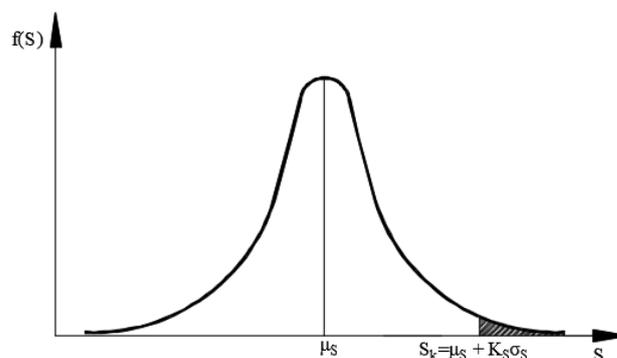


Figura 3.1 Representação esquemática dos valores característicos de ações (Delgado, 2002)

E sendo  $R_d$  o valor de cálculo de esforços resistentes obtido a partir da minoração das resistências, de tal forma que:

$$R_d = \frac{R_K}{\gamma_R} \quad (3.3)$$

em que:

$R_K$  – valor característico da capacidade resistente do material;

$\gamma_R$  – coeficiente de segurança que tem em conta a variabilidade das propriedades do material.

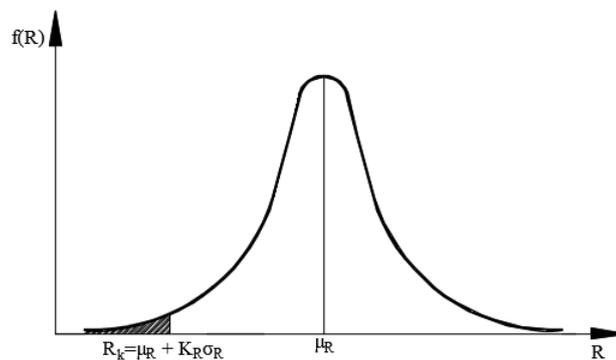


Figura 3.2 Representação esquemática dos valores característicos de resistências (Delgado, 2002)

Desta forma a segurança pode ser verificada pela expressão (3.4) como ilustra graficamente a figura 3.3.

$$S_d = \gamma_S S_K \leq R_d = \frac{R_K}{\gamma_R} \quad (3.4)$$

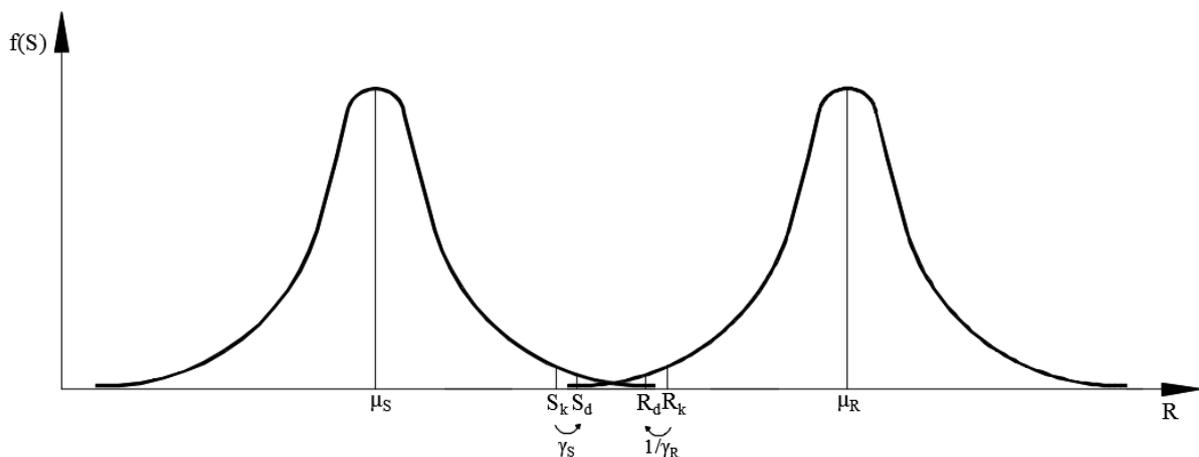


Figura 3.3 Representação esquemática do formato semi-probabilístico de segurança (Delgado, 2002)

### 3.4 Segurança em análises não lineares: Nível 2

Este formato de segurança de nível 2 tem implícita a necessidade de conhecimento e caracterização das variáveis envolvidas, através da quantificação de medidas estatísticas, assim como a possibilidade de obter soluções analíticas para os problemas formulados. Nesta condição, é possível medir o nível de segurança através da quantificação do índice de fiabilidade  $\beta$  ou da respetiva probabilidade de ruína  $p_f$ .

#### 3.4.1 Probabilidade de ruína

O estudo da quantificação da probabilidade de ruína, de uma dada estrutura, pode ser estudado ao reduzir o problema a uma relação entre a solicitação  $S$  e a resistência da estrutura  $R$ , tal que: (Delgado, 2002)

$$g(R, S) = R - S \leq 0 \quad (3.5)$$

Sendo a condição que separa a segurança da ruína expressa por:

$$g(R, S) = R - S = 0 \quad (3.6)$$

Dadas as expressões anteriores, a probabilidade de ruína  $p_f$  poderá ser, genericamente, expressa através de:

$$p_f = P(g(R, S) \leq 0) \quad (3.7)$$

ou

$$p_f = P(R - S \leq 0) \quad (3.8)$$

Recorrendo a noções básicas de probabilidade,  $p_f$  corresponde ao integral da função  $f_{RS}$ , no domínio da rotura  $g(R, S) \leq 0$ , Delgado (2002):

$$p_f = \int_{g(R,S) \leq 0} f_{RS}(R, S) dRdS \quad (3.9)$$

em que  $f_{RS}$  é a função densidade de probabilidade conjuntas das variáveis  $S$  e  $R$

Se as variáveis  $R$  e  $S$  forem independentes, então, a expressão  $f_{RS}(R, S) = f_R(R) \cdot f_S(S)$  transforma (3.9) em:

$$p_f = \iint_{g(R,S) \leq 0} f_R(R) f_S(S) dR dS \quad (3.10)$$

O que pode ainda ser transformado em:

$$p_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{R < S} f_R(R) f_S(S) dR dS \quad (3.11)$$

### 3.4.2 Índice de fiabilidade

O conceito de margem de segurança  $Z$  pode ser definido como a diferença entre a solicitação  $S$  e a resistência  $R$ , expressa por:

$$Z = R - S \Leftrightarrow p_f = P(R - S \leq 0) \Leftrightarrow p_f = P(Z \leq 0) \quad (3.12)$$

Na hipótese de as variáveis  $S$  e  $R$  serem variáveis gausseanas, a margem de segurança  $Z$  também o será, obtendo a sua média e desvio padrão através de:

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_S \quad (3.13)$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 - \sigma_S^2 \quad (3.14)$$

Transformando a variável  $Z$  numa variável normal reduzida, e tendo em atenção os valores de probabilidade associados à função de distribuição normal reduzida, a probabilidade de ruína é quantificada através de (Delgado, 2002):

$$p_f = P[Z \leq 0] = \Phi\left(\frac{0 - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) \quad (3.15)$$

Definindo o índice de fiabilidade  $\beta$  como:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \quad (3.16)$$

A probabilidade de ruína pode ser expressa de forma simplificada através da expressão: (Delgado 2002)

$$p_f = \Phi\left(\frac{-(\mu_R - \mu_S)}{\sqrt{(\sigma_R^2 - \sigma_S^2)}}\right) = \Phi(-\beta) \quad (3.17)$$

Na figura 3.4 apresenta-se uma representação gráfica da função de distribuição da margem de segurança  $Z$ .

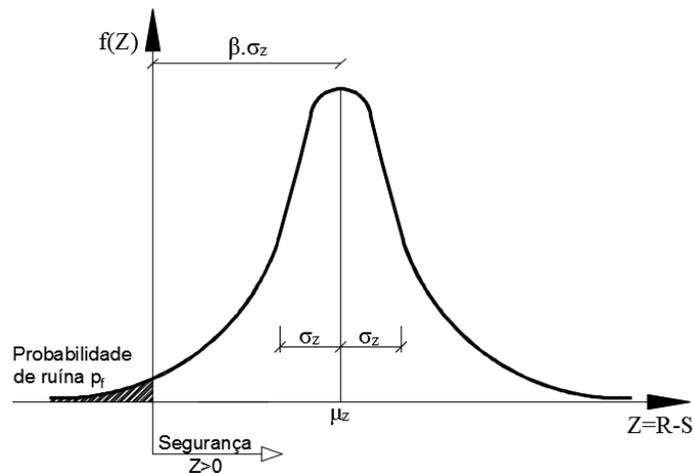


Figura 3.4 Representação gráfica da função de distribuição da margem de segurança  $Z$  e do índice de fiabilidade  $\beta$  (Delgado, 2002)

A formulação apresentada, para o índice de fiabilidade, compete ao caso em que está presente uma relação linear entre as variáveis globais  $R$  e  $S$ . Para o caso geral, em que existem funções de variáveis independentes:

$$R = g_r(X_1, X_2, \dots, X_m) \quad (3.18)$$

$$S = g_s(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_n) \quad (3.19)$$

A função de estado limite pode ser representada por:

$$Z(R, S) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (3.20)$$

### 3.5 Metodologia de avaliação de segurança proposta por Delgado (2002)

A estratégia, proposta por Delgado (2002), procura estabelecer uma metodologia de verificação de segurança que permita quantificar a probabilidade de ruína de uma estrutura, tendo como ponto de partida o conceito base de:

$$p_f = P(R < S) \quad (3.21)$$

em que:

$R$  – Resistência (resulta da evolução do comportamento material da estrutura ao longo do carregamento das ações);

$S$  – Solicitação (fator que depende das ações atuantes na estrutura);

A determinação da probabilidade de ruína  $p_f$ , implica a necessidade de caracterização das variáveis S e R, recorrendo-se, para tal, ao ajuste de leis de distribuição de variáveis.

### 3.5.1 Lei de distribuição da Solicitação S

O valor de cálculo da solicitação  $S_d$ , pode ser obtido à custa da multiplicação de um fator de segurança global  $\gamma_S$ , pela soma dos valores característicos e de combinação das diferentes ações intervenientes.

$$S_d = \gamma_S S'_k = \gamma_S \left( G_k + Q_{k_1} + \sum_{j>1} \psi_0 Q_{k_j} \right) \quad (3.22)$$

De acordo com Calgaro (1996), o coeficiente  $\gamma_S$  de segurança pode ser dividido por duas parcelas:

$$\gamma_S = \gamma_{Sd} \times \gamma_s \quad (3.23)$$

$\gamma_{Sd}$  – incertezas do modelo, sugerido com idêntico valor da generalidade das ações e aproximadamente igual a 1,125;

$\gamma_s$  – incertezas associadas à variabilidade da ação, cujo valor é função do tipo de ação.

Não sendo fácil de caracterizar probabilisticamente as incertezas do modelo, assume-se que apenas o valor acima  $\gamma_s$  é possível de tratar por via probabilística, contribuindo para a definição da lei de distribuição da variável global S. Como primeiro parâmetro estatístico da distribuição, o valor característico da solicitação  $S_k$  pode ser definido pelo somatório dos valores característicos e de combinação das ações intervenientes, com a inclusão do coeficiente de segurança como fator amplificador do valor característico, tal como descrito na expressão:

$$S_k = \gamma_{Sd} S'_k = \gamma_{Sd} \left( G_k + Q_{k_1} + \sum_{j>1} \psi_0 Q_{k_j} \right) \quad (3.24)$$

Verificando que a adição de ações, com as configurações de aplicação e as formas de atuação desiguais, não é possível de se aplicar, Delgado (2002) propõe a definição de uma nova variável. Desse modo, o fator de carga da solicitação  $\lambda S$  é definido pela divisão de S pela combinação de ações em estudo, não multiplicadas pelos coeficientes de segurança parciais  $S'_k$ .

$$\lambda S = \frac{S}{S'_k} = \frac{S}{G_k + Q_{k_1} + \sum_{j>1} \Psi_{0j} G_{k_j}} \quad (3.25)$$

$$\lambda S = \frac{S_k}{G_k + Q_{k_1} + \sum_{j>1} \Psi_{0j} G_{k_j}} = \frac{\gamma_{sd} (G_k + Q_{k_1} + \sum_{j>1} \Psi_{0j} Q_{k_j})}{G_k + Q_{k_1} + \sum_{j>1} \Psi_{0j} Q_{k_j}} = \gamma_{sd} = 1,125 \quad (3.26)$$

Para uma completa definição da lei de distribuição normal, é necessário determinar um segundo parâmetro estatístico, tendo-se optado pelo coeficiente de variação:

$$CV_S = \frac{\sigma_S}{\mu_S} \quad (3.27)$$

em que:

$CV_S$  – coeficiente de variação - (Vários estudos indicam 0,10 para ações permanentes e 0,40 para ações variáveis comuns);

$\sigma_S$  – desvio padrão;

$\mu_S$  – valor médio.

É importante referir que Delgado (2002) optou por um intervalo de variação de  $CV_S$  maior, dos 0,10 aos 0,70, para analisar a sensibilidade dessa mesma variação. Definidos os parâmetros da lei de distribuição normal da solicitação, esta pode ser definida da seguinte forma:

$$L_{\lambda S}^N(1,125; CV_{\lambda S}(0,10 \leftrightarrow 0,70)) \quad (3.28)$$

### 3.5.2 Lei de distribuição da resistência R

A resistência R é definida como uma variável, que é caracterizada pelo esforço resistente para com as solicitações das ações ao máximo incremento de S, que conduz à ruína. A determinação da variável resistência poderá ser efetuada por recurso a um algoritmo de análise não linear, incrementando de 0 até à ruína da estrutura a combinação de ações referida como valor característico  $S'_k$  da solicitação. Desta forma, é possível obter a carga da resistência  $\lambda_R$ , que corresponde ao fator multiplicativo de  $S'_k$  obtido, imediatamente, antes da ruína.

$$R = \lambda_R S'_k = \lambda_R \left( G_k + Q_{k_1} + \sum_{j>1} \Psi_{0j} Q_{k_j} \right) \quad (3.29)$$

O processo incremental da solicitação consiste no incremento de um conjunto de ações distintas, tendo-se definido uma sequência de aplicação dessas ações da seguinte forma:

1º- Incrementar as ações permanentes  $G$  de 0 até ao seu valor característico  $G_k$ ;

2º- Incrementar, simultaneamente, o conjunto de ações variáveis de 0 até ao valor da combinação  $Q_{k_1} + \sum_{j>1} \Psi_{0_j} Q_{k_j}$ ;

3º- Incrementar simultaneamente a totalidade das ações, de forma proporcional à sua combinação  $G_k + Q_{k_1} + \sum_{j>1} \Psi_{0_j} Q_{k_j}$ .

A determinação do parâmetro  $\lambda_R$  está dependente das propriedades mecânicas dos seus materiais (resistência à compressão e módulo de elasticidade do betão, tensão de cedência e módulo de elasticidade do aço) e das propriedades geométricas dos elementos (geometria global da estrutura, dimensões das secções, quantidade de armadura). Dada a variabilidade deste parâmetro, foi necessário definir as leis de distribuição de  $R$ , através de um método de simulação: Método do Hipercubo Latino (MHL) a fim de gerar um conjunto de amostras das variáveis básicas  $f_c$  e  $f_{sy}$ .

A lei de distribuição é definida pelos parâmetros estatísticos do valor característico para o quantil 0,05  $\lambda R_k$  e o coeficiente de variação  $CV_{\lambda R}$ :

$$L_{\lambda R}^N(\lambda R_k; CV_{\lambda R}) \quad (3.30)$$

Obtendo-se os parâmetros através de:

$$\text{Média: } \bar{\lambda R} = \sum_{i=1,n} \frac{\lambda R_i}{n} \quad (3.31)$$

$$\text{Desvio padrão: } s_{\lambda R} = \sqrt{\sum_{i=1,n} \frac{(\lambda R_i - \bar{\lambda R})^2}{n-1}} \quad (3.32)$$

$$\lambda R_k = \bar{\lambda R} - 1,645 \cdot s_{\lambda R} \quad (3.33)$$

$$CV_{\lambda R} = \frac{s_{\lambda R}}{\lambda R_k} \quad (3.34)$$

### – Tensão de rotura do betão à compressão – Lei de distribuição

A lei de distribuição que caracteriza a resistência à compressão é definida por:

$$L_{f_c}^N(f'_{ck}; CV_{f'_c}) \quad (3.35)$$

Para quantificar o coeficiente de variação  $CV_{f'_c}$  foi necessário quantificar o desvio padrão de  $f_c$ . Como tal, foi admitida uma lei de distribuição normal:

$$f_{ck} = f_{cm} - 1,645\sigma_{f_c} \quad (3.36)$$

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \quad (3.37)$$

Podendo, então, definir-se o desvio padrão:

$$\sigma_{f_c} = \frac{8}{1,645} = 4,878 \text{ (MPa)} \quad (3.38)$$

Calculado o desvio padrão de  $f_c$ , então, pode ser definido o coeficiente de variação:

$$CV_{f'_c} = \frac{\sigma_{f_c}}{f_{cm}} = \frac{4,878}{f_{cm}} \text{ (MPa)} \quad (3.39)$$

No que diz respeito ao valor  $f'_{ck}$ , o EC2 estabelece uma importante alteração, uma vez que o fator preventivo, de uma eventual perda de capacidade resistente do betão, ao longo do tempo,  $\lambda_c$ , tem como valor recomendado 1.

Na regulamentação anterior – REBAP:

$$f'_{ck} = \lambda_c \frac{f_{ck}}{\eta} = \mathbf{0,85} \frac{f_{ck}}{1,15} \quad (3.40)$$

Na regulamentação em vigor – Eurocódigo 2:

$$f'_{ck} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\eta} = \mathbf{1,00} \frac{f_{ck}}{1,15} \quad (3.41)$$

em que:

$\eta$  – Incertezas relativas às diferenças entre a resistência à compressão convencional e valores medidos em obra.

Na tabela 3.1 apresenta-se os parâmetros estatísticos da distribuição para as várias classes de betão.

Tabela 3.1 Parâmetros estatísticos da distribuição de  $f'_c$  para as diferentes classes de betão

Classe de betão		$CV_{f'_c}$	REBAP		EC2		$\sigma_{f'_c}$
REBAP	EC2		$f'_{ck}$ (MPa)	$f'_{cm}$ (MPa)	$f'_{ck}$ (MPa)	$f'_{cm}$ (MPa)	
B 15	C 12/15	0,244	8,87	14,81	10,43	17,43	3,6
B 20	C 16/20	0,203	11,83	17,77	13,91	20,90	3,6
B 25	C 20/25	0,174	14,78	20,72	17,39	24,38	3,6
B 30	C 25/30	0,148	18,48	24,42	21,74	28,72	3,6
B 35	C 30/37	0,128	22,17	28,11	26,09	33,07	3,6
B 40	C 35/45	0,113	25,87	31,80	30,43	37,42	3,6

### – Tensão de cedência das armaduras – Lei de distribuição

A lei de distribuição que caracteriza a tensão de cedência das armaduras é definida por (3.42) e encontram-se ilustrados os parâmetros estatísticos da distribuição para as várias classes de aço na tabela 3.2, obtidos através dos valores regulamentares.

$$L_{f_s}^N(f_{syk}; CV_{f_s}) \quad (3.42)$$

Tabela 3.2 Parâmetros estatísticos da distribuição  $f_{sy}$  para as diferentes classes de aço

Classe do aço		$f_{syk}$ (MPa)	$CV_{f_s}$	$f_{sym}$ (MPa)	$\sigma_{f_s}$
REBAP	EC2				
A 235	-	235	0,087	274,25	23,86
A 400	S 400	400	0,087	466,81	40,61
A 500	S 500	500	0,087	583,51	50,77

Definidas as leis de distribuição das variáveis básicas  $f_c$  e  $f_{sy}$ , é aplicado o método de Hipercubo Latino, para obter 30 amostras (simulações) dessas mesmas variáveis. De seguida, procede-se, através do programa de cálculo não linear FEMPOR1 (algoritmo de análise não linear geométrica e material baseado no método dos elementos finitos), à quantificação da carga de ruína das amostras. Caracterizadas as leis de distribuição S e R, é verificada a validade dos ajustes a uma lei normal aplicando dois testes estatísticos:

- *Teste de normalidade baseado nos coeficientes de assimetria e de achatamento*
- *Teste de Kolmogorov-Smirnov modificado – versão proposta por Lilliefors (1967)*

Uma vez validados os resultados, é agora possível quantificar os índices de fiabilidade e respetivas probabilidades de ruína.

## **4. COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS DE DIMENSIONAMENTO AOS EFEITOS DE 2ª ORDEM**

### **4.1 Introdução**

Como os métodos de quantificação dos efeitos de 2ª ordem presentes na regulamentação em vigor são simplificados, é importante aferir a qualidade dos resultados obtidos na sua aplicação. Assim sendo, neste capítulo proceder-se-á à avaliação da qualidade dos métodos simplificados de dimensionamento de pilares baseada na rigidez nominal e na curvatura nominal, a partir de um conjunto de casos de estruturas.

Para tal, numa primeira fase e para cada um dos pórticos, quantificaram-se os principais resultados de esforços e secções de armadura, para os efeitos de 1ª e 2ª ordem (esforço final), segundo as regulamentações REBAP e EC2, constituído pelos pórticos estudados por Delgado (2002). Desta forma, foi possível realizar uma comparação de esforços e secções de armadura, o que permitiu desde logo uma primeira análise de sensibilidade aos resultados obtidos em cada um dos métodos.

Após a análise destes resultados, procedeu-se à quantificação dos índices de fiabilidade, e respetivas probabilidades de ruína, através da metodologia descrita no capítulo 3, para identificar os níveis de segurança em cada caso de estudo dimensionado. Para aferir a qualidade dos resultados obtidos com os métodos simplificados, foi realizada uma comparação entre os resultados de 1ª ordem e esforços finais obtidos em cada um dos regulamentos e, por fim, uma avaliação da qualidade do dimensionamento EC2.

### **4.2 Descrição geral das estruturas analisadas e hipóteses gerais de dimensionamento**

Foi utilizado um conjunto de cinco pórticos estudados por Delgado (2002), que apresentam diferentes relações de número de tramos e andares. Na tabela 4.1 está descrita a designação dos diferentes tipos de pórtico e a sua constituição.

Tabela 4.1 Pórticos analisados

Designação	Número de andares	Número de tramos
<i>PT11</i>	1	1
<i>PT41</i>	4	1
<i>PT42</i>	4	2
<i>PT43</i>	4	3
<i>PT91</i>	9	1

O dimensionamento foi realizado aos estados limites últimos, admitindo pilares em regime de flexão composta, com secções simetricamente armadas e mantida a armadura ao longo de todo o seu desenvolvimento.

Os materiais adotados foram o C20/25 e o S400, sendo os esforços e armaduras obtidas no dimensionamento apresentado de forma esquemática, como apresenta a figura 4.1:

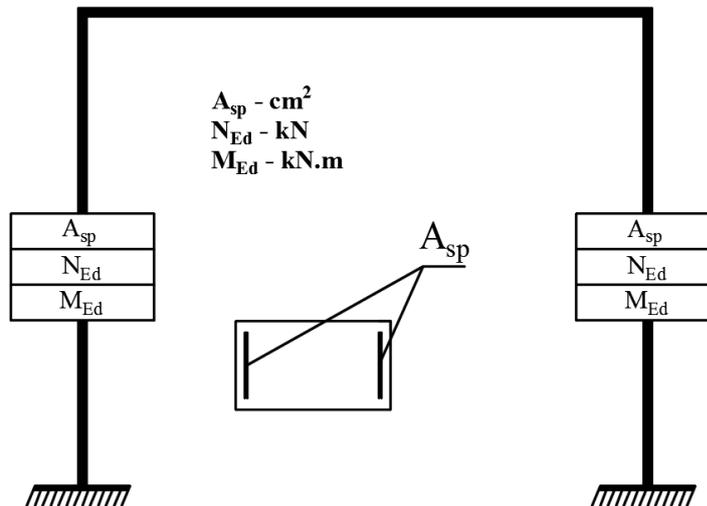


Figura 4.1 Representação esquemática de esforços e secções de armaduras

### 4.3 Critérios gerais do método de avaliação de segurança

A avaliação de segurança foi efetuada de acordo com a metodologia apresentada no capítulo 3. Esta metodologia foi aplicada aos cinco pórticos estudados, avaliando-se a sua probabilidade de ruína para os esforços de 1ª ordem e esforços finais quantificados através dos métodos simplificados referidos no capítulo 2.

Na aplicação do método de avaliação de segurança, foi adotada para a lei de distribuição do fator de carga da solicitação  $\lambda S_K$  uma lei de distribuição normal para uma gama de valores de coeficiente de variação  $CV_{\lambda S}$ :

$$L_{\lambda S}^N(1,125; CV_{\lambda S}(0,10 \leftrightarrow 0,70))$$

Para a lei de distribuição do fator de carga da resistência  $\lambda R$  foi necessário o recurso ao algoritmo de análise não linear FEMPOR1, que permitiu a determinação de um conjunto de valores de resistência. Como o algoritmo é aplicado a um conjunto de amostras, recorreu-se ao Método do Hipercubo Latino (MHL) para gerar 30 amostras das variáveis básicas  $f'_c$  e  $f_{sy}$ .

Para aplicação do algoritmo MHL, foi necessário os seguintes parâmetros estatísticos apresentados na tabela 4.2.

Tabela 4.2 Parâmetros estatísticos das leis de distribuição de  $f'_c$  e  $f_{sy}$

Betão Classe C20/25 $f'_c$	Valor característico:	$f'_{ck}$	17,39 MPa
	Coefficiente de variação:	$CV_{f'_c}$	0,174
	Valor médio:	$f_{syk}$	20,71 MPa
	Desvio padrão:	$\sigma_{f'_c}$	3,60 MPa
Aço Classe S400 $f_{sy}$	Valor característico:	$f'_{syk}$	400 MPa
	Coefficiente de variação:	$CV_{f_s}$	0,087
	Valor médio:	$f_{sym}$	466,81 MPa
	Desvio padrão:	$\sigma_{f_s}$	40,61 MPa

#### 4.4 Pórtico de um andar e um tramo – PT11

O pórtico *PT11* é o mais simples, por ser um pórtico unicamente constituído por um andar e um tramo. Os dados da sua geometria, tal como as dimensões das secções dos pilares, das vigas e malha de elementos finitos, são as que se apresentam na figura 4.2.

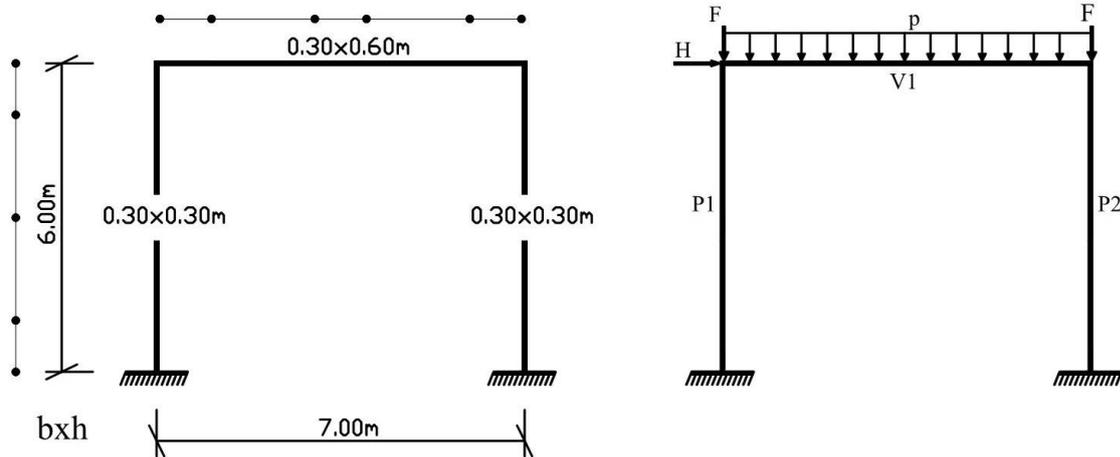


Figura 4.2 Configuração geométrica, malha de elementos finitos e suas dimensões de secções de *PT11*

A solicitação de *PT11* é constituída pelas cargas permanentes G, sobrecargas Q e ação do vento W, tendo como combinação de ações a ação base vento. Na tabela 4.3 estão apresentados os valores característicos e de combinação da solicitação.

Tabela 4.3 Valores de combinação das ações de *PT11*

Tipo de carga	Tipo de ação		
	G	Q	W
p (kN/m)	24,0	0,7x7,0	-
F (kN)	400,0	0,7x120,0	-
H (kN)	-	-	15,0

##### 4.4.1 Efeitos de 1ª ordem

Após a quantificação dos esforços elásticos, através do software FEMPOR1, com as solicitações acima descritas, calculou-se o momento relativo às imperfeições geométricas. Obtiveram-se assim os esforços de 1ª ordem, em que seguidamente foram calculadas as respetivas secções de armadura. Os esforços e respetivas áreas de armadura referentes aos efeitos de 1ª ordem são as descritas na figura 4.3. Relativamente aos valores do regulamento REBAP, foram retirados de Delgado (2002).

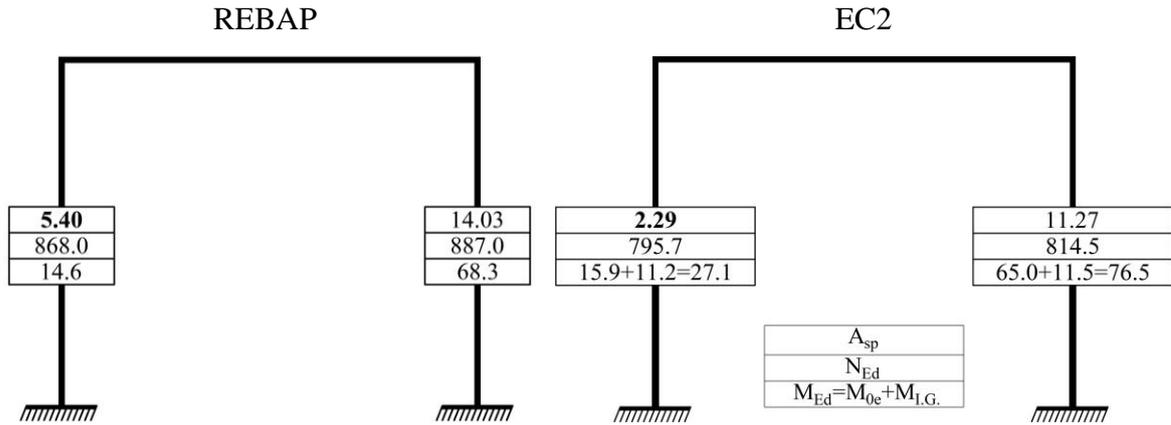


Figura 4.3 REBAP e EC2: Esforços de 1ª ordem e respetivas secções de armadura de *PT11*

#### 4.4.2 Esforços finais

Conhecidos os esforços de 1ª ordem de *PT11*, determinou-se os efeitos de 2ª ordem através do Método da Rigidez Nominal e do Método da Curvatura nominal propostos pelo EC2. Os valores obtidos dos esforços finais e respetivas secções de armadura estão apresentadas na figura 4.5. Os valores referentes ao esforço final e secções de armadura de REBAP foram retirados de Delgado (2002), como indica a figura 4.4.

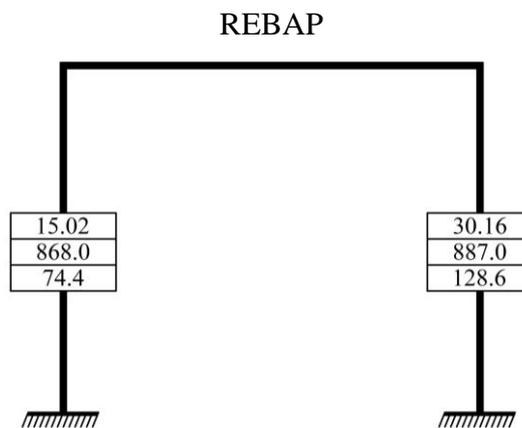


Figura 4.4 REBAP: Esforços finais e respetivas secções de armadura de *PT11*. Delgado (2002)

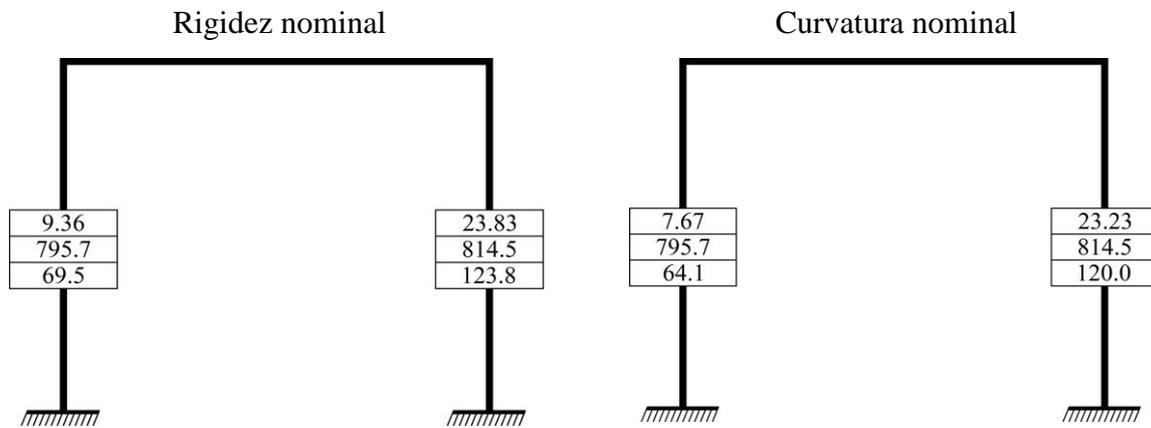


Figura 4.5 EC2: Esforços finais e respetivas secções de armadura de *PT11*

#### 4.4.3 Comparação de esforços: Momentos atuantes

Na Figura 4.6 apresenta-se uma comparação entre os momentos atuantes na estrutura. Para uma melhor apreciação de resultados, foi realizada a decomposição do momento final em: momento elástico, momento relativo às imperfeições geométricas (EC2) ou excentricidade accidental (REBAP) e momento 2ª ordem. A comparação é realizada para o pilar P2 e os valores obtidos foram os apresentados na figura 4.6, figura 4.7 e figura 4.8.

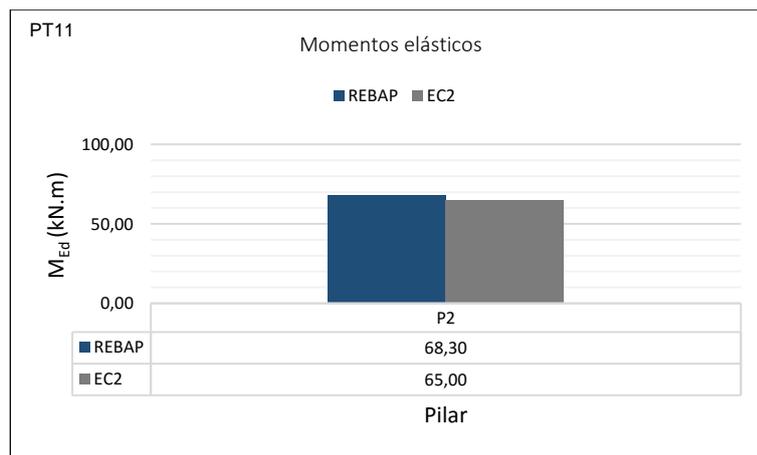


Figura 4.6 REBAP e EC2: Momentos elásticos do pilar P2 de *PT11*

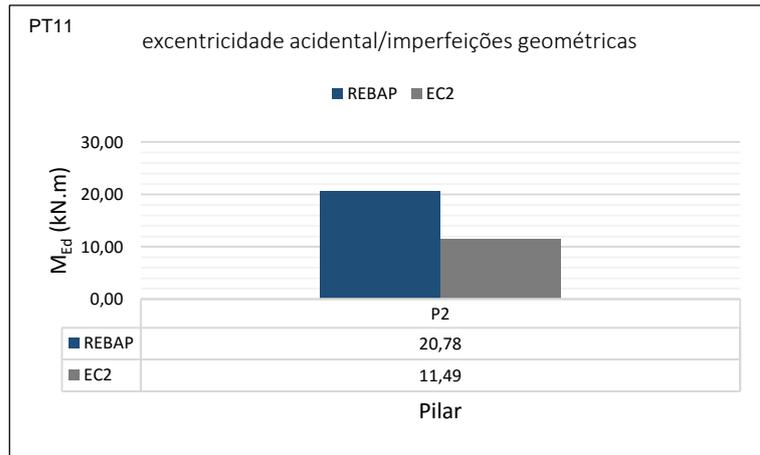


Figura 4.7 REBAP e EC2: Momentos de imperfeições geométricas do pilar P2 de *PT11*

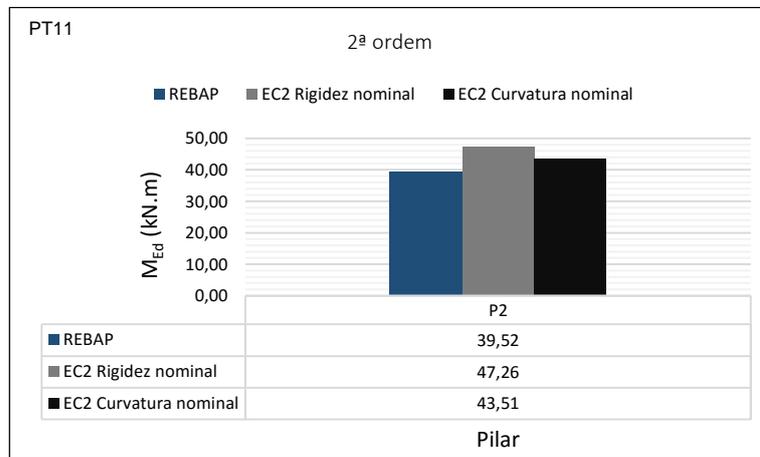


Figura 4.8 REBAP e EC2: Momentos de 2ª ordem do pilar P2 de *PT11*

A observação da figura 4.6 permitiu concluir que o momento elástico obtido com o REBAP é ligeiramente superior ao de EC2. Este facto deve-se à redução da majoração das cargas permanentes de 1,5 do REBAP para 1,35 no EC1.

Relativamente ao acréscimo de esforço, relativo a efeitos desfavoráveis de eventuais acidentes, imperfeições geométricas e de desvios na posição das cargas, como se pode visualizar na figura 4.7, os resultados obtidos com o EC2 tem uma redução considerável comparado com o REBAP.

Por fim, analisada a figura 4.8, relativa aos momentos de 2ª ordem, verificou-se que o EC2 tem valores mais elevados que o REBAP, sendo o Método da Rigidez Nominal o que toma o maior valor.

#### 4.4.4 Comparação de secções de armadura: 1ª ordem e esforços finais

A comparação de secções de armadura foi realizada para o pilar P2, para os efeitos de 1ª ordem e para os esforços finais. Em relação aos esforços de 1ª ordem, é importante referir que o EC2 inclui o momento proveniente das imperfeições geométricas, enquanto o REBAP só inclui esse momento na quantificação dos efeitos de 2ª ordem. As secções de armadura obtidas são representadas na figura 4.9 e figura 4.10.

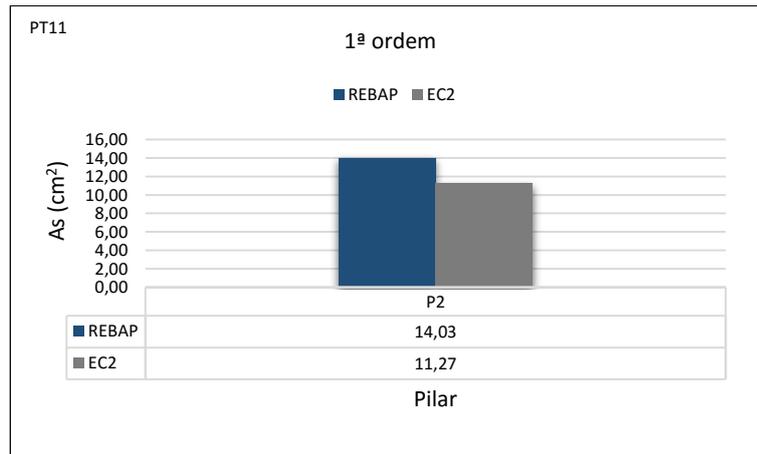


Figura 4.9 REBAP e EC2: Secções de armadura do pilar P2 de *PT11*. Efeitos de 1ª ordem

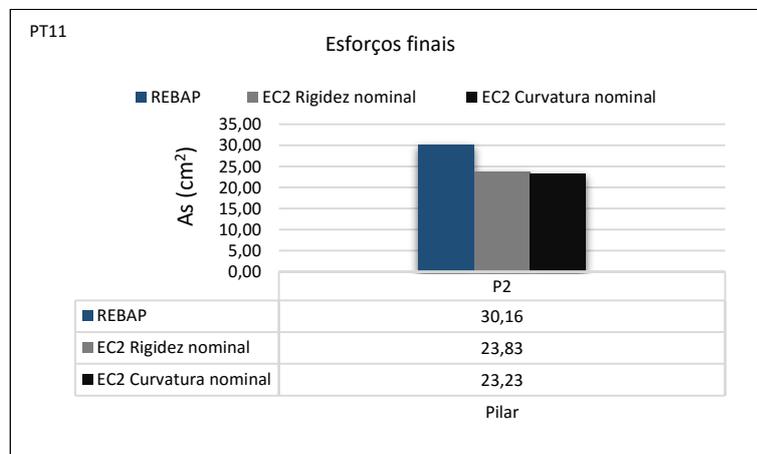


Figura 4.10 REBAP e EC2: Secções de armadura do pilar P2 de *PT11*. Esforços finais

Observando a figura 4.9 e a figura 4.10, relativas à comparação de secções de armadura, verifica-se que a quantidade de armadura no regulamento REBAP é sempre superior. Relativamente à secção de armadura de 1ª ordem do regulamento em vigor EC2, tem uma redução de 19,7% em relação ao REBAP e o aumento da secção resulta da minoração de *fcd* de 15% e da majoração das cargas permanentes. No esforço final, com os efeitos de 2ª ordem já incluídos e com a excentricidade acidental incluída no dimensionamento do REBAP, o

Método da Curvatura Nominal tem um decréscimo de 23% e o Método da Rigidez Nominal de 21%, ambos relativamente aos valores obtidos com o REBAP.

#### 4.4.5 Avaliação de segurança

Para as avaliações de segurança realizadas neste trabalho foram efetuadas através da aplicação da metodologia descrita no capítulo 3, proposta por Delgado (2002). Esta metodologia permitiu quantificar as probabilidades de ruína e seus índices de fiabilidade, para cada uma das três soluções de dimensionamento realizadas.

##### 4.4.5.1 Lei de distribuição do fator de carga da resistência – $\lambda R$

Para a definição das leis de distribuição do fator da carga da resistência  $\lambda R$ , gerou-se um conjunto de 30 amostras  $A_{PT11}$ , das variáveis básicas  $f'_c$  e  $f_{sy}$ , pelo método do Hipercubo Latino (MHL).

- Método do Hipercubo Latino (MHL)

Na tabela 4.4 e na figura 4.11 estão representados os resultados obtidos com o MHL.

Tabela 4.4 Resultados das amostras da aplicação do MHL de *PT11*

<i>A<sub>PT11</sub></i> : Conjunto de 30 amostras								
n	$f'_c$ (MPa)	$f_{sy}$ (MPa)	n	$f'_c$ (MPa)	$f_{sy}$ (MPa)	n	$f'_c$ (MPa)	$f_{sy}$ (MPa)
1	26,39	447,43	11	27,69	468,50	21	28,76	503,47
2	17,39	410,64	12	27,22	482,46	22	19,97	475,35
3	21,93	490,08	13	26,79	418,40	23	28,19	515,21
4	19,31	458,26	14	26,00	434,99	24	22,73	494,20
5	15,34	461,70	15	25,26	498,63	25	24,54	400,01
6	25,62	533,61	16	18,50	553,23	26	29,42	465,11
7	31,34	443,54	17	33,38	471,91	27	22,34	478,86
8	21,04	522,97	18	20,54	424,72	28	24,90	380,38
9	21,50	451,16	19	23,83	439,41	29	23,47	508,90
10	30,23	430,15	20	23,11	454,76	30	24,19	486,18

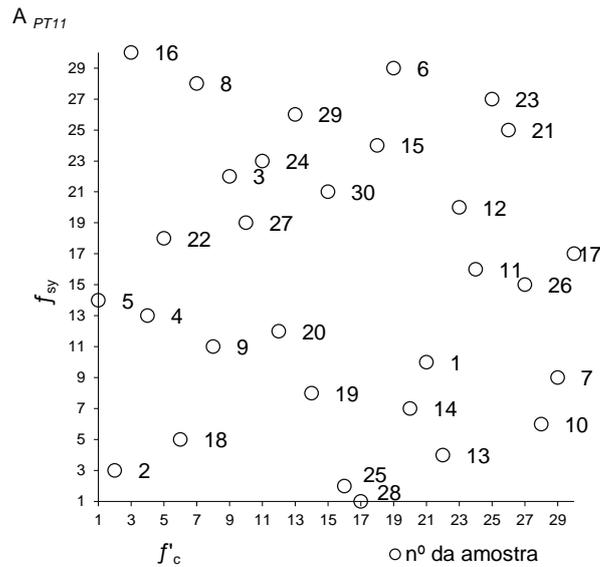


Figura 4.11 Representação gráfica dos resultados das amostras da aplicação do MHL

- Ajuste de leis de distribuição normal a  $\lambda R$  e sua validação.

Depois de geradas as 30 amostras, foi efetuado um igual número de cálculos utilizando o FEMPOR1, o que permitiu determinar um ajuste de uma lei de distribuição de  $\lambda R$ , e efetuar a respetiva validação do mesmo. Na tabela 4.5 estão representados os parâmetros estatísticos das leis de distribuição obtidas para os cinco dimensionamentos analisados.

Tabela 4.5 Parâmetros estatísticos das leis de distribuição normais  $\lambda R$  de *PT11*

Dimensionamento <i>PT11</i>	Média $\lambda R$	Desvio Padrão $S_{\lambda R}$	Valor Característico $\lambda R_k$	Coefficiente de variação $CV_{\lambda R}$
REBAP 1ª Ordem	2,32	0,241	1,93	0,104
EC2 1ª Ordem	2,24	0,219	1,88	0,098
REBAP 2ª Ordem	2,41	0,223	2,05	0,092
EC2 Rigidez nominal	2,33	0,204	1,99	0,088
EC2 Curvatura nominal	2,30	0,205	1,97	0,089

A validação das leis referentes aos dimensionamentos, de acordo com o EC2, foi confirmada pelos resultados obtidos com a aplicação do teste de normalidade, baseado nos coeficientes de assimetria e achatamento e o teste de Kolmogorov-Smirnov, versão proposta por Lilliefors (1967). Os resultados dos testes são os apresentados na tabela 4.6 e na figura 4.12.

Tabela 4.6 Resultados do teste de normalidade de *PT11*

Dimensionamento <i>PT11</i>	Condições a verificar:	Verificação	Normalidade da distribuição
	$\begin{cases} \hat{\gamma}_1(n) < 1,5\sigma_{\hat{\gamma}_1(n)} \\ \left  \hat{\gamma}_2(n) + \frac{6}{n+1} \right  < 1,5\sigma_{\hat{\gamma}_2(n)} \end{cases}$		
EC2 1ª ordem	$\begin{cases} 0,280 < 0,608 \text{ OK} \\ 0,171 < 1,050 \text{ OK} \end{cases}$	Ambas as condições são verificadas	Aceite
EC2 Rigidez nominal	$\begin{cases} 0,294 < 0,608 \text{ OK} \\ 0,161 < 1,050 \text{ OK} \end{cases}$	Ambas as condições são verificadas	Aceite
EC2 Curvatura nominal	$\begin{cases} 0,294 < 0,608 \text{ OK} \\ 0,161 < 1,050 \text{ OK} \end{cases}$	Ambas as condições são verificadas	Aceite

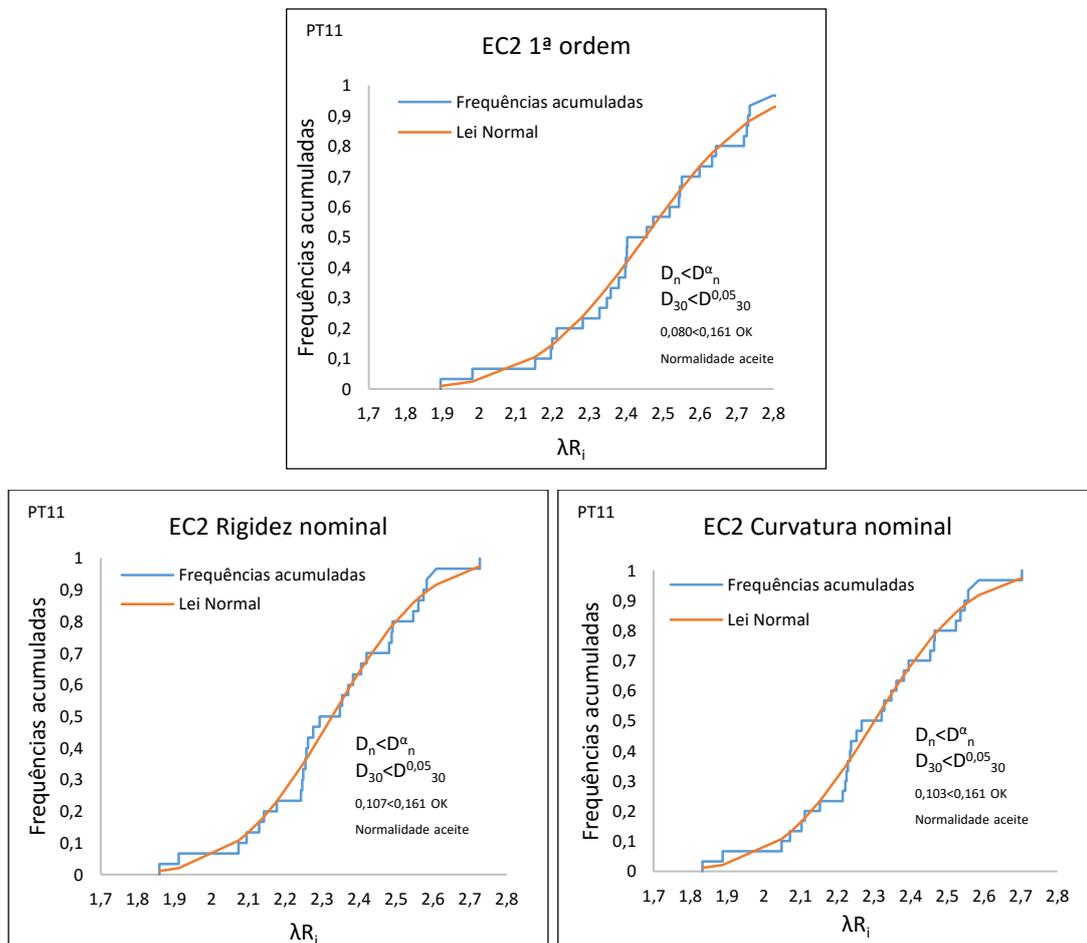


Figura 4.12 Resultados do teste *Kolmogrov-Smirnov* de *PT11*

#### 4.4.5.2 Probabilidade de ruína e índices de fiabilidade

Definidas as leis de distribuição normais dos fatores de carga da solicitação e da resistência, é possível apresentar agora os índices de fiabilidade  $\beta$  e as probabilidades de ruína  $p_f$  para os três casos estudados de *PT11*.

#### 4.4.5.2.1 REBAP e Eurocódigo2: 1ª ordem

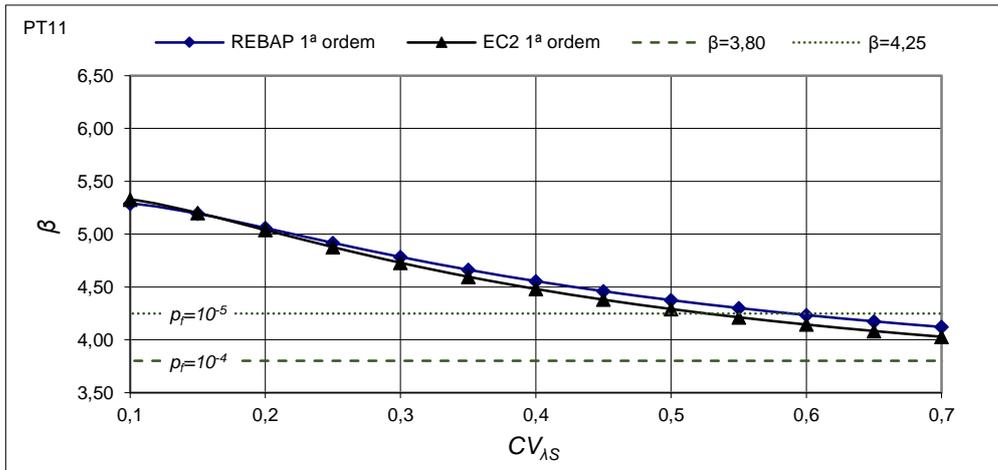


Figura 4.13 REBAP e EC2: Índice de fiabilidade  $\beta$  para os casos 1ª ordem de *PT11*

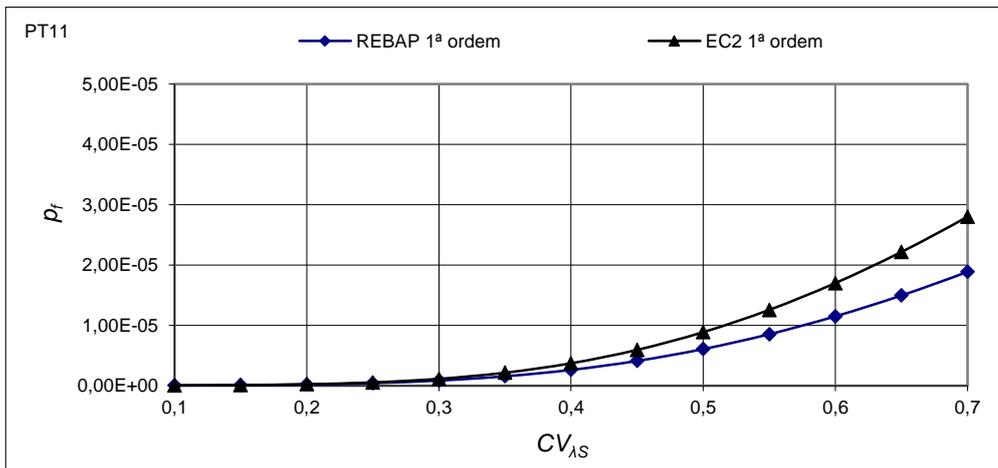


Figura 4.14 REBAP e EC2: Probabilidade de ruína  $p_f$  para os casos 1ª ordem de *PT11*

A visualização da figura 4.13 e da figura 4.14 permite concluir que os dois regulamentos apresentam níveis de segurança relativos ao dimensionamento de 1ª ordem, onde as probabilidades de ruína superiores ao valor de referência para os estados limites últimos de resistencia, de  $10^{-5}$ , apenas ocorrem para valores não realistas do coeficiente de variação  $CV_{\lambda S}$  superior a 0,5. É importante referir que a gama de valores de referência do coeficiente de variação para verificação de segurança é de 0,2 a 0,5 (Delgado, 2002).

#### 4.4.5.2.2 REBAP e Eurocódigo2: Esforços finais

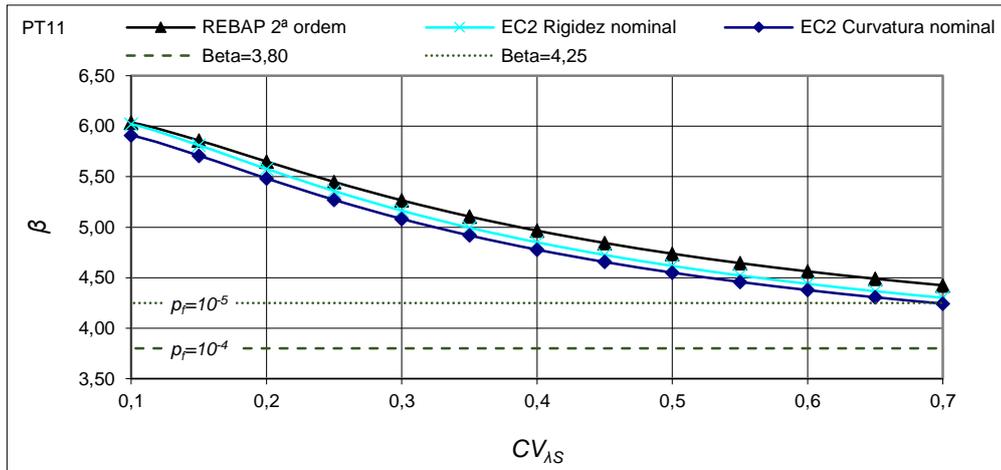


Figura 4.15 REBAP e EC2: Índice de fiabilidade  $\beta$  para os casos de 2ª ordem (esforço final) de *PT11*

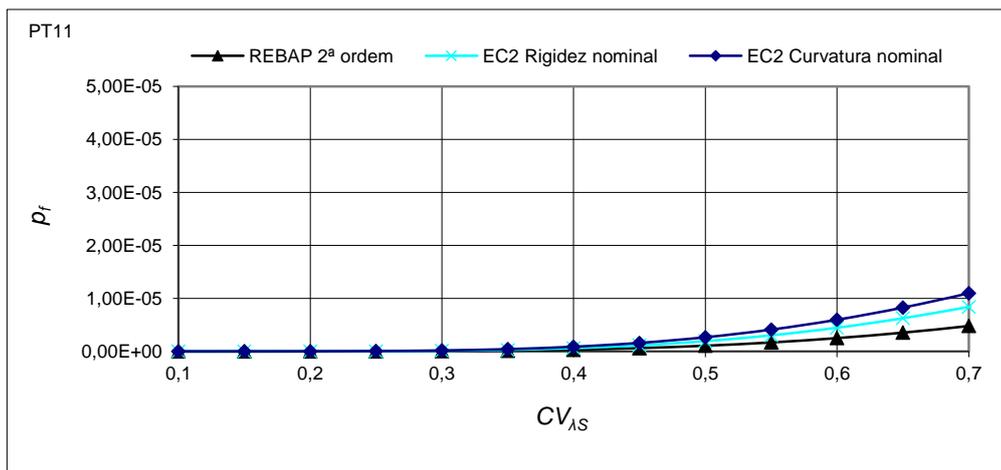


Figura 4.16 REBAP e EC2: Probabilidade de ruína  $p_f$  para os casos de 2ª ordem (esforço final) de *PT11*

A partir dos valores apresentados na figura 4.15 e na figura 4.16, para os índices de fiabilidade e respetivas probabilidades de ruína, é possível concluir que os regulamentos REBAP e EC2, para o dimensionamento de 2ª ordem para o pórtico *PT11*, têm um elevado nível de segurança, uma vez que não apresenta probabilidades de ruína superiores a  $10^{-5}$ , a não ser para coeficientes de variação muito elevados.

#### 4.4.5.2.3 Eurocódigo2

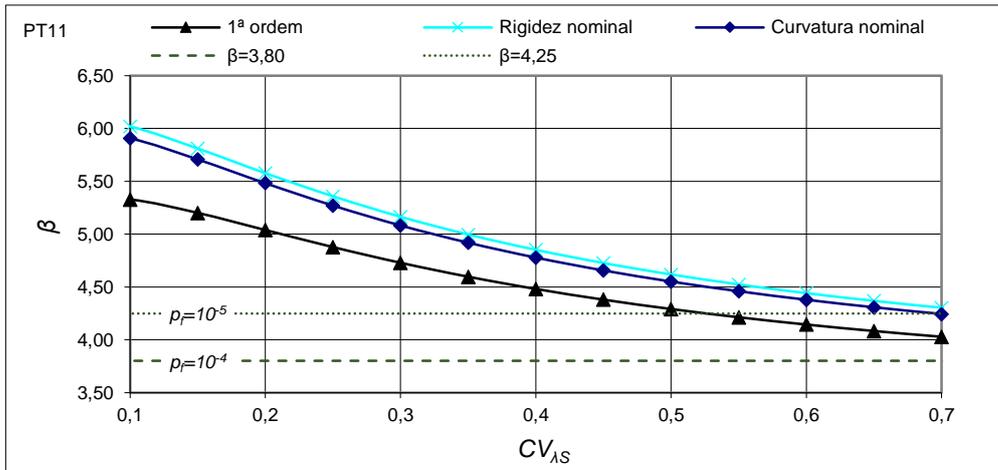


Figura 4.17 EC2: Índice de fiabilidade  $\beta$  de PT11

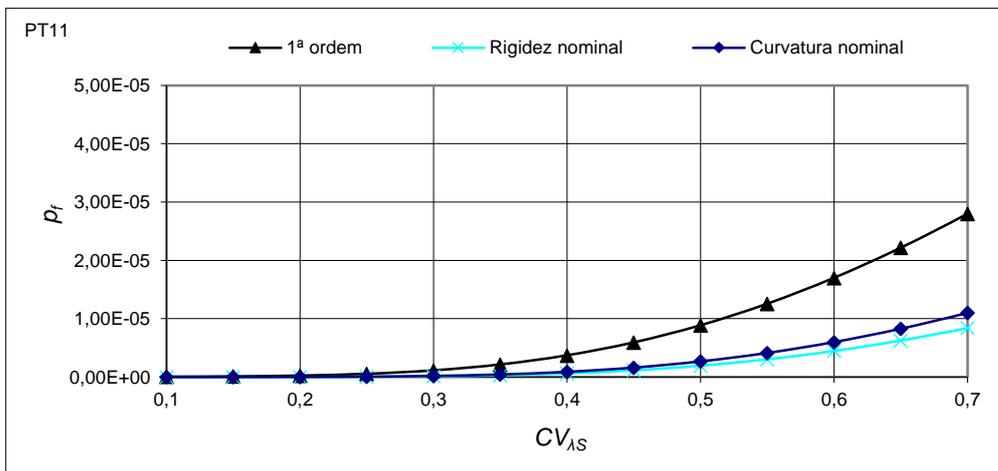


Figura 4.18 EC2: Probabilidade de ruína  $p_f$  de PT11

Relativamente ao dimensionamento EC2, e como se pode verificar na figura 4.17 e na figura 4.18, o dimensionamento de 1ª ordem apresenta menor nível de segurança que as metodologias simplificadas de 2ª ordem. Para aferir a qualidade dos métodos simplificados de 2ª ordem, podemos considerar os valores obtidos com os efeitos de 1ª ordem como valor de referência, uma vez que estes resultam de uma análise genericamente elástica. A comparação entre esses resultados permite concluir que os métodos simplificados de dimensionamento aos efeitos de 2ª ordem têm incorporado níveis de segurança bastante conservativos.

#### 4.5 Pórtico de quatro andares e um tramo – PT41

O pórtico *PT41* é uma estrutura reticulada de betão armado corrente, constituído por quatro andares e um único tramo de viga, com uma relação de rigidez viga/pilar considerável. A geometria do pórtico, tal como as dimensões das secções dos pilares, das vigas e malha de elementos finitos são as que se apresentam na figura 4.19.

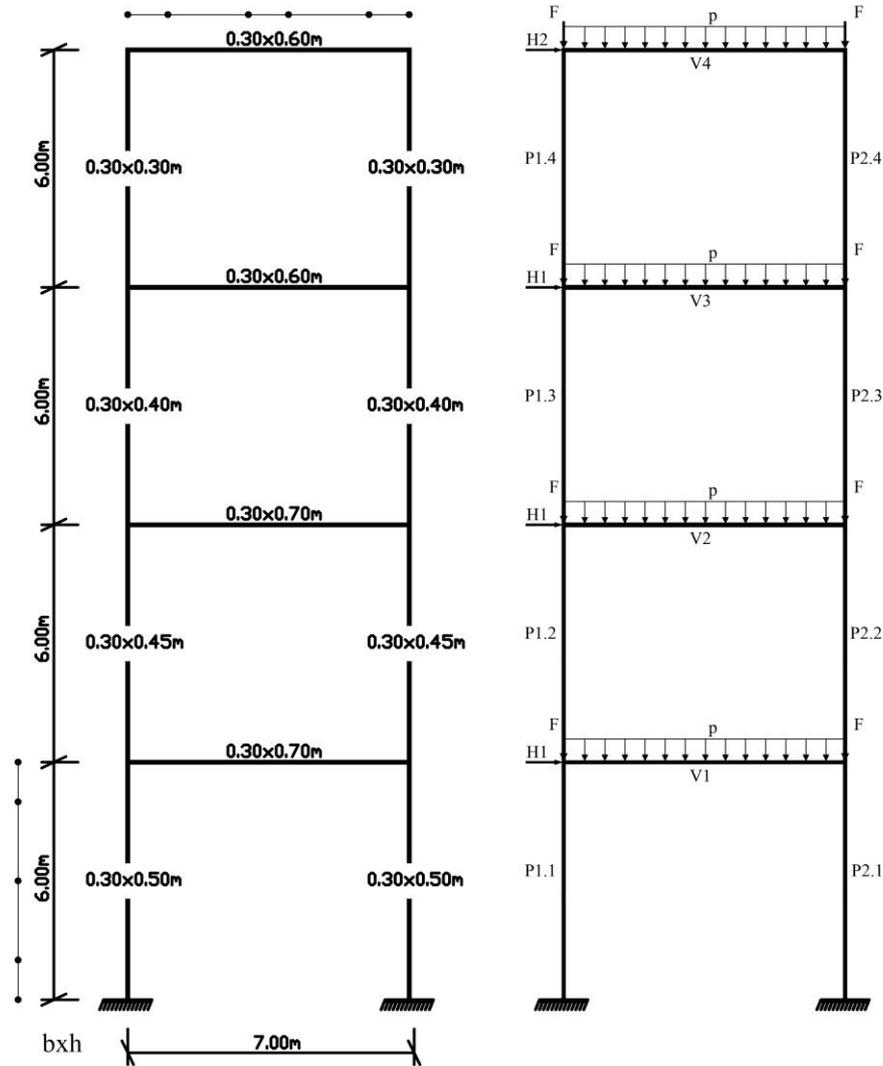


Figura 4.19 Configuração geométrica, malha de elementos finitos e suas dimensões de secções de *PT41*

A solicitação de *PT42* é constituída pelas cargas permanentes *G*, sobrecargas *Q* e ação do vento *W*, tendo-se adotado na combinação de ações a ação base vento. Na tabela 4.7 apresenta-se os valores característicos da solicitação.

Tabela 4.7 Valores de combinação das ações de *PT41*

Tipo de carga	Tipo de ação		
	G	Q	W
p (kN/m)	24,0	0,7x7,0	-
F (kN)	160,0	0,7x40,0	-
H1 (kN)	-	-	21,6
H2 (kN)	-	-	10,8

#### 4.5.1 Efeitos de 1ª ordem

Os esforços e respetivas secções de armadura referentes aos efeitos de 1ª ordem, são os indicados na Figura 4.20. Os valores de 1ª ordem referentes ao REBAP foram retirados de Delgado (2002).

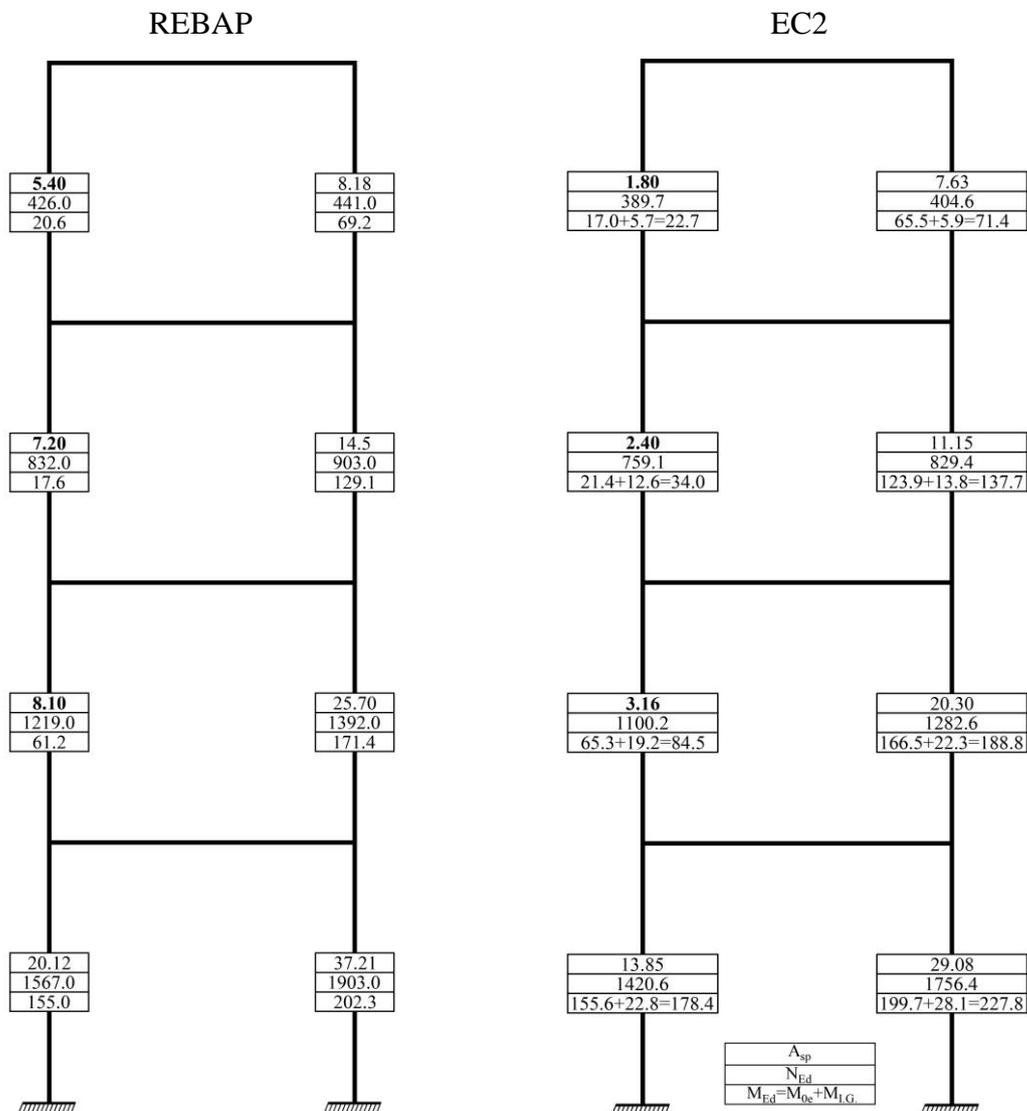


Figura 4.20 REBAP e EC2: Esforços de 1ª ordem e respetivas secções de armadura de *PT41*

#### 4.5.2 Esforços finais

Os valores dos esforços finais e respetivas secções de armadura, quantificados através dos métodos simplificados Método da Curvatura Nominal e Método da Rigidez Nominal, propostos pelo EC2 e pelo método simplificado do REBAP, este último retirado de Delgado (2002), apresentam-se na figura 4.21.

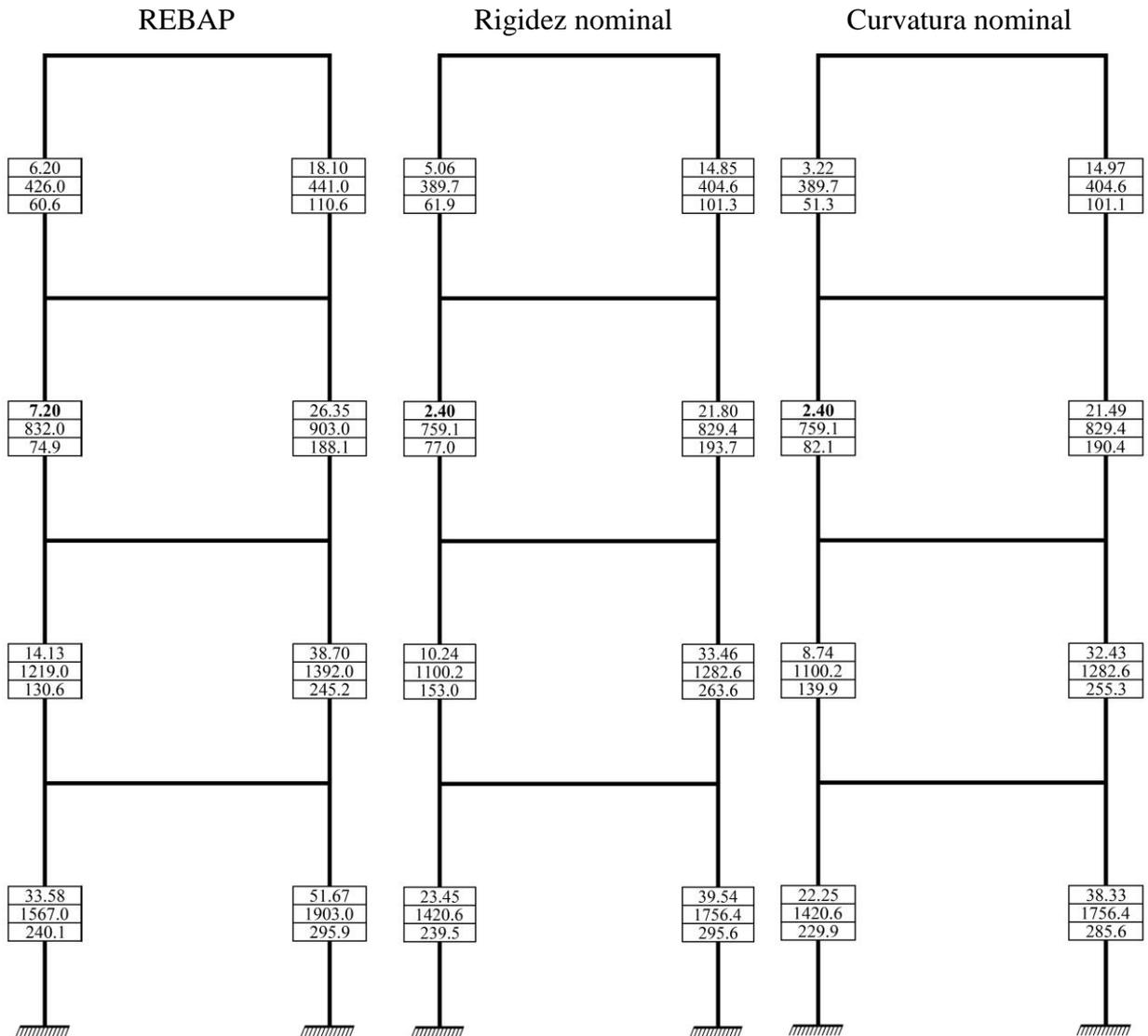


Figura 4.21 REBAP e EC2: Esforços finais e respetivas secções de armadura de *PT41*

#### 4.5.3 Comparação de esforços: Momentos atuantes

Os momentos atuantes obtidos pelos métodos simplificados segundo EC2 e REBAP, são os indicados nas figuras 4.22, 4.23 e 4.24, tendo a comparação sido realizada para o pilar P2.

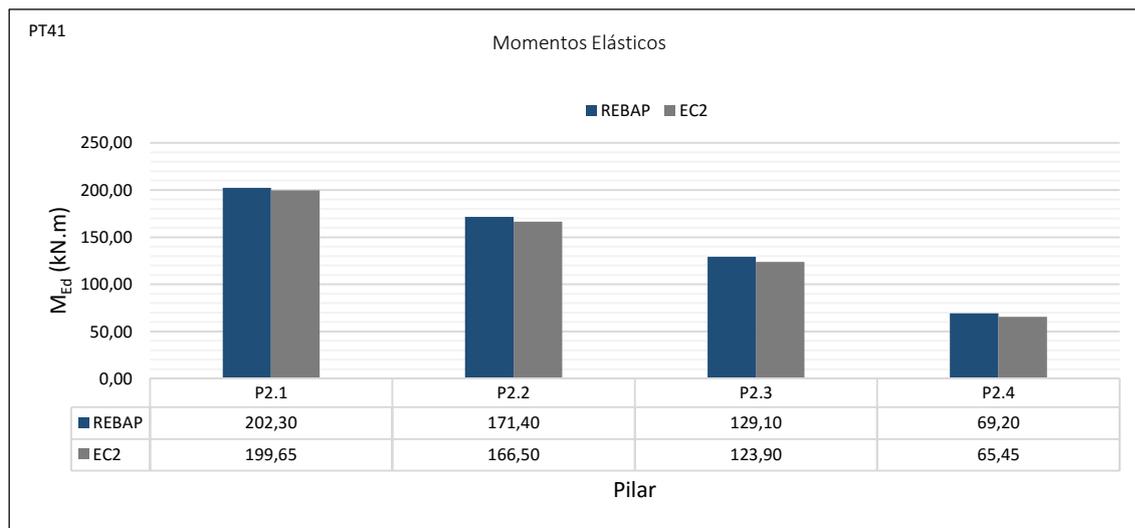


Figura 4.22 REBAP e EC2: Momentos elásticos do pilar P2 de *PT41*

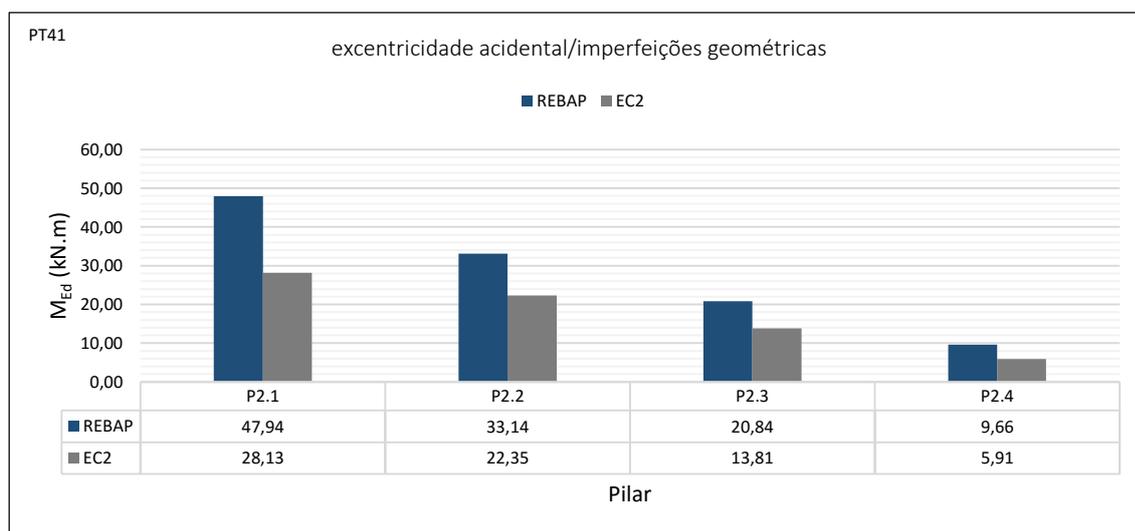


Figura 4.23 REBAP e EC2: Momentos de imperfeições geométricas do pilar P2 de *PT41*

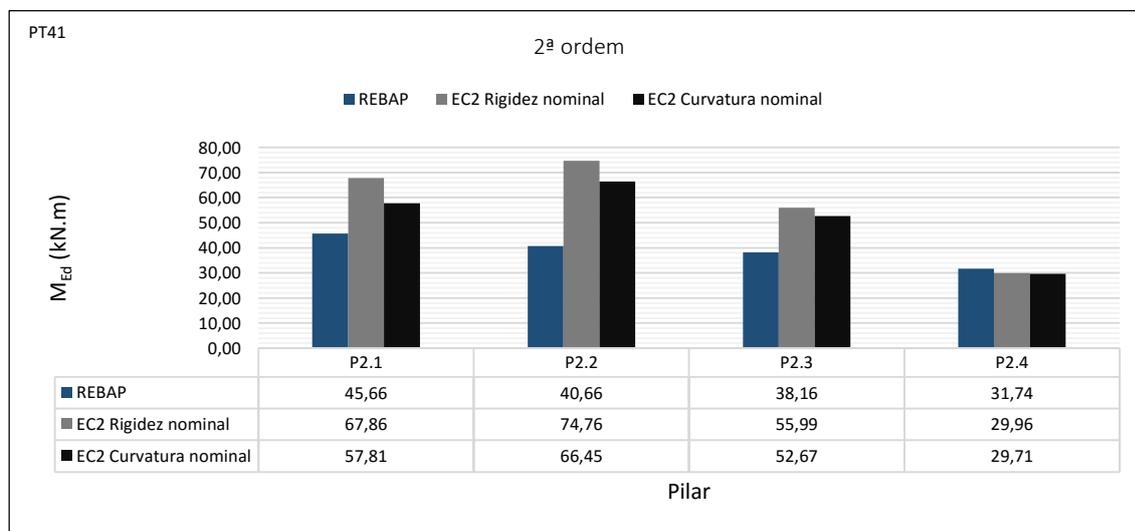


Figura 4.24 REBAP e EC2: Momentos de 2ª ordem do pilar P2 de *PT41*

A análise das figuras 4.39 e 4.40 mostra a tendência já identificada no pórtico *PT11* analisado anteriormente, contudo neste caso diminui a diferença entre o momento obtido relativamente às imperfeições geométricas entre o REBAP e o EC2.

Relativamente aos momentos de 2ª ordem de EC2, para os pilares P2.1, P2.2 e P2.3 os métodos simplificados apresentam maiores efeitos de 2ª ordem sendo o método que conduz aos maiores resultados, o Método da Rigidez Nominal. Para o pilar P2.4, o REBAP apresenta maiores valores de 2ª ordem do que EC2.

#### 4.5.4 Comparação de secções de armadura: 1ª ordem e esforços finais

A comparação de secções de armadura foi realizada para o pilar P2, para os efeitos de 1ª ordem e para os esforços finais. As secções de armadura obtidas são representadas nas figuras 4.25 e 4.26.

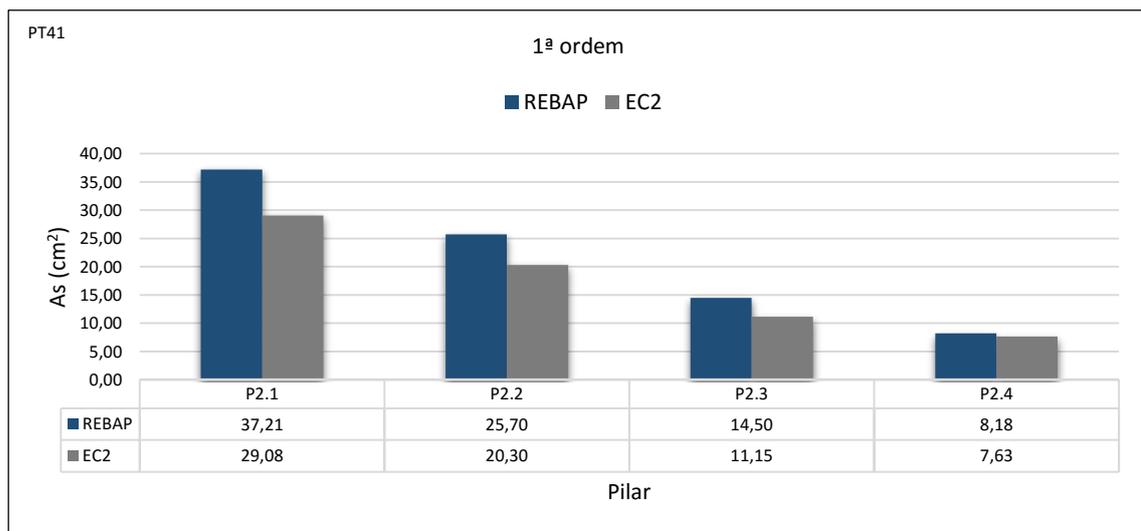


Figura 4.25 Comparação de secções de armadura do pilar P2 de *PT41*. Efeitos de 1ª ordem

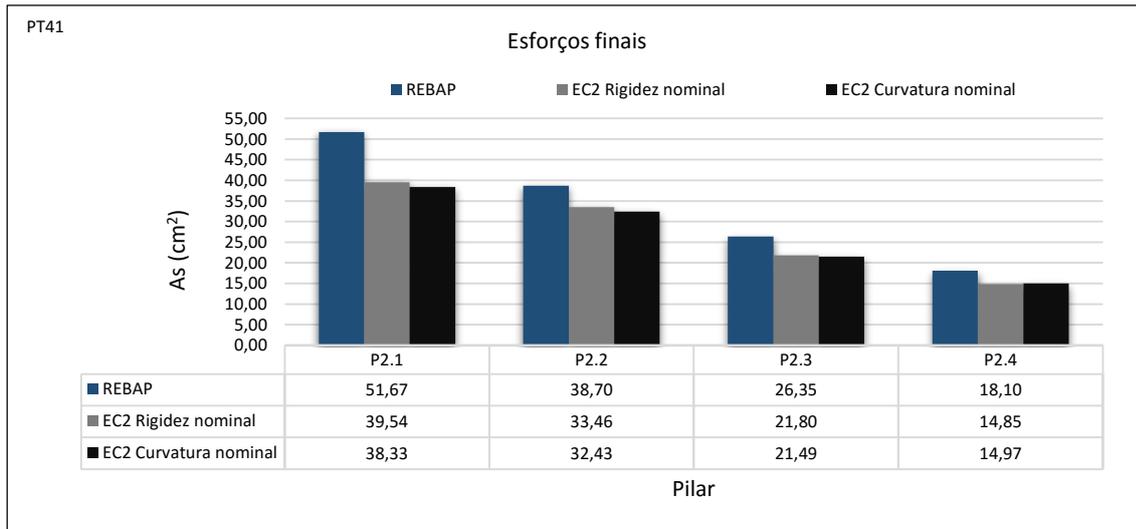


Figura 4.26 REBAP e EC2: Seções de armadura do pilar P2 de *PT41*. Esforços finais

Na análise da figura 4.25 e figura 4.26 verifica-se que, tal como no pórtico *PT11*, a secção de armadura obtida é sempre superior quando se aplica o REBAP. No caso do dimensionamento aos efeitos de 1ª ordem regista-se uma redução de armadura entre o REBAP e o EC2 de 21,4%, redução esta superior à redução de 19,7% encontrada em *PT11*. Esta redução de armadura tem origem nas causas já referidas para o pórtico *PT11*. No que diz respeito às duas metodologias simplificadas de acordo com o EC2, a quantidade de armadura obtida com cada um destes métodos é bastante semelhante entre si, apresentando uma redução em relação ao REBAP de 17,6% no caso do Método da Rigidez Nominal e de 17,9% no caso do Método da Curvatura Nominal.

#### 4.5.5 Avaliação de segurança

##### 4.5.5.1 Lei de distribuição do fator de carga da resistência – $\lambda R$

As leis de distribuição do fator de carga da resistência  $\lambda R$  foram determinadas a partir de um conjunto de 30 amostras  $A_{PT41}$ . Para gerar esse conjunto foi aplicado o Método do Hipercubo Latino.

- Método do Hipercubo Latino – MHL

Na tabela 4.8 e na figura 4.27 estão representados os resultados obtidos com o MHL.

Tabela 4.8 Resultados das amostras da aplicação do MHL de *PT41*

<i>APT41</i> : Conjunto de 30 amostras								
n	$f'_c$ (MPa)	$f_{sy}$ (MPa)	n	$f'_c$ (MPa)	$f_{sy}$ (MPa)	n	$f'_c$ (MPa)	$f_{sy}$ (MPa)
1	18,50	380,38	11	30,23	468,50	21	21,50	439,41
2	20,54	508,90	12	22,73	400,01	22	26,79	465,11
3	23,83	553,23	13	24,54	494,20	23	19,97	418,40
4	24,90	522,97	14	23,11	451,16	24	21,04	454,76
5	28,19	475,35	15	25,62	424,72	25	26,39	490,08
6	24,19	458,26	16	21,93	503,47	26	29,42	430,15
7	33,38	434,99	17	26,00	486,18	27	22,34	461,70
8	27,22	478,86	18	23,47	482,46	28	25,26	471,91
9	15,34	443,54	19	19,31	410,64	29	31,34	498,63
10	17,39	533,61	20	27,69	447,43	30	28,76	515,21

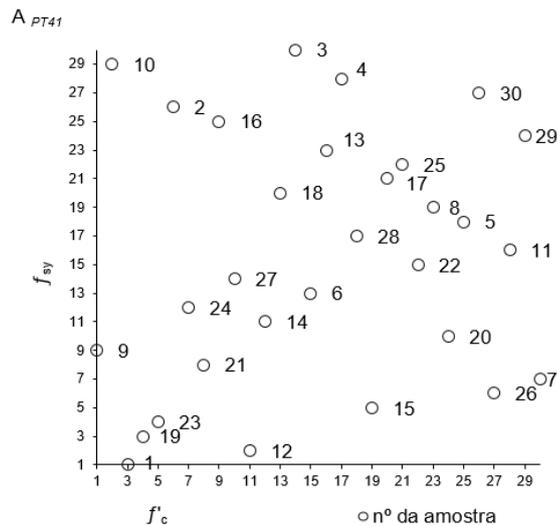


Figura 4.27 Representação gráfica dos resultados das amostras da aplicação do MHL

- Ajuste de leis de distribuição normal a  $\lambda R$  e sua validação.

Depois de geradas as 30 amostras, foi efetuado igual número de cálculos utilizando o FEMPOR1, dos quais resultaram um conjunto de 30 resultados que permitiram definir o ajuste de uma lei de distribuição Normal a de  $\lambda R$ , e efetuar a respetiva validação da mesma. Na tabela 4.9 são apresentados os parâmetros estatísticos das leis de distribuição obtidas para os cinco dimensionamentos efetuados.

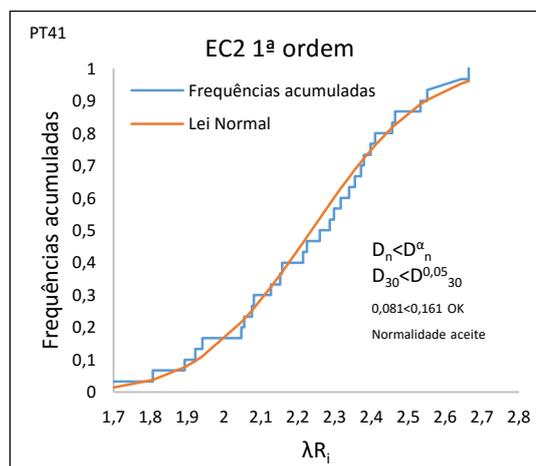
Tabela 4.9 Parâmetros estatísticos das leis de distribuição normais  $\lambda R$  de *PT41*

Dimensionamento <i>PT41</i>	Média $\lambda R$	Desvio Padrão $S_{\lambda R}$	Valor Característico $\lambda R_k$	Coefficiente de variação $CV_{\lambda R}$
REBAP 1ª Ordem	2,35	0,242	1,95	0,103
EC2 1ª Ordem	2,24	0,242	1,84	0,108
REBAP 2ª Ordem	2,28	0,203	1,94	0,089
EC2 Rigidez nominal	2,19	0,208	1,84	0,095
EC2 Curvatura nominal	2,16	0,207	1,82	0,096

A validação foi confirmada através dos resultados obtidos com a aplicação do teste de normalidade baseado nos coeficientes de assimetria e achatamento e o teste de *Kolmogorov-Smirnov*, versão proposta por *Lilliefors* (1967)

Tabela 4.10 Resultados do teste de normalidade de *PT41*

Dimensionamento <i>PT41</i>	Condições a verificar: $\begin{cases} \hat{\gamma}_1(n) < 1,5\sigma_{\hat{\gamma}_1(n)} \\ \left  \hat{\gamma}_2(n) + \frac{6}{n+1} \right  < 1,5\sigma_{\hat{\gamma}_2(n)} \end{cases}$	Verificação	Normalidade da distribuição
EC2 1ª ordem	$\begin{cases} 0,320 < 0,608 \text{ OK} \\ 0,123 < 1,050 \text{ OK} \end{cases}$	Ambas as condições são verificadas	Aceite
EC2 Rigidez nominal	$\begin{cases} 0,336 < 0,608 \text{ OK} \\ 0,155 < 1,050 \text{ OK} \end{cases}$	Ambas as condições são verificadas	Aceite
EC2 Curvatura nominal	$\begin{cases} 0,360 < 0,608 \text{ OK} \\ 0,154 < 1,050 \text{ OK} \end{cases}$	Ambas as condições são verificadas	Aceite



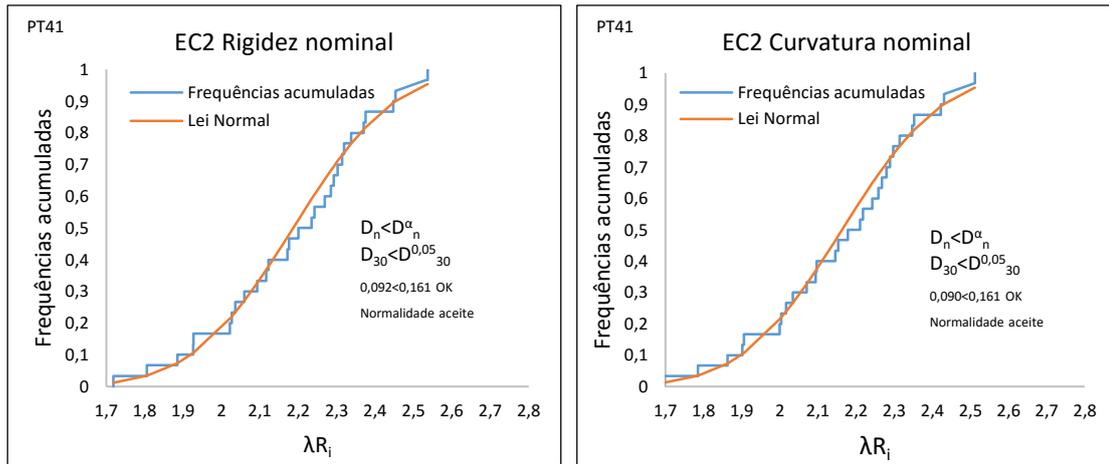


Figura 4.28 Resultados do teste *Kolmogorov-Smirnov* de *PT41*

#### 4.5.5.2 Probabilidade de ruína e índices de fiabilidade

Definidas as leis de distribuição normais dos fatores de carga da solicitação e da resistência é possível apresentar agora, os índices de fiabilidade  $\beta$  e as probabilidades de ruína  $p_f$  para os cinco casos de estudo.

##### 4.5.5.2.1 REBAP e Eurocódigo2: 1ª ordem

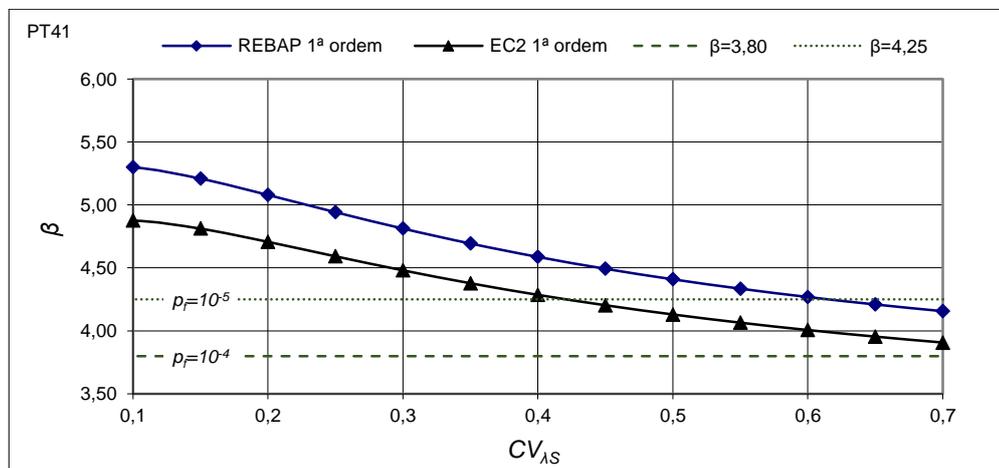


Figura 4.29 REBAP e EC2: Índice de fiabilidade  $\beta$  para os casos de 1ª ordem de *PT41*

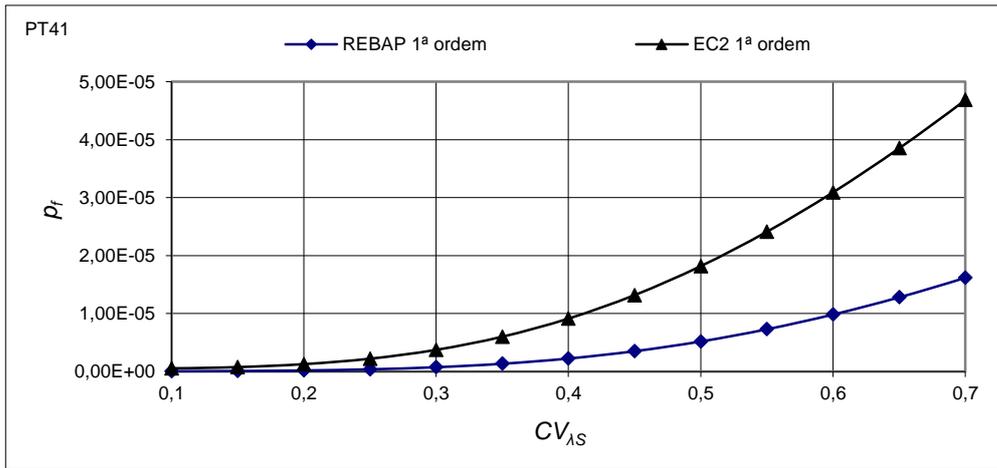


Figura 4.30 REBAP e EC2: Probabilidade de ruína  $p_f$  para os casos 1ª ordem de *PT41*

Os valores registados nas figuras 4.29 e 4.30, para os índices de fiabilidade e suas probabilidades de ruína em relação à 1ª ordem, permitem registar uma diferença em relação aos obtidos em *PT11*. O dimensionamento segundo o EC2 apresenta uma margem de segurança menor do que a obtida com o REBAP, uma vez que gerou valores de probabilidade de ruína de  $10^{-5}$  ( $\beta=4,25$ ), para valores superiores ao coeficiente de variação de 0,42, enquanto que o REBAP só produz esse efeito para valores do coeficiente de variação superiores a 0,6.

#### 4.5.5.2.2 REBAP e Eurocódigo2: Esforços finais

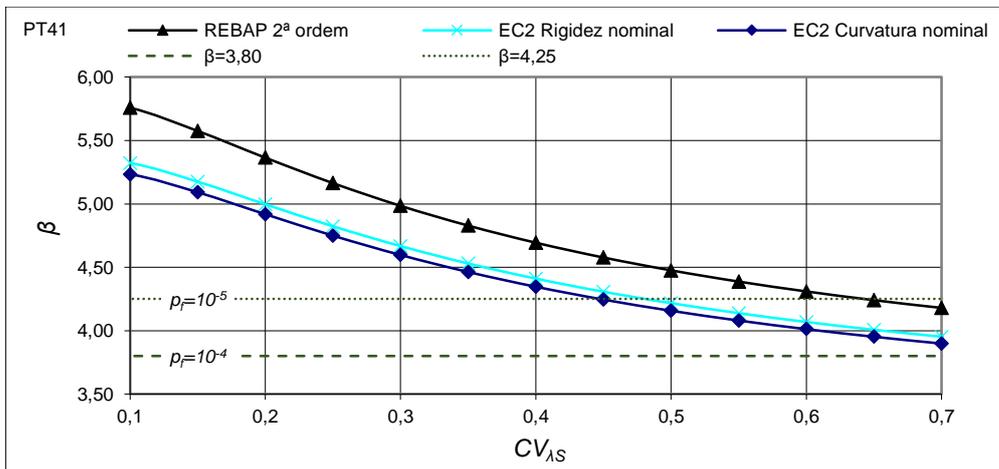


Figura 4.31 REBAP e EC2: Índice de fiabilidade  $\beta$  para os casos de esforço final de *PT41*

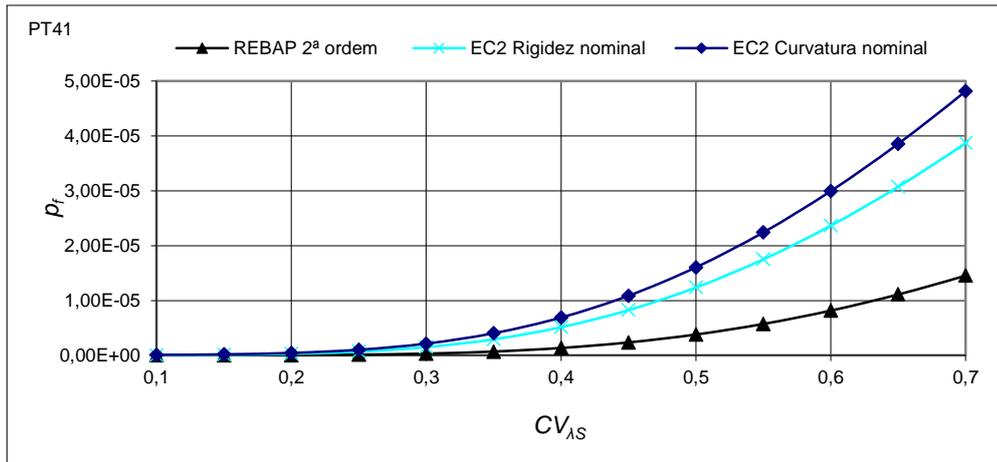


Figura 4.32 REBAP e EC2: Probabilidade de ruína  $p_f$  para os casos de esforço final de *PT41*

A análise da figura 4.31 e da figura 4.32 permite identificar uma semelhança na hierarquia de resultados obtidos com *PT41* e *PT11*, contudo no *PT41* existe um afastamento dos níveis de segurança entre os dois regulamentos. O REBAP tem um nível de segurança elevado apresentar probabilidades de ruína superiores a  $10^{-5}$ , apenas para coeficientes de variação superiores a 0,65, enquanto que os dimensionamentos de 2ª ordem do EC2 apresentam probabilidades de ruína superiores a  $10^{-5}$ , ainda no intervalo de coeficiente de variação de referencia ( $0,2 < CV_{\lambda S} < 0,5$ ).

#### 4.5.5.2.3 Eurocódigo2

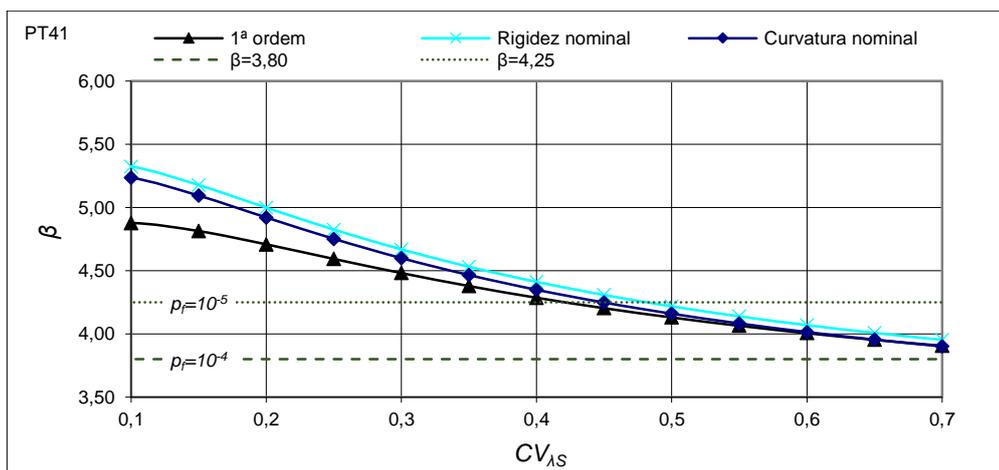


Figura 4.33 EC2: Índice de fiabilidade  $\beta$  de *PT41*

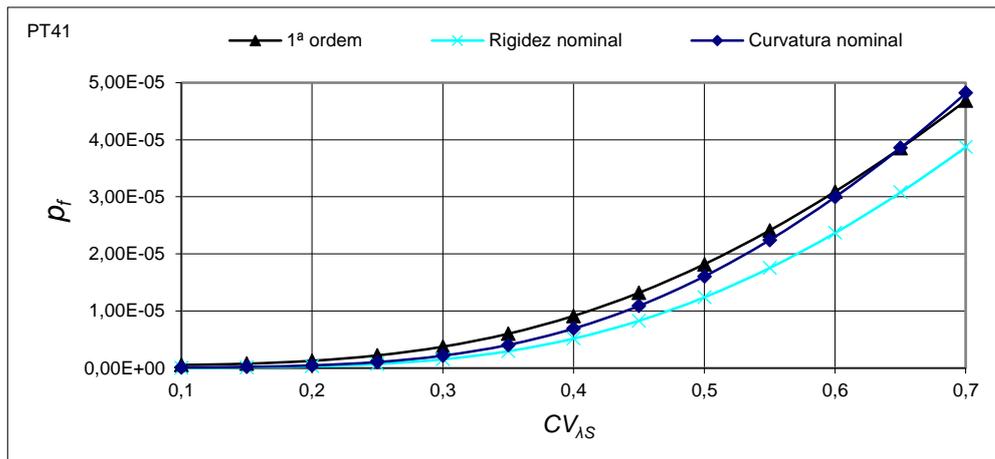


Figura 4.34 EC2: Probabilidade de ruína  $p_f$  de *PT41*

Ao analisar os resultados do regulamento EC2 apresentados nas figuras 4.33 e 4.34, é possível verificar que existe uma grande proximidade entre eles, o que tendo por referência os resultados de 1ª ordem, permite aferir a qualidade dos métodos simplificados de 2ª ordem do EC2. No pórtico *PT41* registam-se valores de probabilidades de ruína menos seguros do que os encontrados em *PT11*, uma vez que em todos os dimensionamentos se encontram índices de fiabilidade inferiores a ( $\beta=4,25$ ), para valores do coeficiente de variação ainda no intervalo comum para estruturas correntes.

#### 4.6 Pórtico de quatro andares e dois tramos de viga – PT42

O pórtico *PT42* apresenta quatro andares e dois tramos de viga, sendo uma estrutura reticulada de betão armado corrente. Comparativamente com *PT41*, o pórtico *PT42* apresenta mais um tramo de viga, uma redução da altura dos pilares a partir do primeiro andar e vigas mais curtas. Os dados da sua geometria, tal como as dimensões das secções dos pilares, das vigas e malha de elementos finitos são as que se apresentam na figura 4.35.

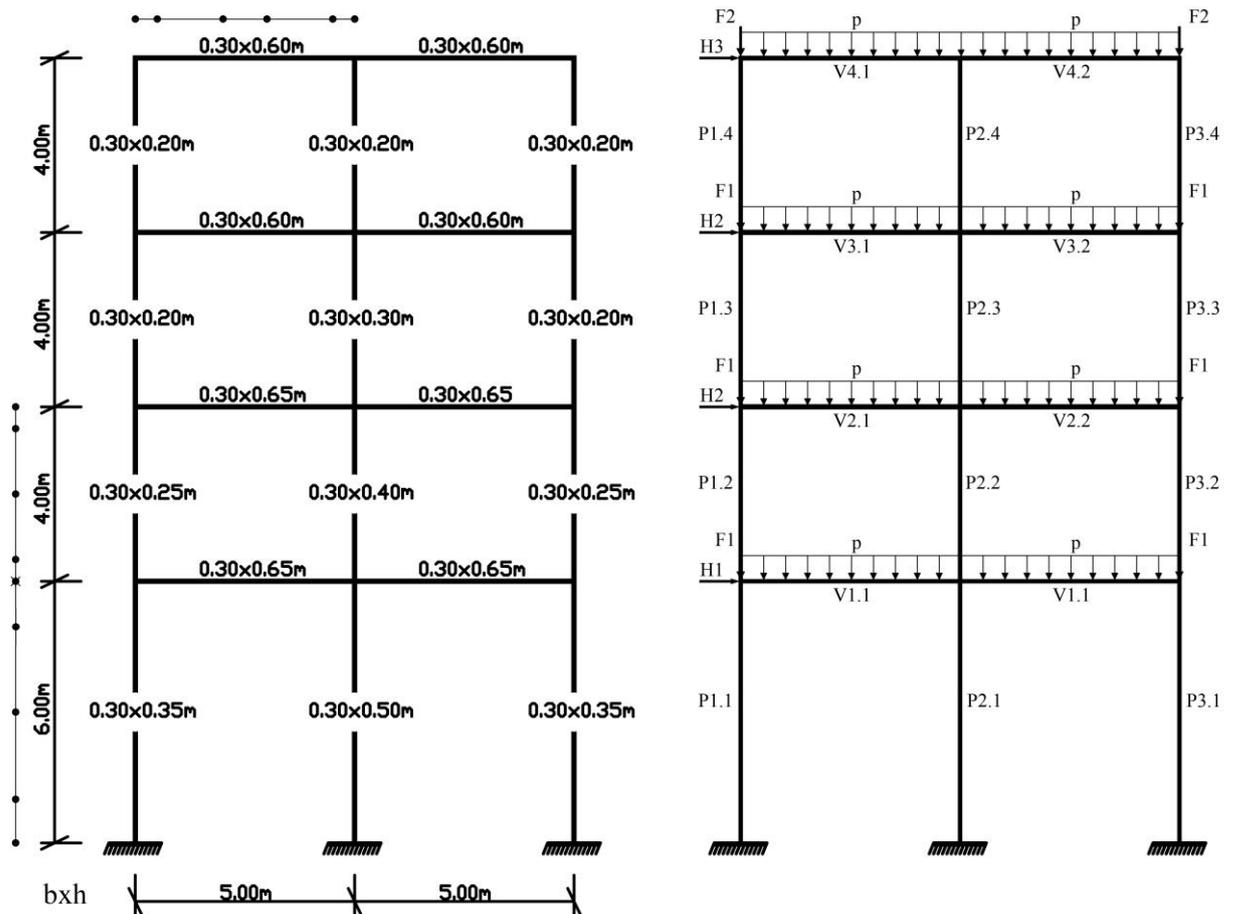


Figura 4.35 Configuração geométrica, malha de elementos finitos e suas dimensões de secções de *PT42*

A solicitação de *PT42* é constituída pelas cargas permanentes *G*, sobrecargas *Q* e ação do vento *W*, tendo-se adotado na combinação de ações a ação base vento. Na tabela 4.7 apresenta-se os valores característicos da solicitação.

Tabela 4.11 Valores de combinação das ações de *PT42*

Tipo de carga	Tipos de ação		
	G	Q	W
p (kN/m)	33,0	0,7x10,5	-
F1 (kN)	100,0	-	-
F2 (kN)	50,0	-	-
H1 (kN)	-	-	35,0
H2 (kN)	-	-	28,0
H3 (kN)	-	-	14,0

#### 4.6.1 Efeitos de 1ª ordem

Os esforços e respetivas secções de armadura referentes aos efeitos de 1ª ordem de *PT42*, são os indicados na figura 4.36. Os valores de 1ª ordem referentes ao REBAP foram retirados de Delgado (2002).

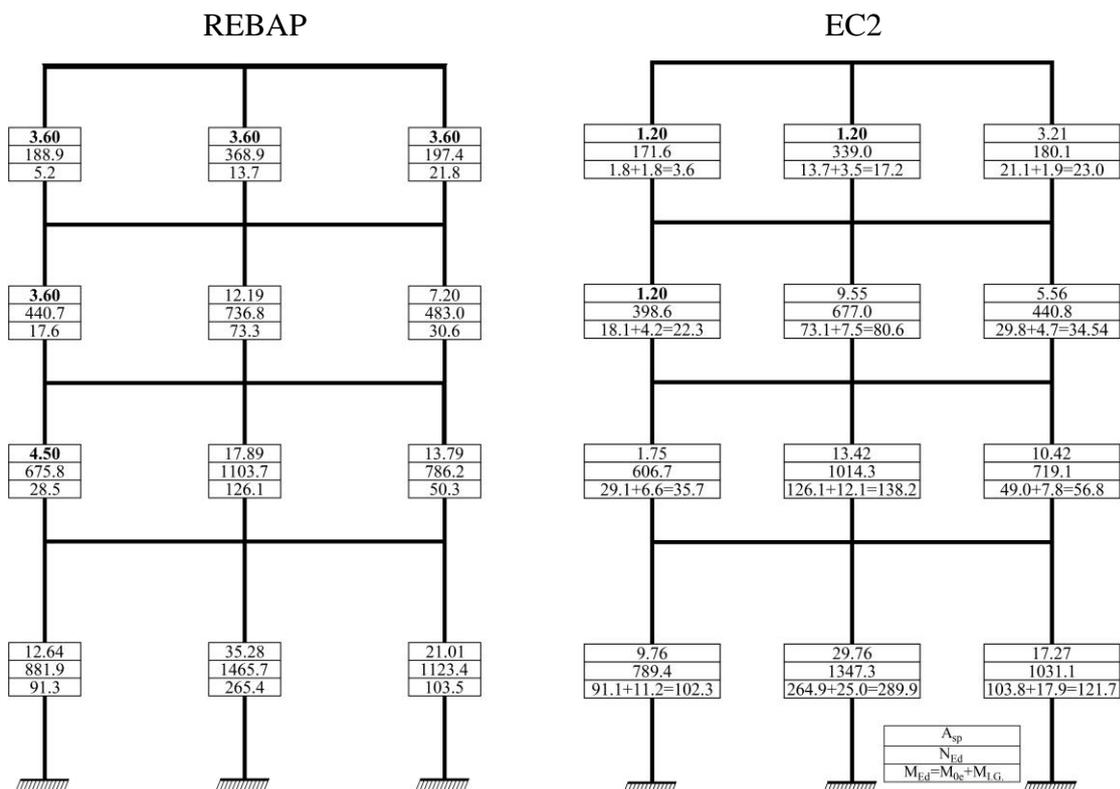


Figura 4.36 REBAP e EC2: Esforços de 1ª ordem e respetivas secções de armadura de *PT42*

#### 4.6.2 Esforços finais

Os valores dos esforços finais e respetivas secções de armadura, quantificadas através dos métodos simplificados Método da Curvatura Nominal e Método da Rigidez Nominal,

propostos pelo EC2 apresentam-se na Figura 4.38. Os valores referentes à metodologia simplificada pelo REBAP retirados de Delgado (2002) são os indicados na figura 4.37.

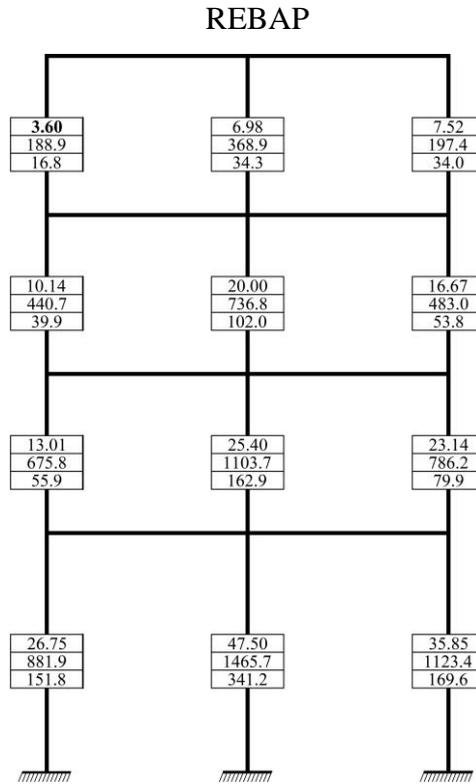


Figura 4.37 REBAP: Esforços finais e respetivas secções de armadura de *PT42*

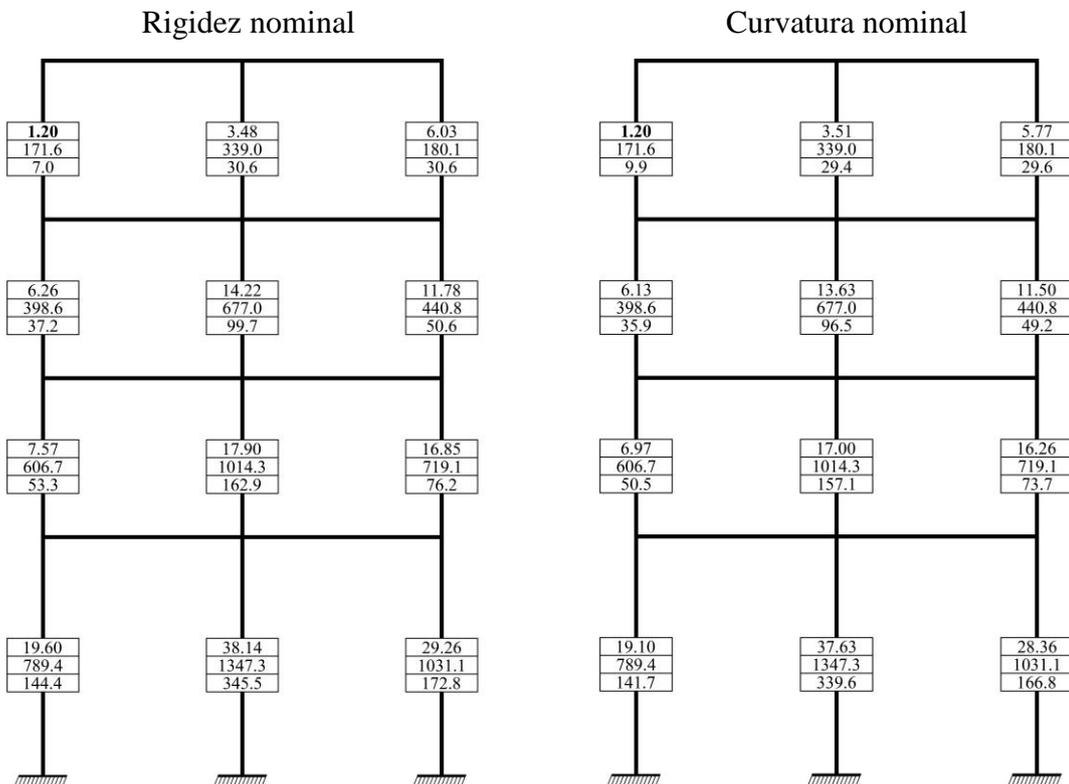


Figura 4.38 EC2: Esforços finais e respetivas secções de armadura de *PT42*

#### 4.6.3 Comparação de esforços: Momentos atuantes

Os momentos atuantes obtidos pelos métodos simplificados segundo EC2 e REBAP, são os indicados nas figuras 4.39, 4.40 e 4.41, tendo a comparação sido realizada para o pilar P2 e P3.

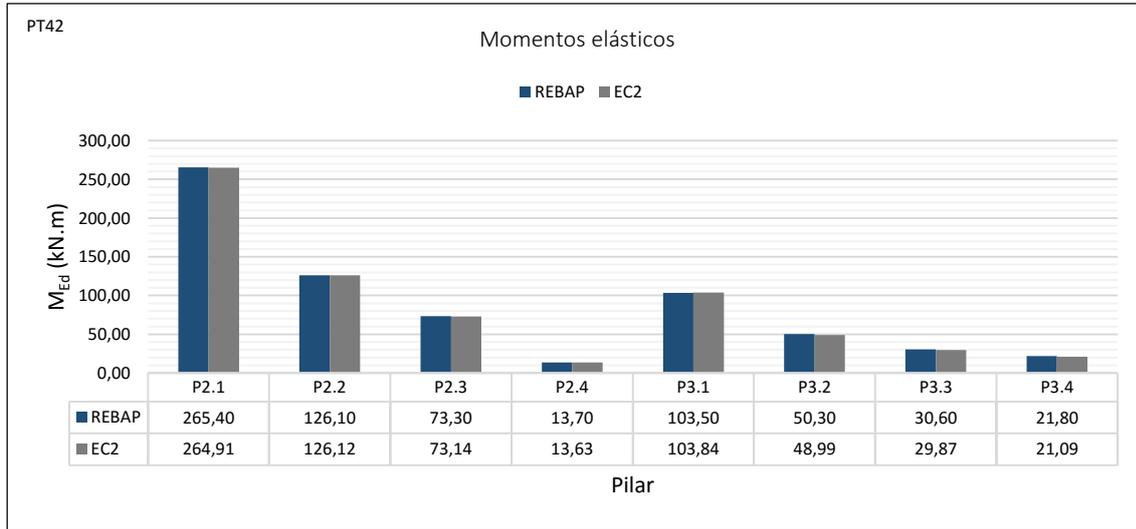


Figura 4.39 REBAP e EC2: Momentos elásticos do pilar P2 e P3 de *PT42*

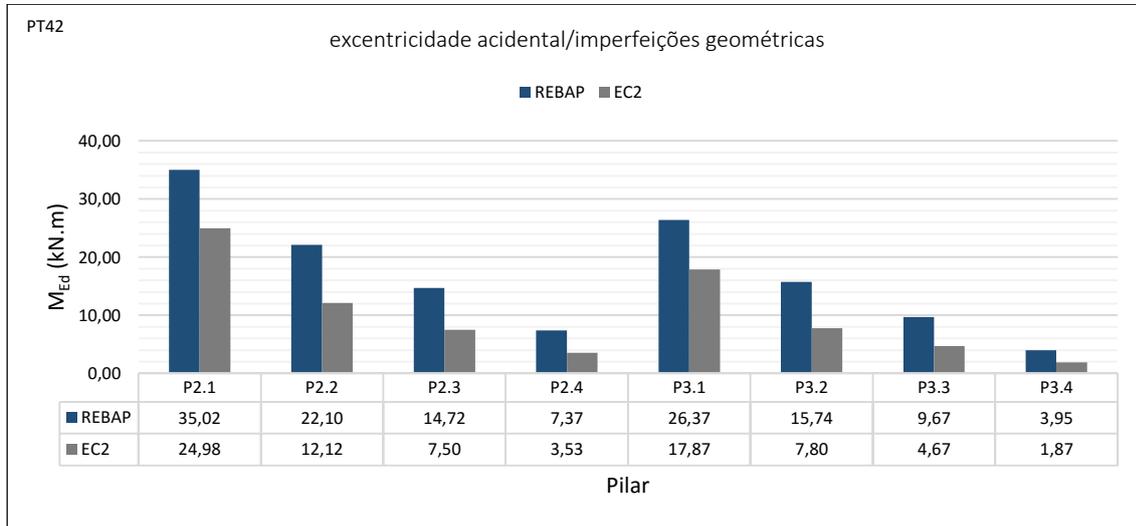


Figura 4.40 REBAP e EC2: Momentos de imperfeições geométricas do pilar P2 P3 de *PT42*

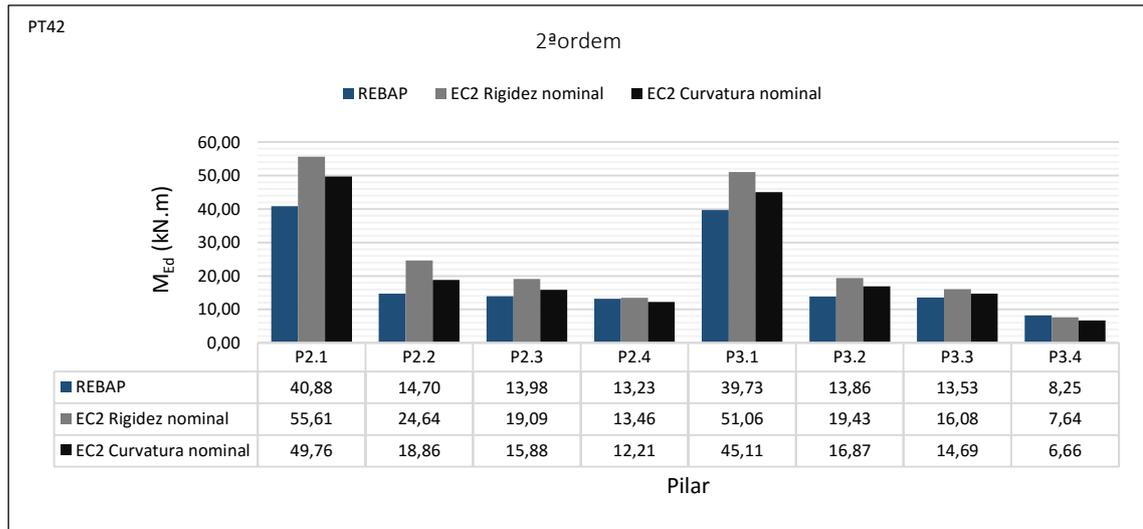


Figura 4.41 REBAP e EC2: Momentos de 2ª ordem do pilar P2 e P3 de *PT42*

Uma análise das figuras 4.39 e 4.40 permitem verificar que as diferenças entre resultados são análogas às obtidas com o *PT11* e tendo origem nas mesmas causas.

Nos resultados referentes aos efeitos de 2ª ordem, como se pode visualizar na figura 4.41, verifica-se o mesmo que se tinha verificado em *PT41*, isto é, no tramo do pilar P3.4 os valores resultantes dos métodos simplificados são menores do que os valores do REBAP.

#### 4.6.4 Comparação de secções de armadura: 1ª ordem e esforços finais

A comparação de secções de armadura foi realizada para o pilar P2 e P3, para os efeitos de 1ª ordem e esforços finais. As respetivas secções de armadura obtidas são apresentadas na figura 4.42 e figura 4.43.

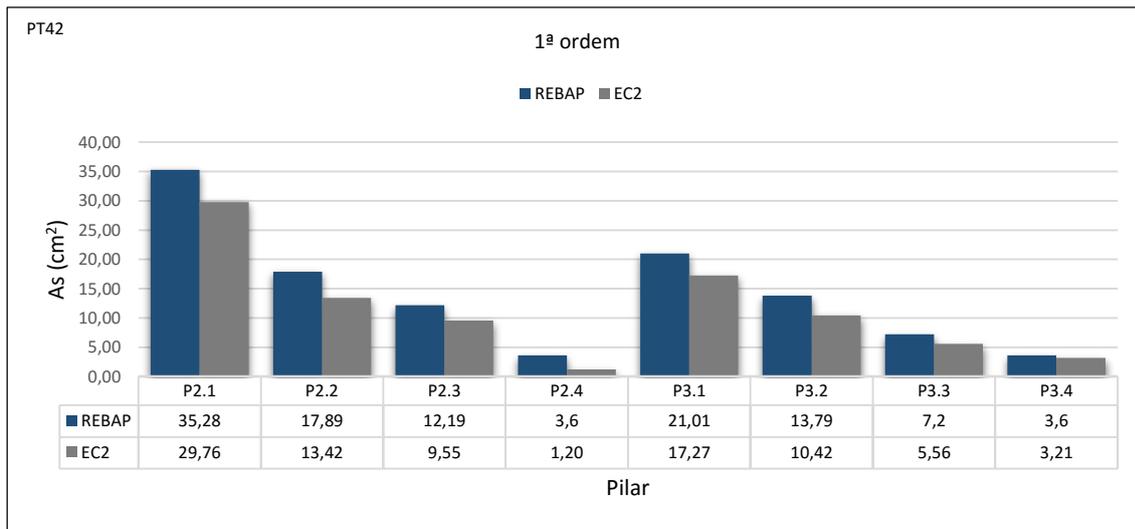


Figura 4.42 REBAP e EC2: Secções de armadura do pilar P2 e P3 de *PT42*. Efeitos de 1ª ordem

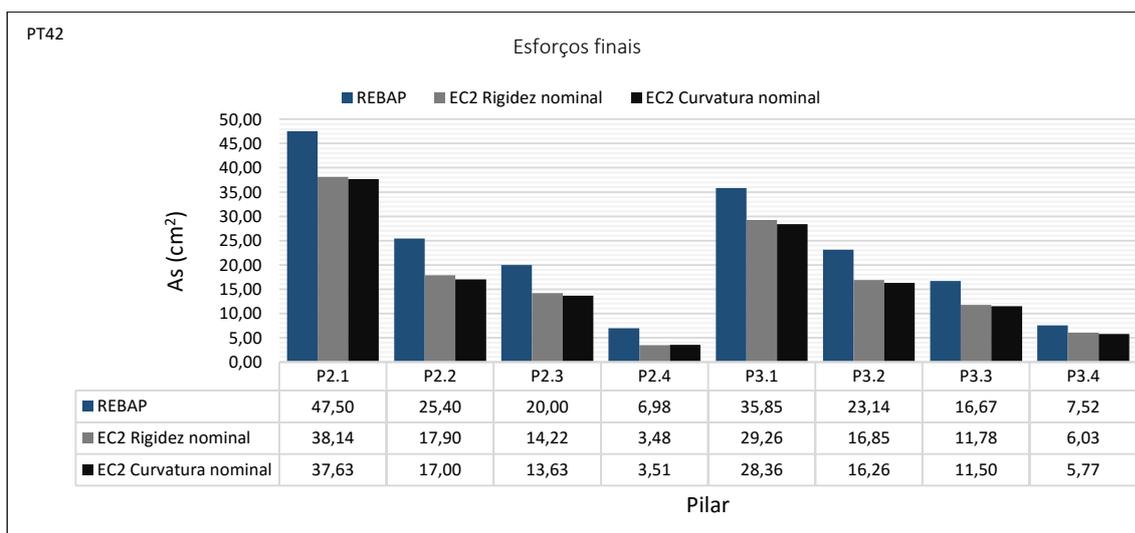


Figura 4.43 REBAP e EC2: Secções de armadura do pilar P2 e P3 de *PT42*. Esforços finais

Os resultados encontrados na figura 4.42 e na figura 4.43 permitem evidenciar a semelhança com os valores obtidos nos pórticos *PT11* e *PT41*, surgindo o dimensionamento REBAP com secções de armadura sempre superiores que ao dimensionamento no EC2. No caso do dimensionamento de 1ª ordem, a secção de armadura obtida com o EC2 é cerca de 22,2%, inferior à obtida com o dimensionamento REBAP, registando-se uma redução superior à encontrada nos pórticos *PT11* e *PT41*. Relativamente aos esforços finais, e comparativamente aos pórticos *PT11* e *PT41*, existe um aumento da diferença de secção de armadura do REBAP em relação ao EC2 da ordem de grandeza de 28,1% para o Método da Rigidez Nominal e 30,4% para o Método Curvatura Nominal.

#### 4.6.5 Avaliação de segurança

##### 4.6.5.1 Lei de distribuição do fator de carga de resistência – $\lambda R$

As leis de distribuição do fator de carga da resistência  $\lambda R$  foram determinadas a partir de um conjunto de 30 amostras  $A_{PT42}$ . Para gerar esse conjunto foi aplicado o Método do Hipercubo Latino.

- Método do Hipercubo Latino – MHL

Na tabela 4.12 e na figura 4.44 estão representados os resultados obtidos com o MHL.

Tabela 4.12 Resultados das amostras da aplicação do MHL de  $PT42$

$A_{PT42}$ : Conjunto de 30 amostras								
n	$f'_c$ (MPa)	$f_{sy}$ (MPa)	n	$f'_c$ (MPa)	$f_{sy}$ (MPa)	n	$f'_c$ (MPa)	$f_{sy}$ (MPa)
1	24,90	380,38	11	19,97	471,91	21	27,22	439,41
2	22,34	494,20	12	21,04	451,16	22	23,11	486,18
3	26,39	410,64	13	21,93	515,21	23	17,39	400,01
4	27,69	447,43	14	18,50	522,97	24	19,31	424,72
5	30,23	490,08	15	24,19	508,90	25	29,42	418,40
6	33,38	465,11	16	20,54	458,26	26	21,50	553,23
7	26,00	430,15	17	31,34	434,99	27	25,62	503,47
8	28,19	498,63	18	22,73	443,54	28	15,34	461,70
9	28,76	478,86	19	23,47	454,76	29	26,79	533,61
10	24,54	482,46	20	23,83	475,35	30	25,26	468,50

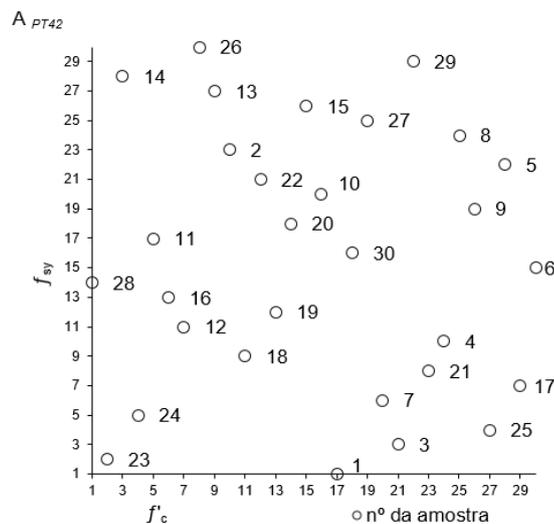


Figura 4.44 Representação gráfica dos resultados das amostras da aplicação do MHL

- Ajuste de leis de distribuição normal a  $\lambda R$  e sua validação.

Depois de geradas as 30 amostras, foi efetuado um igual número de cálculos utilizando o FEMPOR1, dos quais resultaram um conjunto de 30 resultados que permitiram definir um ajuste de uma lei de distribuição de  $\lambda R$ , e efetuar a respetiva validação. Na tabela 4.13 são apresentados os parâmetros estatísticos das leis de distribuição obtidas para os cinco dimensionamentos analisados.

Tabela 4.13 Parâmetros estatísticos das leis de distribuição normais  $\lambda R$  de *PT42*

Dimensionamento <i>PT42</i>	Média $\lambda R$	Desvio Padrão $S_{\lambda R}$	Valor Característico $\lambda R_k$	Coefficiente de variação $CV_{\lambda R}$
REBAP 1ª Ordem	2,32	0,235	1,93	0,102
EC2 1ª Ordem	2,22	0,216	1,86	0,097
REBAP 2ª Ordem	2,23	0,195	1,91	0,088
EC2 Rigidez nominal	2,18	0,188	1,88	0,086
EC2 Curvatura nominal	2,16	0,192	1,85	0,088

A validação foi confirmada através dos resultados obtidos com a aplicação do teste de normalidade baseado nos coeficientes de assimetria e achatamento e o teste de *Kolmogorov-Smirnov*, versão proposta por *Lilliefors* (1967).

Tabela 4.14 Resultados do teste de normalidade de *PT42*

Dimensionamento <i>PT42</i>	Condições a verificar: $\begin{cases} \hat{\gamma}_1(n) < 1,5\sigma_{\hat{\gamma}_1(n)} \\ \left  \hat{\gamma}_2(n) + \frac{6}{n+1} \right  < 1,5\sigma_{\hat{\gamma}_2(n)} \end{cases}$	Verificação	Normalidade da distribuição
EC2 1ª ordem	$\begin{cases} 0,418 < 0,608 \text{ OK} \\ 0,387 < 1,050 \text{ OK} \end{cases}$	Ambas as condições são verificadas	Aceite
EC2 Rigidez nominal	$\begin{cases} 0,505 < 0,608 \text{ OK} \\ 0,533 < 1,050 \text{ OK} \end{cases}$	Ambas as condições são verificadas	Aceite
EC2 Curvatura nominal	$\begin{cases} 0,528 < 0,608 \text{ OK} \\ 0,507 < 1,050 \text{ OK} \end{cases}$	Ambas as condições são verificadas	Aceite

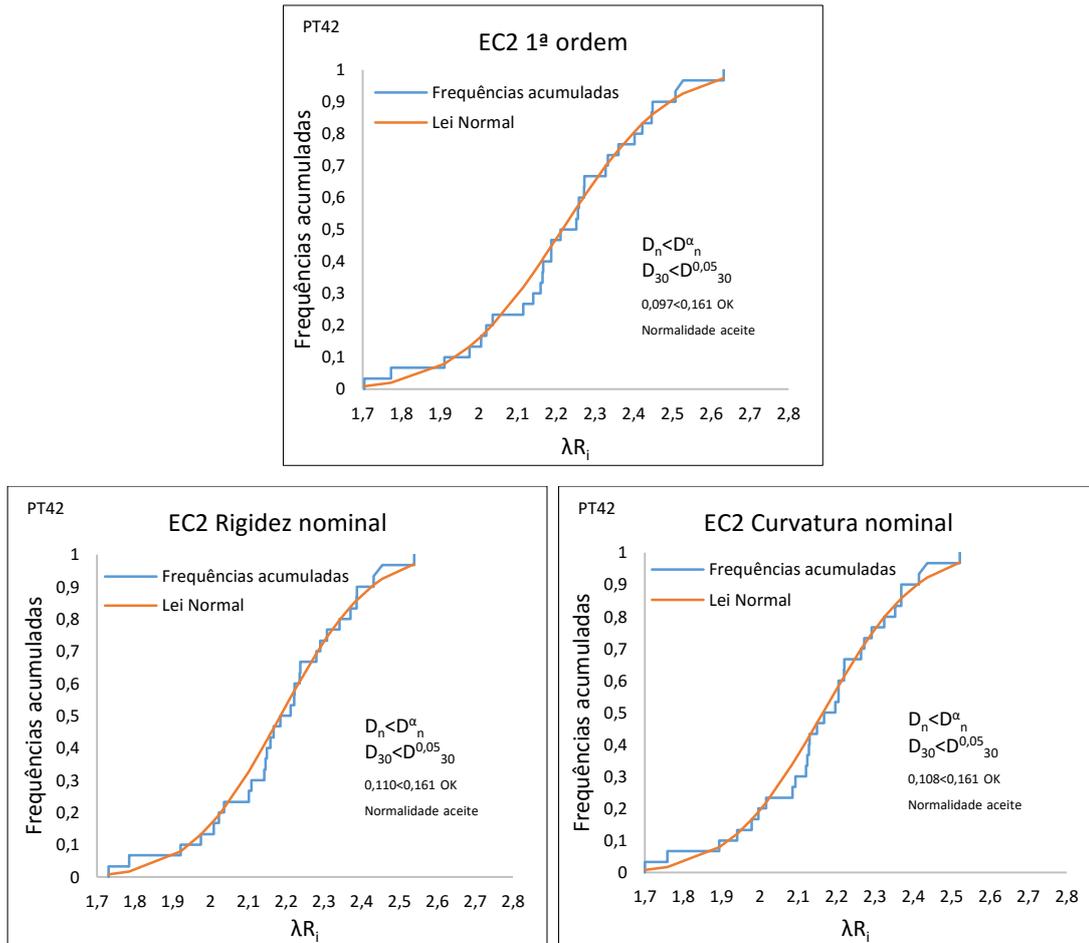


Figura 4.45 Resultados do teste de *Kolmogorov-Smirnov* de *PT42*

#### 4.6.5.2 Probabilidade de ruína e índices de fiabilidade

Definidas as leis de distribuição normais dos fatores de carga da solicitação e da resistência, foi possível determinar os índices de fiabilidade  $\beta$  e as probabilidades de ruína  $p_f$  para os cinco casos estudados de *PT42*.

#### 4.6.5.2.1 REBAP e Eurocódigo2: 1ª ordem

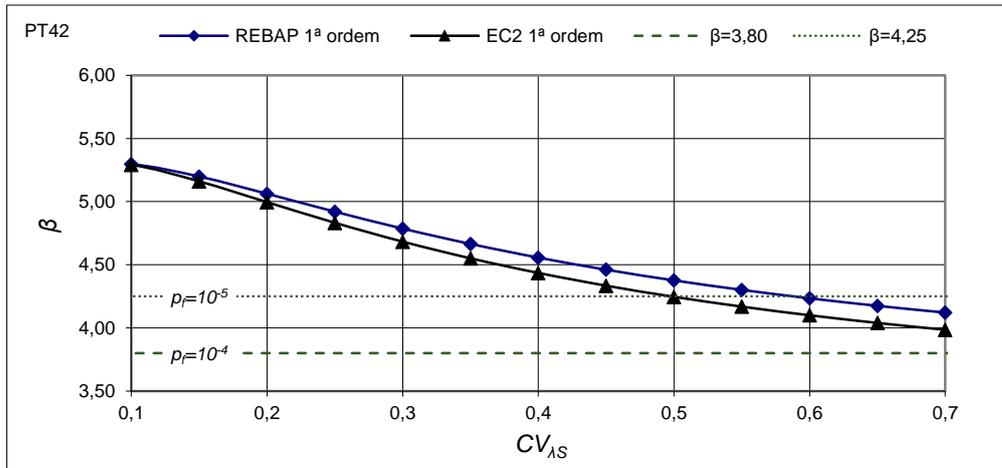


Figura 4.46 REBAP e EC2: Índice de fiabilidade  $\beta$  para os casos de 1ª ordem de *PT42*

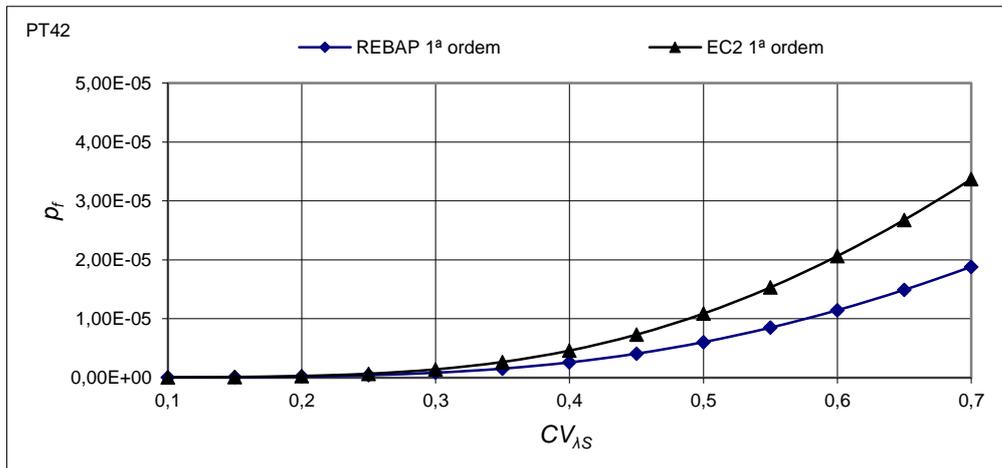


Figura 4.47 REBAP e EC2: Probabilidade de ruína  $p_f$  para os casos de 1ª ordem de *PT42*

Os resultados encontrados para os índices de fiabilidade e probabilidades de ruína, para as análises de 1ª ordem de *PT42*, são semelhantes aos obtidos em *PT11*, por não apresentarem qualquer probabilidade de ruína de,  $10^{-5}$ , para valores realistas do coeficiente de variação ( $0,2 < CV_{\lambda S} < 0,5$ ).

#### 4.6.5.2.2 REBAP e Eurocódigo2: Esforços finais

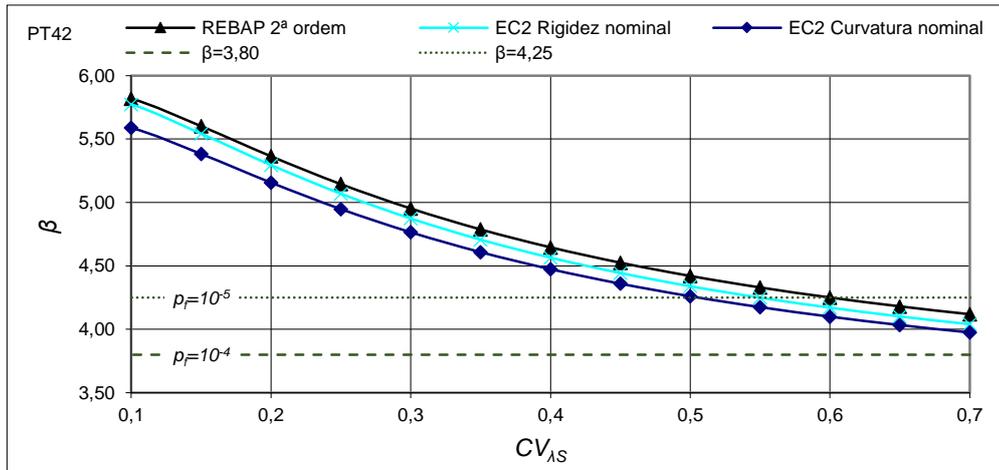


Figura 4.48 Índice de fiabilidade  $\beta$  para os casos de esforço final de *PT42*

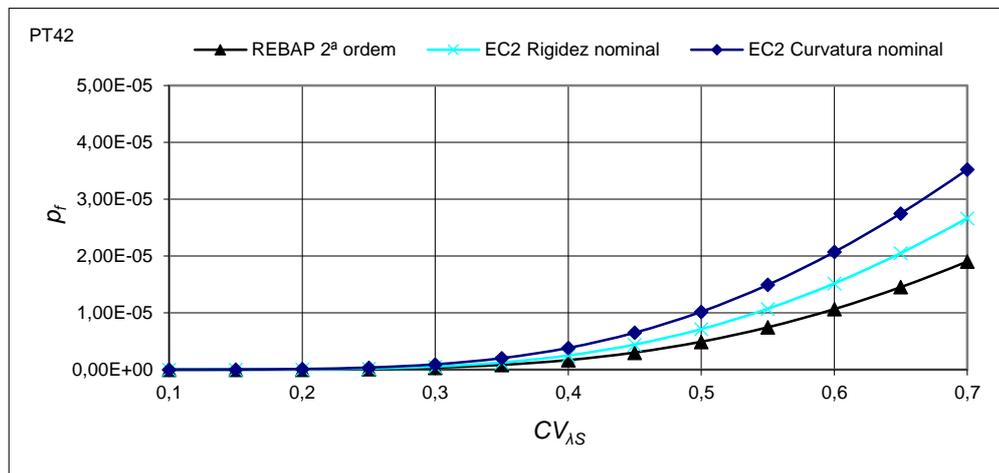


Figura 4.49 Probabilidade de ruína  $p_f$  para os casos de esforço final de *PT42*

A análise dos resultados da figura 4.48 e figura 4.49 permite verificar, uma vez mais, a obtenção de valores de segurança mais elevados no dimensionamento REBAP. No caso do EC2, os resultados mostram que para os valores de coeficiente de variação de referência ( $0,2 < CV_{\lambda S} < 0,5$ ) as probabilidades de ruína de são inferiores a  $10^{-5}$  ( $\beta=4,25$ ), o que corresponde a uma situação considerada segura.

#### 4.6.5.2.3 Eurocódigo2

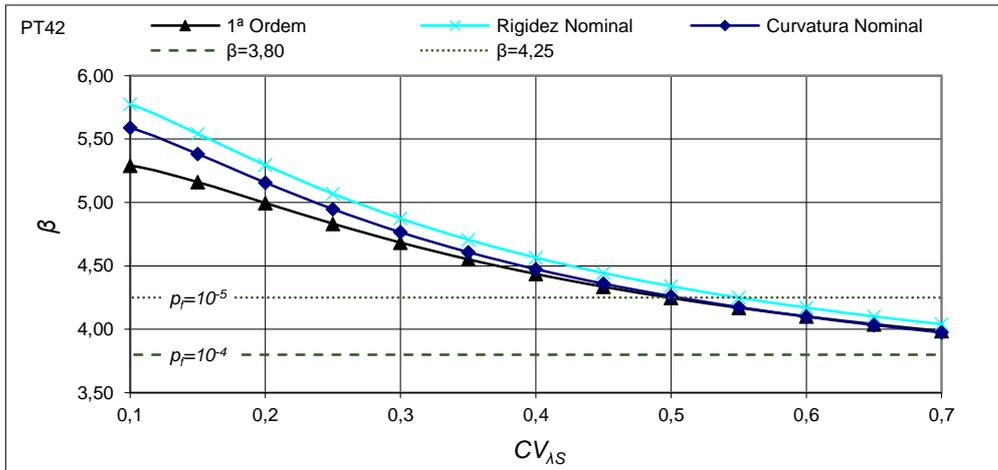


Figura 4.50 EC2: Índice de fiabilidade  $\beta$  de PT42

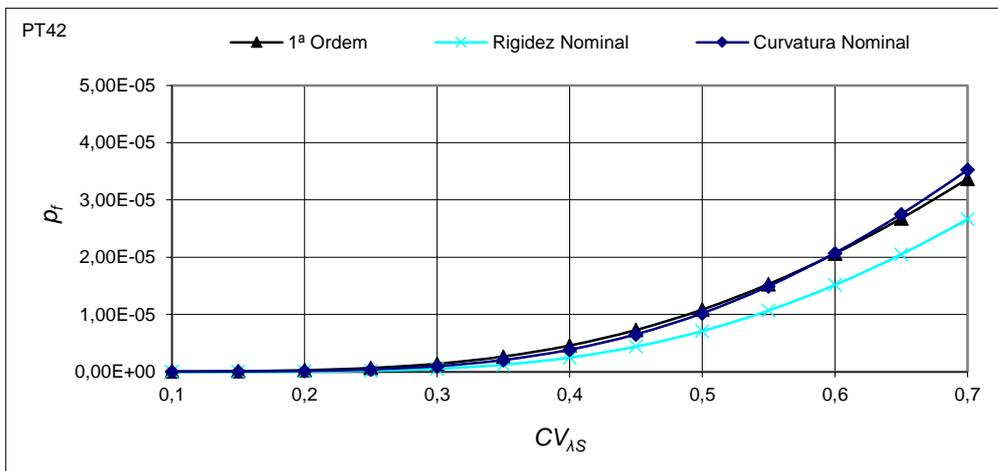


Figura 4.51 EC2: Probabilidade de ruína  $p_f$  de PT42

Comparando apenas os resultados obtidos com o regulamento EC2, as figuras 4.50 e 4.51 permitem verificar que, para o intervalo realista de coeficientes de variação ( $0,2 < CV_{\lambda,S} < 0,5$ ) obtemos probabilidades de ruína inferiores a  $10^{-5}$  em todos os dimensionamentos efetuados. Acresce que a proximidade dos resultados de 1ª ordem, para com as metodologias simplificadas de 2ª ordem, permite aferir a fiabilidade de dimensionamento do EC2, mantendo como método mais conservativo o Método da Rigidez Nominal.

### 4.7 Pórtico de quatro andares e três tramos – PT43

O pórtico *PT43* apresenta quatro andares e três tramos, tendo sido escolhido para diversificar o tipo de estruturas estudadas. Como grandes diferenças em relação ao pórtico *PT42*, surge a existência de mais um tramo de viga e o aumento da rigidez das vigas e dos pilares. Os dados da sua geometria, tal como as dimensões das secções dos pilares, das vigas e malha de elementos finitos são as que se apresentam na figura 4.52.

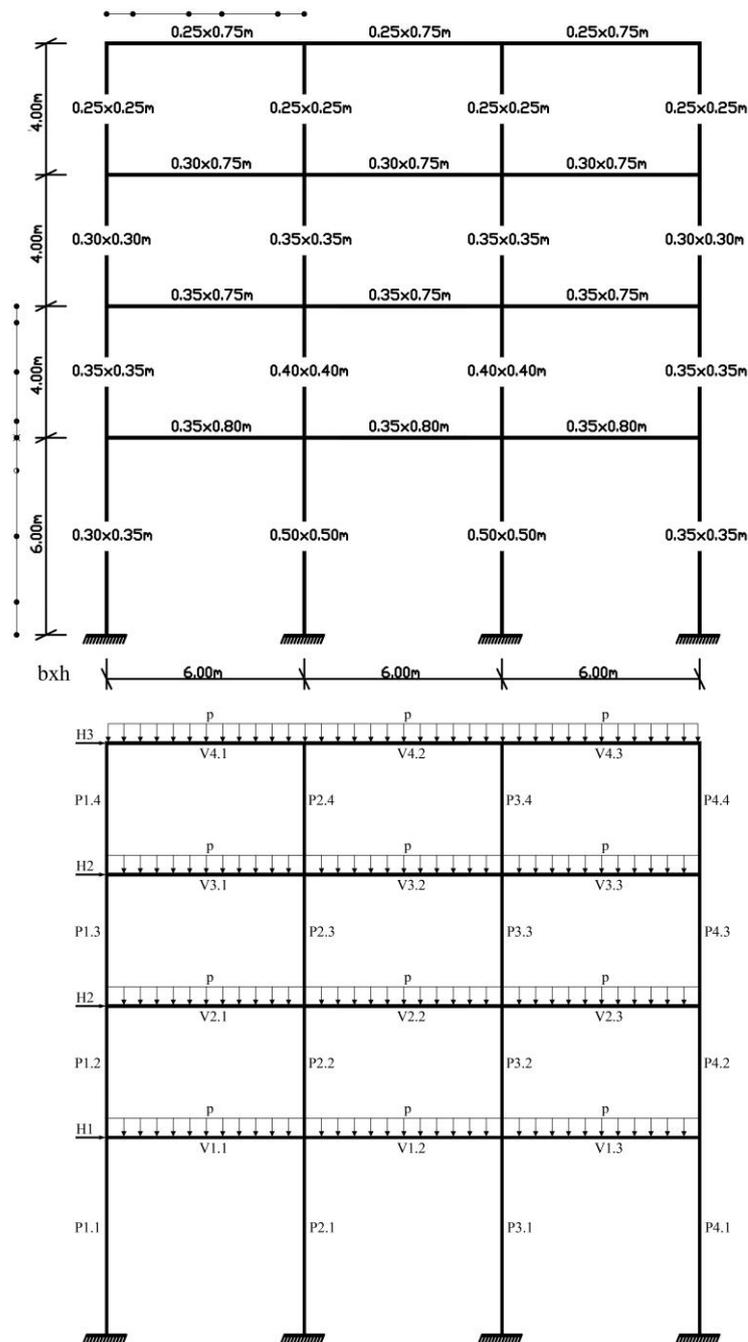


Figura 4.52 Configuração geométrica, malha de elementos finitos e dimensões das secções de *PT43*

A solicitação de *PT43* é constituída pelas cargas permanentes G, sobrecargas Q e ação do vento W, tendo-se seleccionado o vento como ação base da combinação de ações adotada. Na tabela 4.15 estão apresentados os valores característicos e de combinação da solicitação.

Tabela 4.15 Valores de combinação das ações de *PT43*

Tipo de Carga	Tipo de ação		
	G	Q	W
P (Kn/m)	64,8	0,7x21,0	-
H1 (kN)	-	-	35,0
H2 (kN)	-	-	28,0
H3 (kN)	-	-	14,0

#### 4.7.1 Efeitos de 1ª ordem

Os esforços e respectivas secções de armadura referentes aos efeitos de 1ª ordem de *PT43* são os indicados na figura 4.54. Os valores de 1ª ordem referentes ao REBAP foram retirados de Delgado (2002) e são apresentados na figura 4.53.

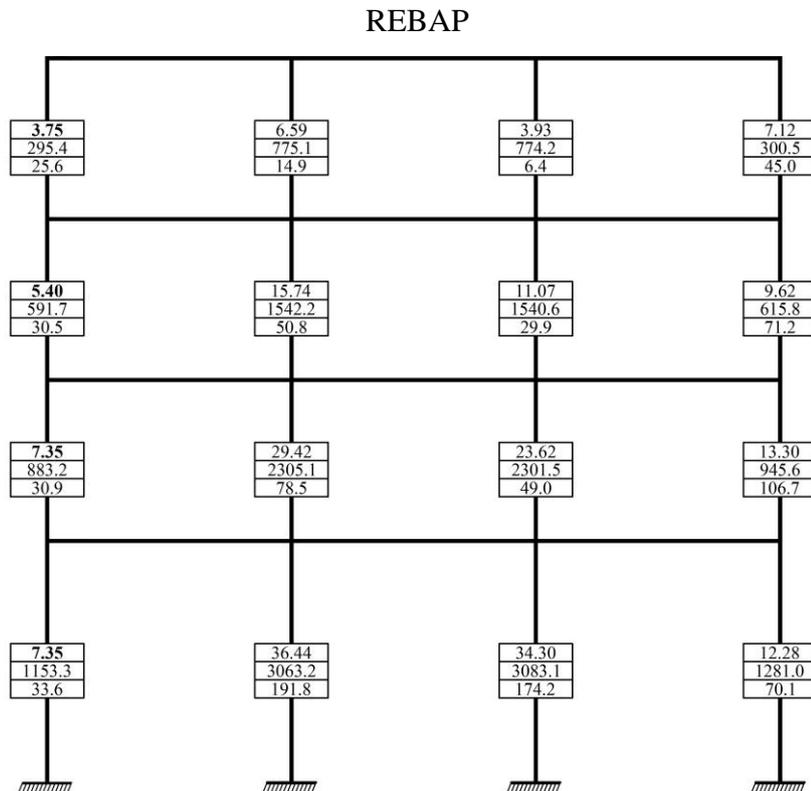


Figura 4.53 REBAP: Esforços de 1ª ordem e respectivas secções de armadura de *PT43*

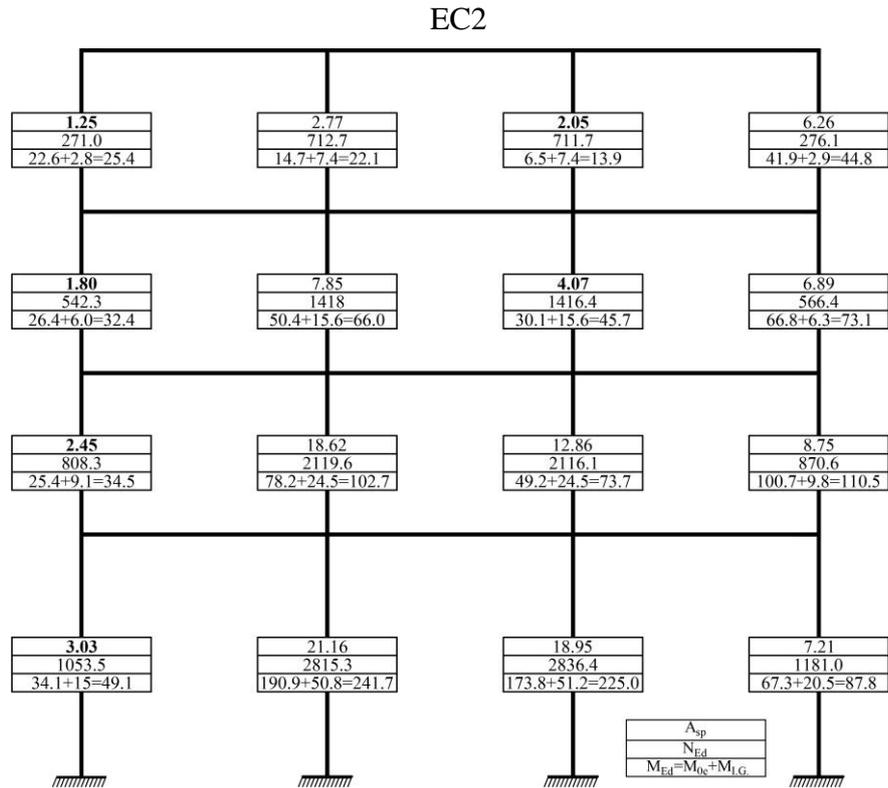


Figura 4.54 EC2: Esforços de 1ª ordem e respetivas secções de armadura de *PT43*

#### 4.7.2 Esforços finais

Os valores dos esforços finais e respetivas secções de armadura, quantificados através dos métodos simplificados Método da Curvatura Nominal e Método da Rigidez Nominal, propostos pelo EC2 e pelo método simplificado do REBAP, retirados de Delgado (2002) apresentam-se nas figuras 4.55, 4.56 e 4.57.

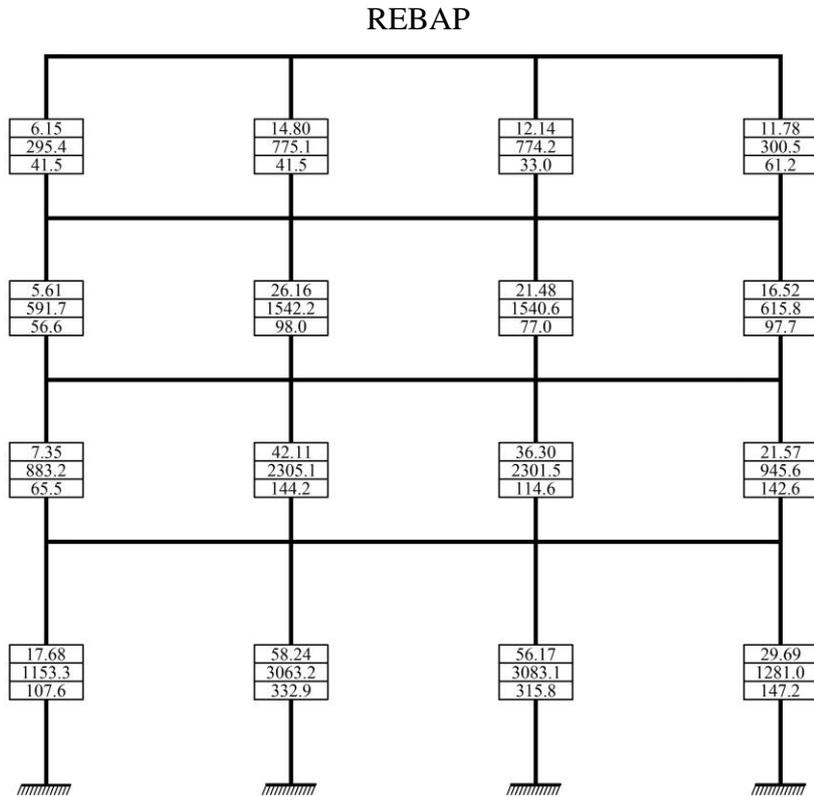


Figura 4.55 REBAP: Esforços finais e respetivas secções de armadura de *PT43*

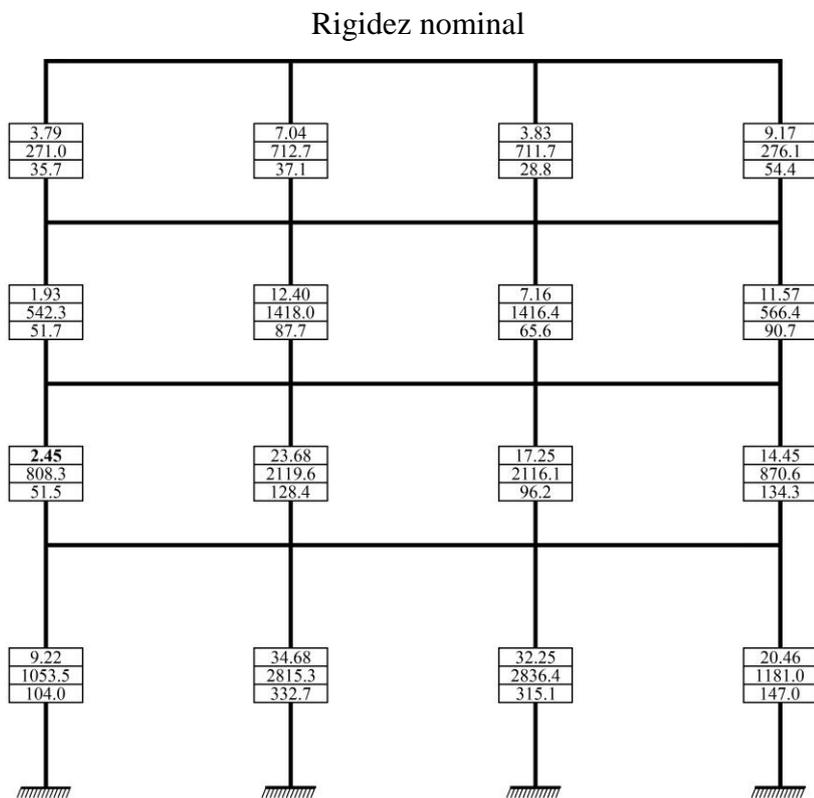


Figura 4.56 EC2: Esforços finais e secções de armadura de *PT43*. Método rigidez nominal

Curvatura nominal

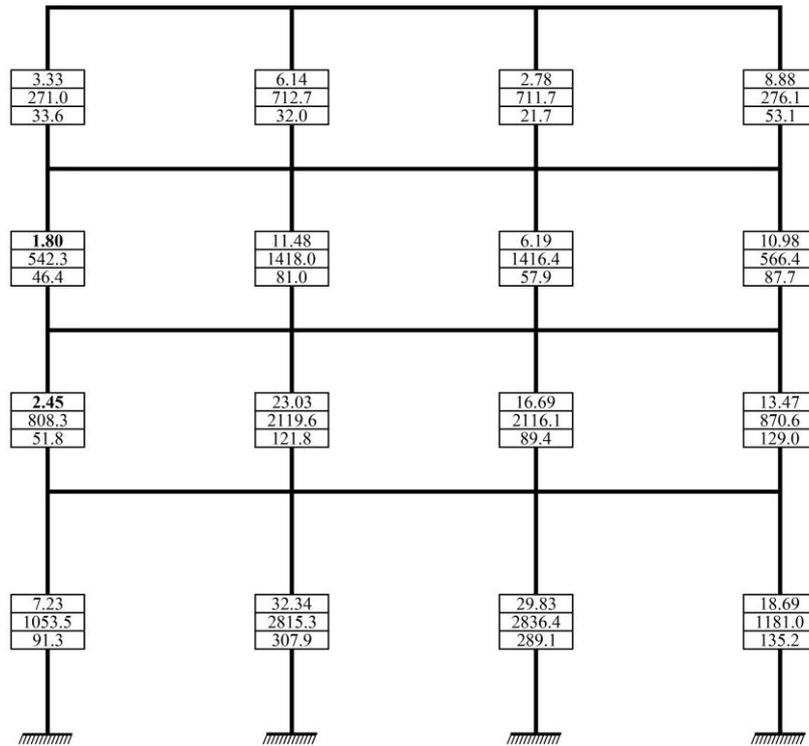


Figura 4.57 EC2: Esforços finais e secções de armadura de *PT43*. Método curvatura nominal

#### 4.7.3 Comparação de esforços: Momentos atuantes

Os momentos atuantes, obtidos pelos métodos simplificados do EC2 e REBAP, são os indicados nas figuras 4.58, 4.59 e 4.60, tendo a comparação sido realizada para o pilar P3 e P4.

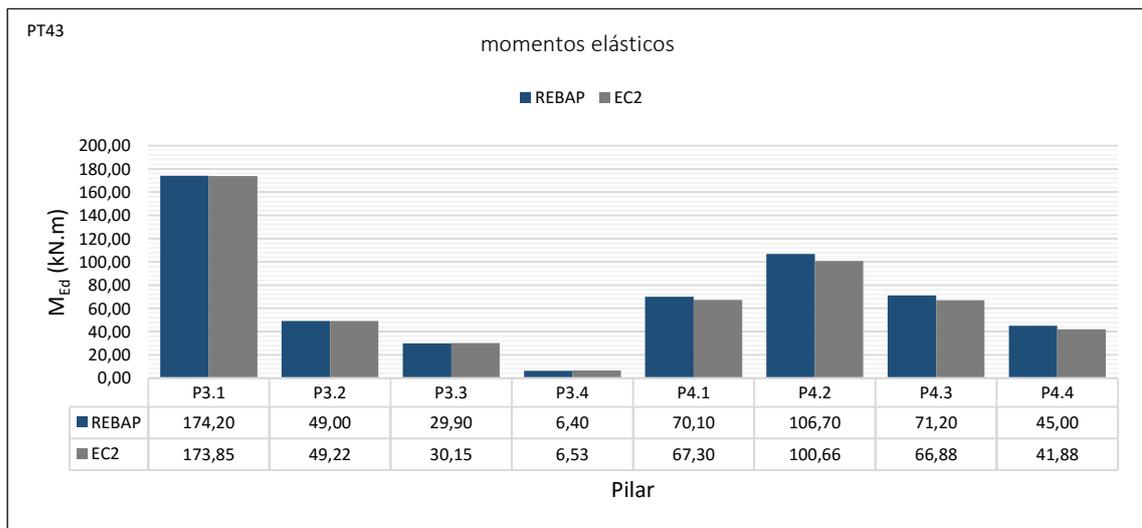


Figura 4.58 REBAP e EC2: Momentos elásticos do pilar P3 e P4 de *PT43*

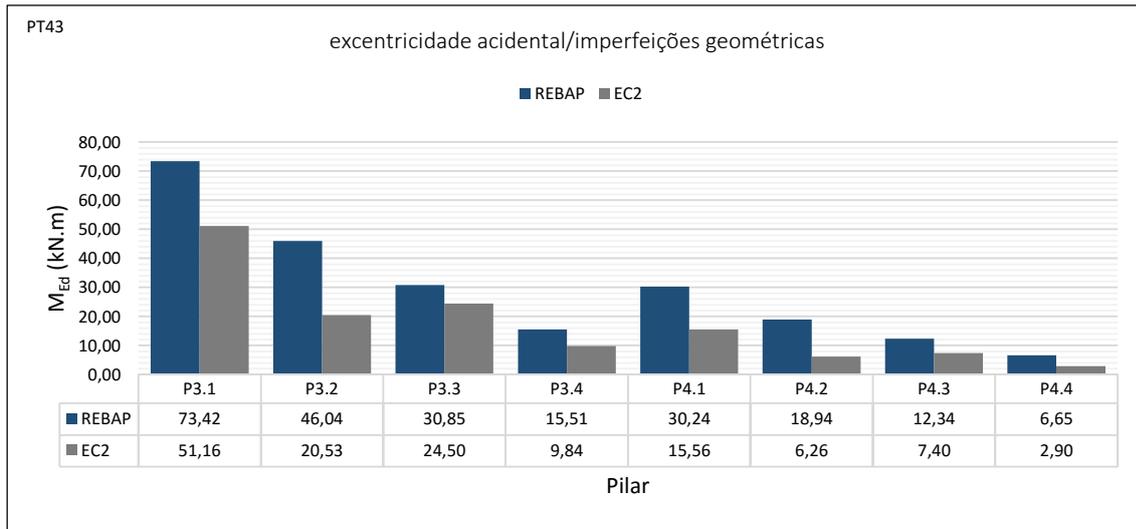


Figura 4.59 REBAP e EC2: Momentos relativos à excentricidade accidental/imperfeições geométricas do pilar P3 e P4 de *PT43*

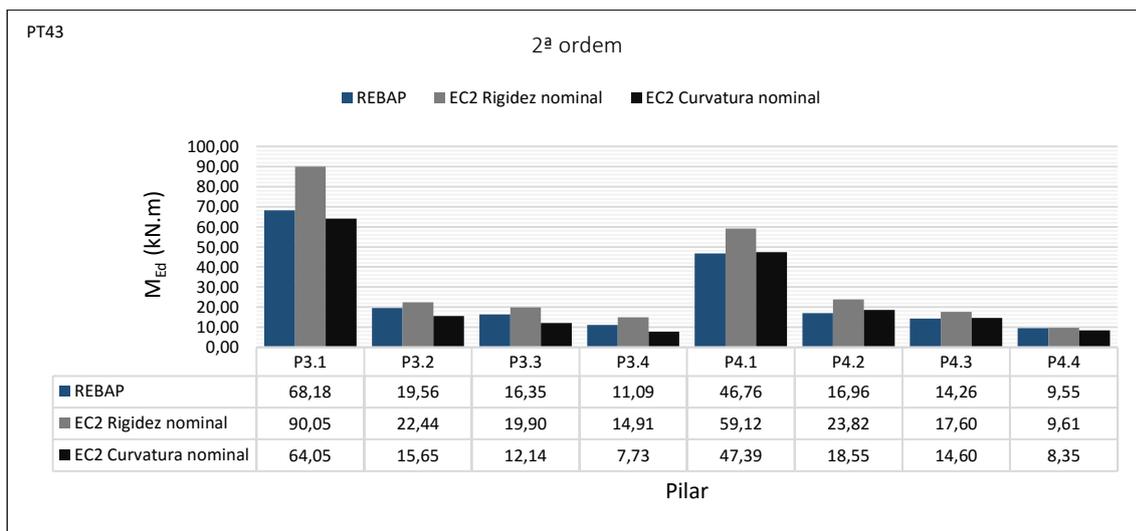


Figura 4.60 REBAP e EC2: Momentos de 2ª ordem do pilar P3 e P4 de *PT43*

Os resultados dos esforços patentes na figura 4.58 e figura 4.59 permitem verificar a semelhança com os valores obtidos em *PT11* e *PT42*, por apresentar valores de imperfeições geométricas relativamente mais conservativos que *PT41*, relação essa entre os regulamentos.

No que diz respeito aos efeitos de 2ª ordem, como se pode visualizar na figura 4.60 na generalidade dos pilares, o Método da Curvatura Nominal apresenta valores próximos de 2ª ordem para com a aplicação do REBAP.

#### 4.7.4 Comparação de secções de armadura: 1ª ordem e esforços finais

A comparação de secções de armadura é realizada para o pilar P3 e P4, para os esforços de 1ª ordem e para os esforços finais. As respetivas secções são representadas nas figuras 4.61 e 4.62.

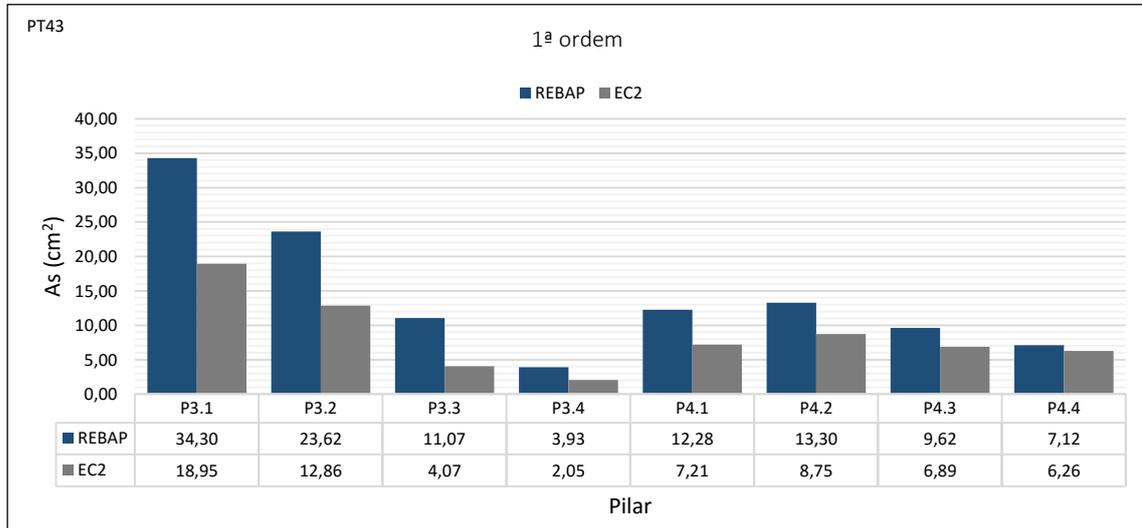


Figura 4.61 REBAP e EC2: Secções de armadura do pilar P3 e P4 de *PT43*. Esforços de 1ª ordem

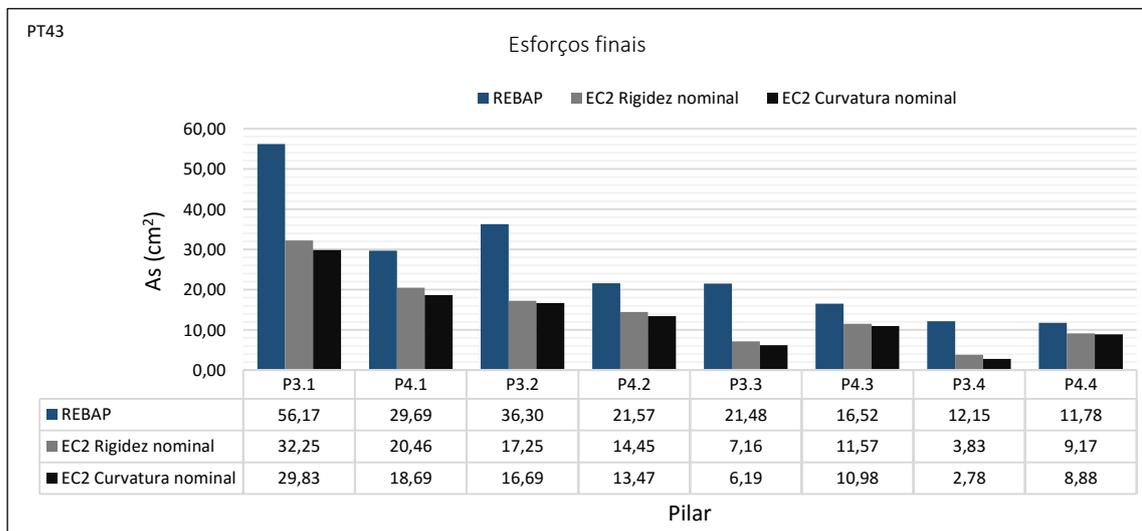


Figura 4.62 REBAP e EC2: Secções de armadura do pilar P3 e P4 de *PT43*. Esforços finais

A análise da figura 4.61 e da figura 4.62 permite concluir, tal como nos pórticos anteriores, que a quantidade de armadura é sempre superior no REBAP. Para o dimensionamento de 1ª ordem, é importante referir que o dimensionamento EC2 apresenta uma grande diferença de secção de armadura, quando comparado com o REBAP, registando-se uma redução de 43%. Relativamente aos esforços finais, verifica-se também uma grande redução na secção de

armadura obtida com o EC2. Redução essa que atingiu 37,8% para o Método da Rigidez Nominal e 42,2% para o Método da Curvatura Nominal.

#### 4.7.5 Avaliação de segurança

##### 4.7.5.1 Lei de distribuição do fator de carga de resistência – $\lambda R$

As leis de distribuição do fator de carga da resistência  $\lambda R$  foram determinadas a partir de um conjunto de 30 amostras  $A_{PT43}$ . Para gerar esse conjunto foi aplicado o Método do Hipercubo Latino.

- Método do Hipercubo Latino – MHL

Na Tabela 4.16 e na figura 4.63 estão representados os resultados obtidos com o MHL.

Tabela 4.16 Resultados das amostras da aplicação do MHL de  $PT43$

$A_{PT43}$ : Conjunto de 30 amostras								
n	$f'_c$ (MPa)	$f_{sy}$ (MPa)	n	$f'_c$ (MPa)	$f_{sy}$ (MPa)	n	$f'_c$ (MPa)	$f_{sy}$ (MPa)
1	25,26	553,23	11	21,93	380,38	21	24,54	439,41
2	21,04	447,43	12	27,22	533,61	22	24,90	434,99
3	22,73	503,47	13	15,34	471,91	23	29,42	468,50
4	28,76	515,21	14	33,38	424,72	24	18,50	465,11
5	19,97	430,15	15	20,54	443,54	25	22,34	508,90
6	31,34	522,97	16	21,50	478,86	26	23,11	458,26
7	26,00	410,64	17	26,79	482,46	27	27,69	454,76
8	23,83	498,63	18	30,23	461,70	28	25,62	400,01
9	28,19	490,08	19	17,39	451,16	29	24,19	494,20
10	23,47	475,35	20	19,31	418,40	30	26,39	486,18

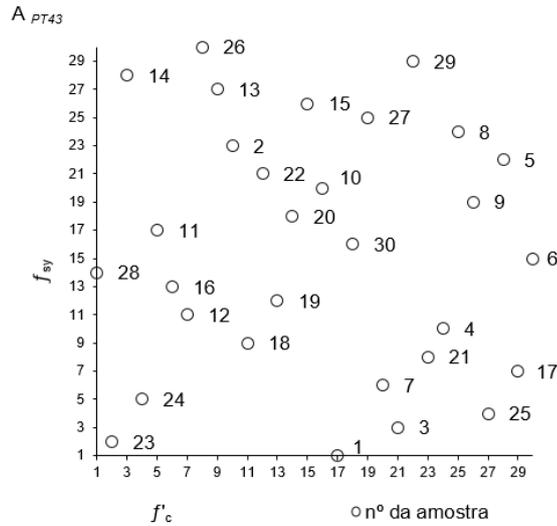


Figura 4.63 Representação gráfica dos resultados das amostras da aplicação do MHL

- Ajuste de leis de distribuição normal a  $\lambda R$  e sua validação.

Depois de geradas as 30 amostras, foi efetuado um igual número de cálculos utilizando o FEMPOR1, dos quais resultaram um conjunto de 30 resultados que permitiram definir um ajuste de uma lei de distribuição de  $\lambda R$ , e efetuar a respetiva validação da mesma. Na Tabela 4.17 são apresentados os parâmetros estatísticos das leis de distribuição obtidas para os cinco dimensionamentos analisados.

Tabela 4.17 Parâmetros estatísticos das leis de distribuição normais  $\lambda R$  de PT43

Dimensionamento PT43	Média $\lambda R$	Desvio Padrão $S_{\lambda R}$	Valor Característico $\lambda R_k$	Coefficiente de variação $CV_{\lambda R}$
REBAP 1ª Ordem	2,38	0,247	1,97	0,104
EC2 1ª Ordem	2,31	0,262	1,88	0,113
REBAP 2ª Ordem	2,49	0,232	2,11	0,093
EC2 Rigidez nominal	2,35	0,271	1,90	0,115
EC2 Curvatura nominal	2,32	0,269	1,88	0,116

Esta validação foi confirmada através dos resultados obtidos com a aplicação do teste de normalidade baseado nos coeficientes de assimetria e achatamento e o teste de *Kolmogorov-Smirnov*, versão proposta por Lilliefors (1967).

Tabela 4.18 Resultados do teste de normalidade de *PT43*

Dimensionamento <i>PT43</i>	Condições a verificar:	Verificação	Normalidade da distribuição
	$\begin{cases} \hat{\gamma}_1(n) < 1,5\sigma_{\hat{\gamma}_1(n)} \\ \left  \hat{\gamma}_2(n) + \frac{6}{n+1} \right  < 1,5\sigma_{\hat{\gamma}_2(n)} \end{cases}$		
EC2 1ª ordem	$\begin{cases} 0,336 < 0,608 \text{ OK} \\ 0,080 < 1,050 \text{ OK} \end{cases}$	Ambas as condições são verificadas	Aceite
EC2 Rigidez nominal	$\begin{cases} 0,307 < 0,608 \text{ OK} \\ 0,290 < 1,050 \text{ OK} \end{cases}$	Ambas as condições são verificadas	Aceite
EC2 Curvatura nominal	$\begin{cases} 0,327 < 0,608 \text{ OK} \\ 0,236 < 1,050 \text{ OK} \end{cases}$	Ambas as condições são verificadas	Aceite

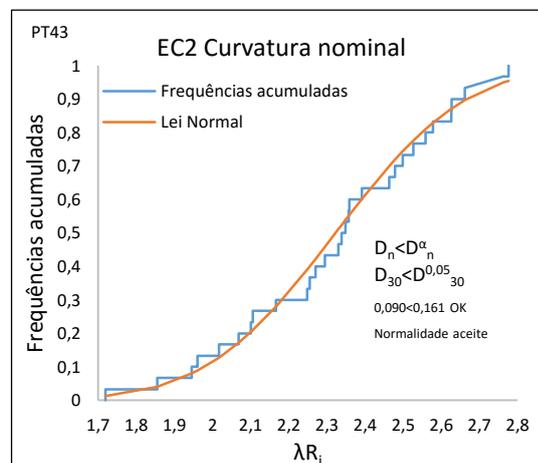
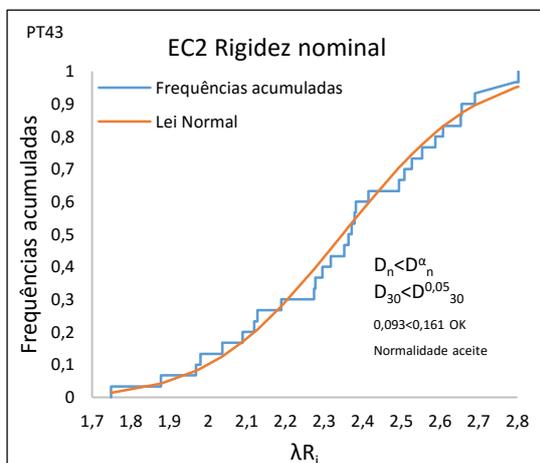
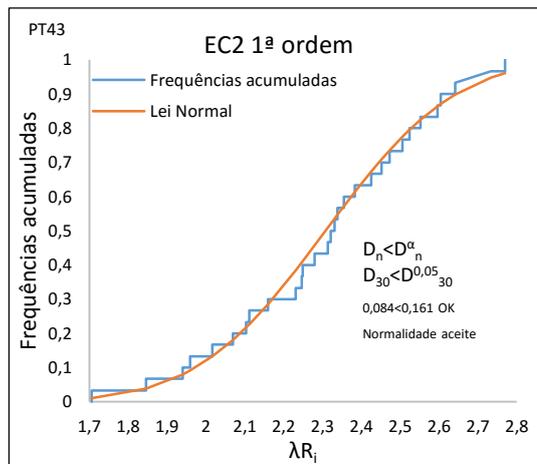


Figura 4.64 Resultados do teste de *Kolmogorov-Smirnov* de *PT43*

#### 4.7.5.2 Probabilidade de ruína e índice de fiabilidade

Definidas as leis de distribuição normais dos fatores de carga da solicitação e da resistência, é possível apresentar, agora, os índices de fiabilidade  $\beta$  e as probabilidades de ruína  $p_f$  para os cinco casos estudados de *PT43*.

#### 4.7.5.2.1 REBAP e Eurocódigo2: 1ª ordem

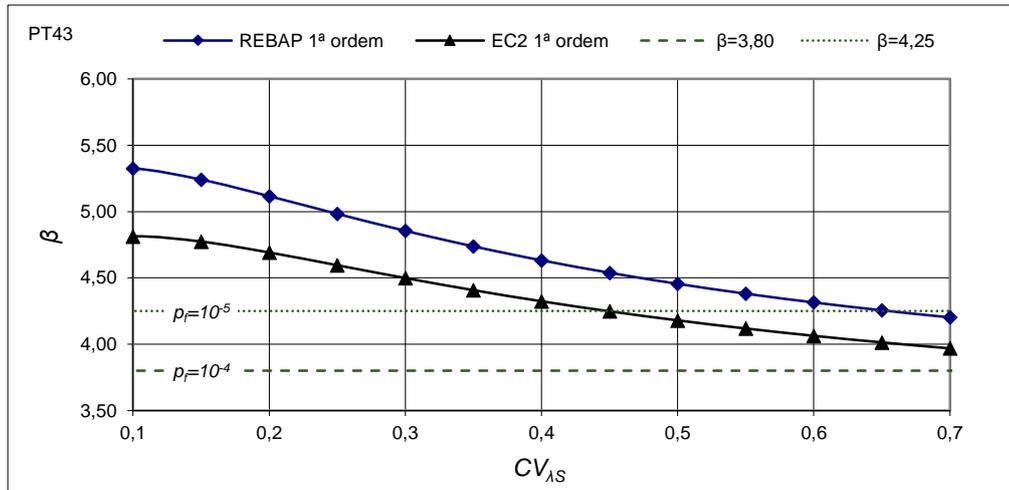


Figura 4.65 REBAP e EC2: Índice de fiabilidade  $\beta$  para os casos de 1ª ordem de *PT43*

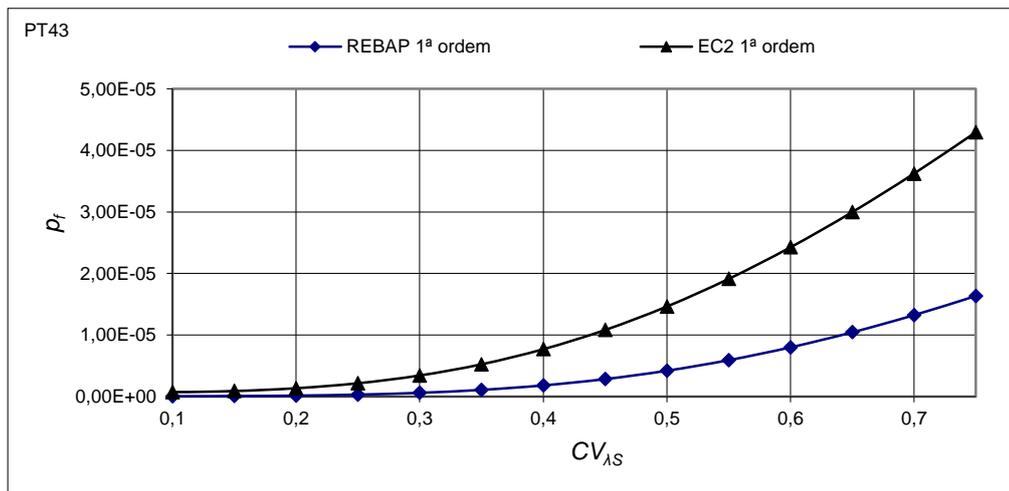


Figura 4.66 REBAP e EC2: Probabilidade de ruína  $p_f$  para os casos de 1ª ordem de *PT43*

Os resultados descritos na figura 4.65 e figura 4.66, para os índices de fiabilidade e respetivas probabilidades de ruína para os efeitos de 1ª ordem, mostram a semelhança dos resultados obtidos em *PT41*, apresentando, todavia, estes pÓrticos valores mais conservativos. O EC2 apresenta uma margem segurança menor do que o REBAP, por se verificarem probabilidades de ruína inferiores a  $10^{-5}$ , para coeficientes de variação superiores a 0,45. No caso do REBAP encontram-se estes nÍveis de probabilidade de ruína para valores do coeficiente de variação já fora da gama de valores de referêncIa, ou seja para  $CV_{\lambda S} > 0,65$ .

#### 4.7.5.2.2 REBAP e Eurocódigo2: Esforços finais

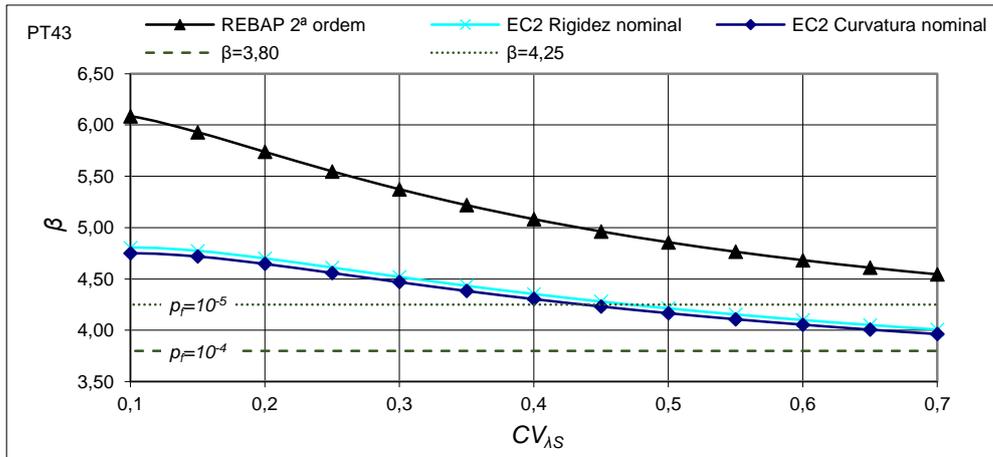


Figura 4.67 Índice de fiabilidade  $\beta$  para os casos de esforço final de PT43

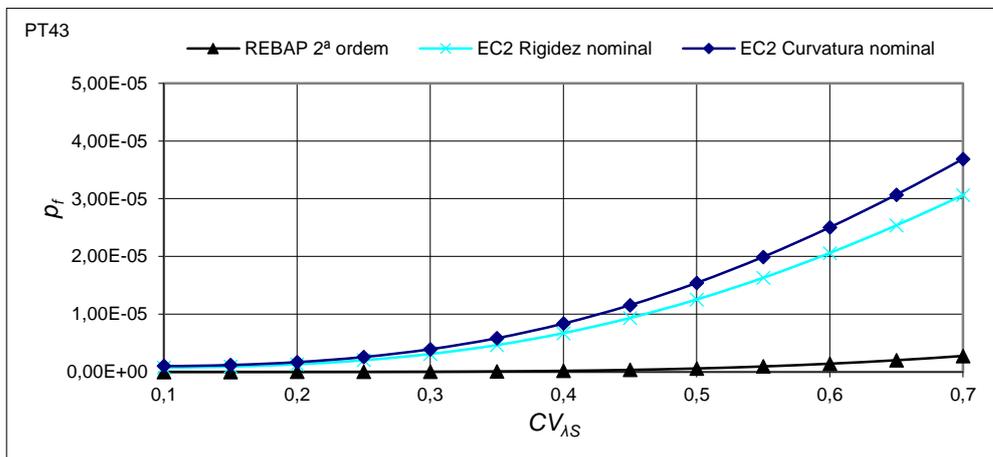


Figura 4.68 Probabilidade de ruína  $p_f$  para os casos de esforço final de PT43

A análise da figura 4.67 e da figura 4.68, onde se apresentam os resultados para os dimensionamentos de 2ª ordem (esforços finais), permite concluir que o REBAP apresenta resultados bastante conservativos do ponto de vista da segurança, por não apresentar probabilidades de ruína superiores a  $10^{-5}$ , para a totalidade da gama de valores de coeficientes de variação ( $0,1 < CV_{Ls} < 0,7$ ). Neste caso, obteve-se um maior afastamento das metodologias do EC2 (esforços finais) do que nos casos dos outros pórticos estudados anteriormente. As metodologias de 2ª ordem propostas pelo EC2 apenas apresentam probabilidades de ruína de,  $10^{-5}$ , para valores de coeficiente de variação superiores a 0,45 no Método da Curvatura Nominal e 0,47 no Método da Rigidez Nominal, valores próximos do limite superior dos valores de referência ( $0,2 < CV_{Ls} < 0,5$ ).

### 4.7.5.2.3 Eurocódigo2

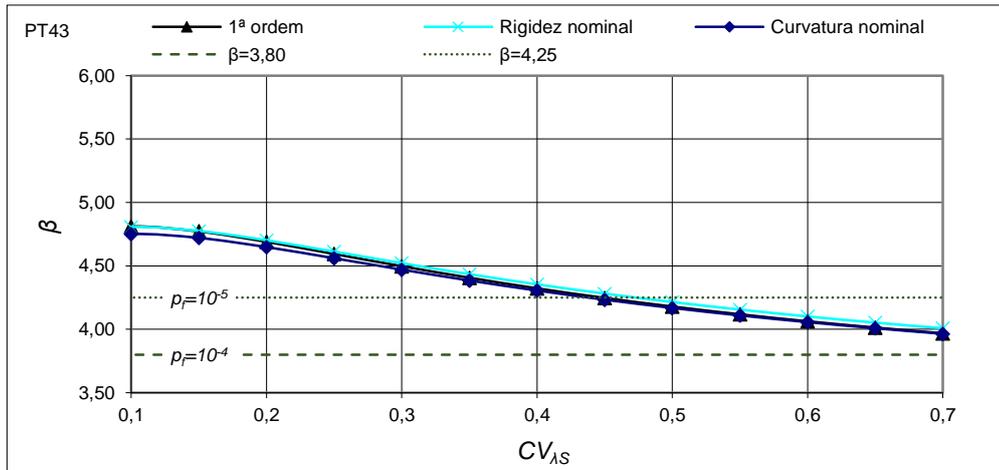


Figura 4.69 EC2: Índice de fiabilidade  $\beta$  de PT43

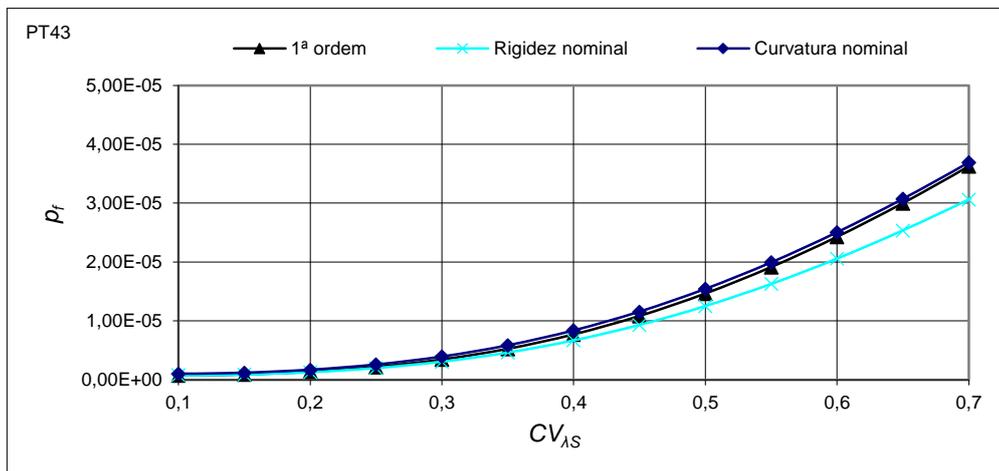


Figura 4.70 EC2: Probabilidade de ruína  $p_f$  de PT43

Através da análise das figuras 4.69 e 4.70, é possível concluir que ambos os dimensionamentos referentes a EC2 apresentam probabilidades de ruína superiores a  $10^{-5}$ , ainda dentro da gama de valores de referência ( $0,2 < CV_{\lambda S} < 0,5$ ). É importante referir a proximidade dos resultados obtidos com os métodos simplificados de 2ª ordem e com os resultados obtidos de 1ª ordem, o que permite concluir da fiabilidade no dimensionamento proposto pelo regulamento EC2.

#### 4.8 Pórtico de nove andares e um tramo – PT91

O pórtico *PT91* apresenta uma geometria diferente relativamente aos pórticos apresentados anteriormente. É constituído por nove andares, com uma altura total de trinta e oito metros e apenas um tramo de viga. Pretende-se com este caso de estudo fazer uma aproximação à avaliação dos efeitos de 2ª ordem no caso de edifícios de grande altura. Os dados da sua geometria, valores da combinação de ações, dimensões das secções dos pilares, das vigas e malha de elementos finitos apresentam-se na figura 4.71.

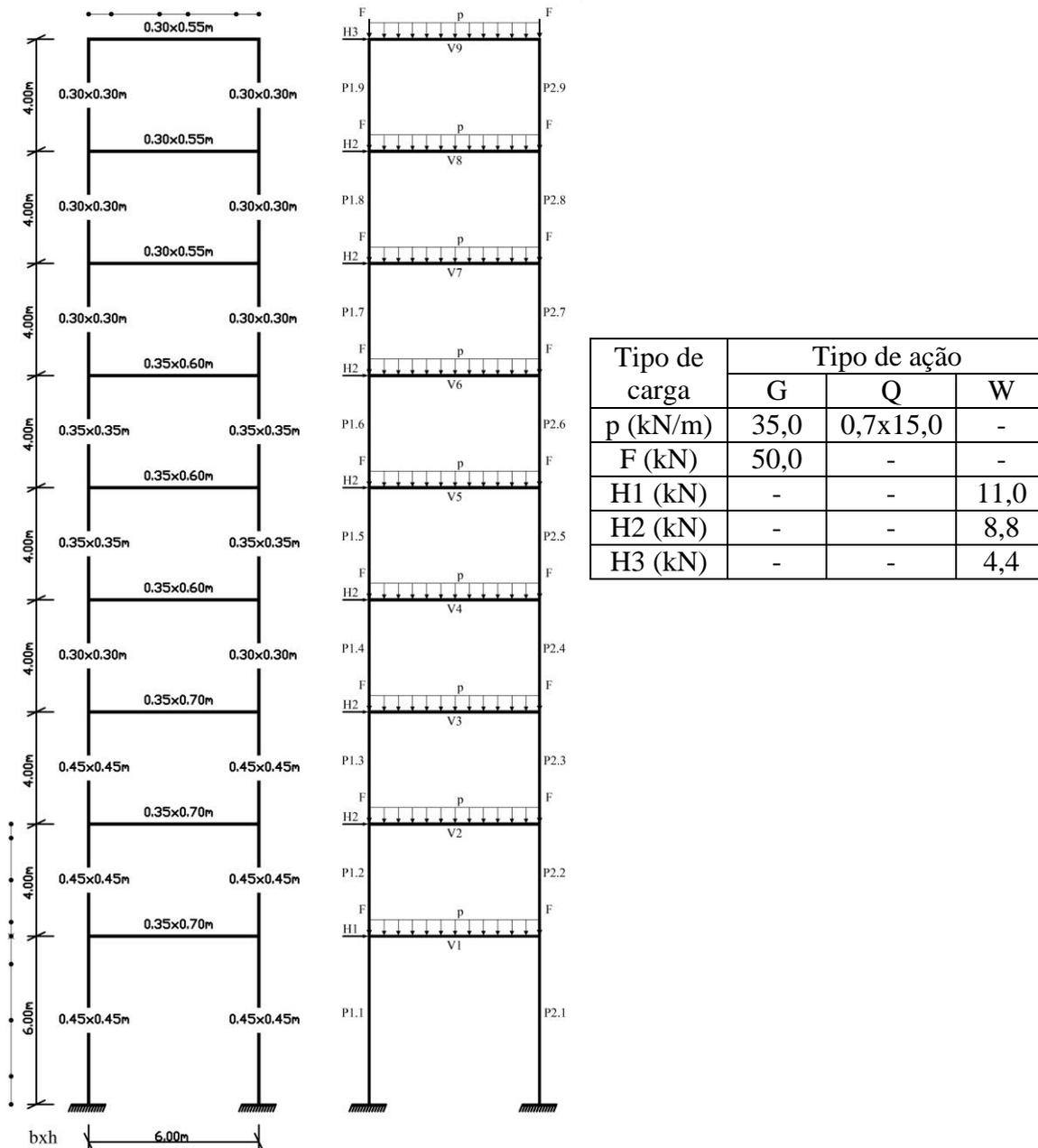


Figura 4.71 Configuração geométrica, malha de elementos finitos, valores de combinações das ações e dimensões das secções de *PT91*

#### 4.8.1 Efeitos de 1ª ordem

Os esforços e respetivas secções de armadura, referentes aos efeitos de 1ª ordem, são os indicados na figura 4.72. Os valores de 1ª ordem, referentes ao REBAP, foram retirados de Delgado (2002).

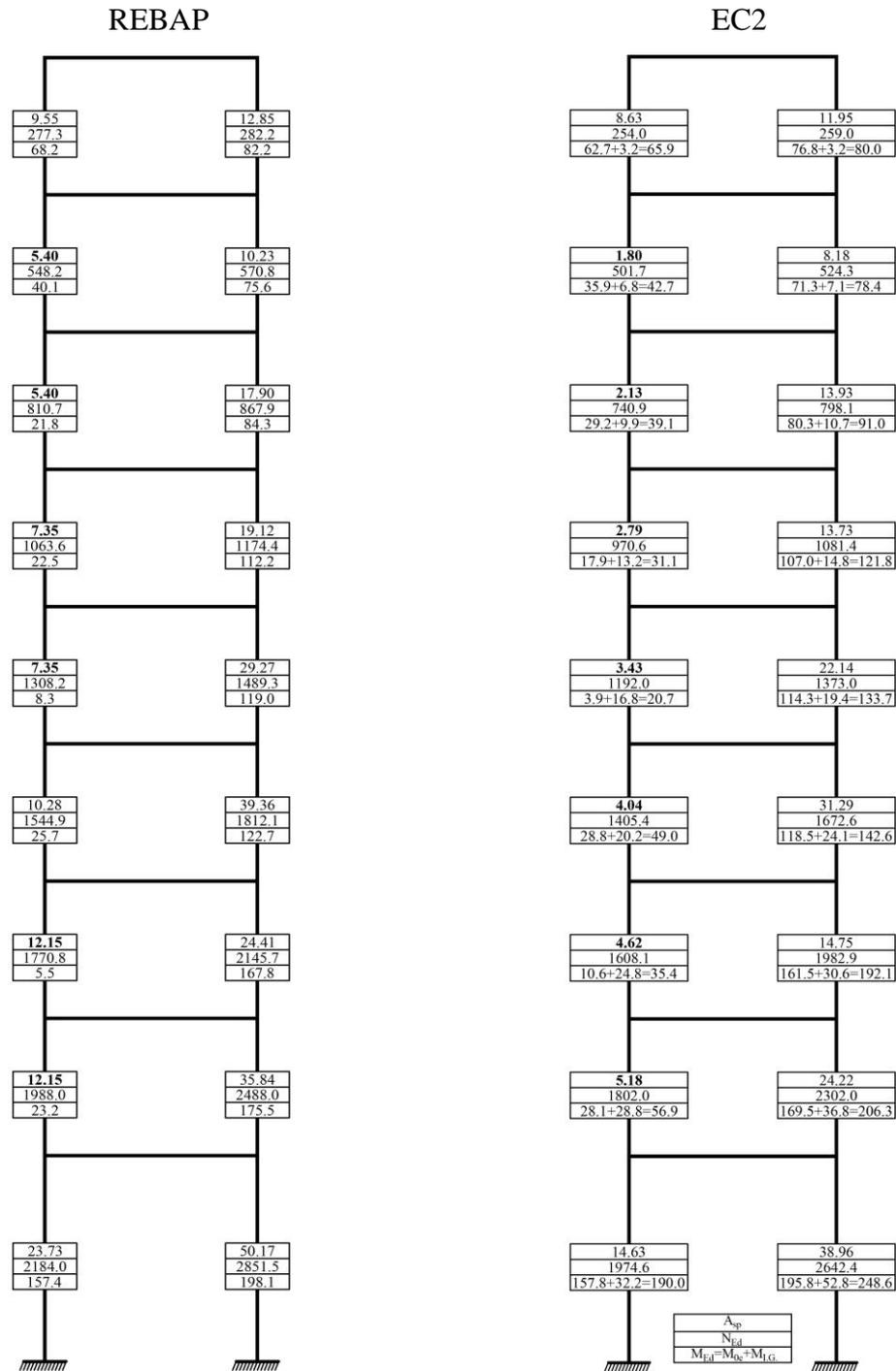


Figura 4.72 REBAP e EC2: Esforços de 1ª ordem e respetivas secções de armadura de

PT91

#### 4.8.2 Esforços finais

Os valores dos esforços finais e respetivas secções de armadura, quantificados através dos métodos simplificados Método da Curvatura Nominal e Método da Rigidez Nominal, propostos pelo EC2 e pelo método simplificado do REBAP, este último retirado de Delgado (2002), apresentam-se na figura 4.21.

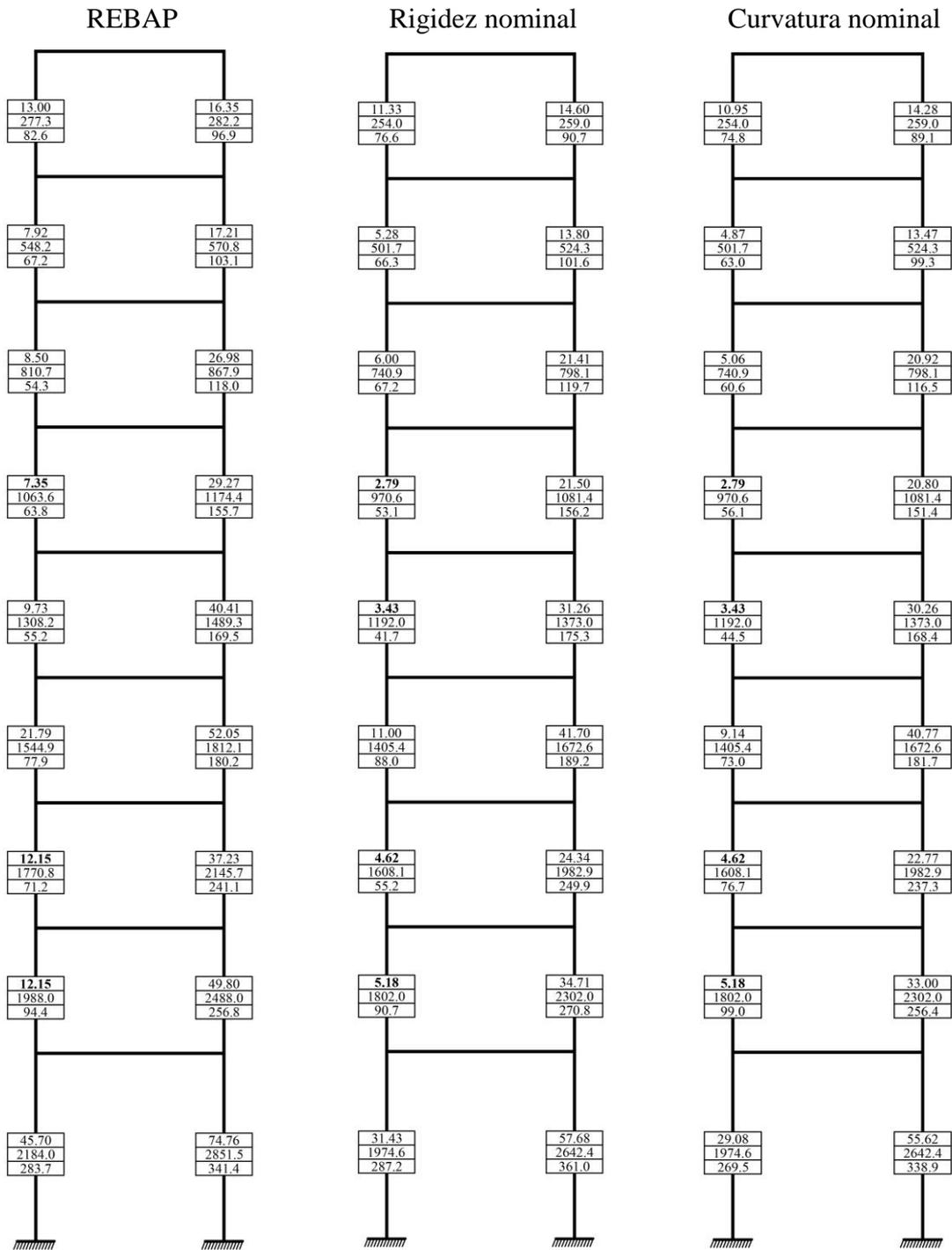


Figura 4.73 REBAP e EC2: Esforços finais e respetivas secções de armadura de PT91

### 4.8.3 Comparação de esforços: Momentos atuantes

Os momentos atuantes, obtidos pelos métodos simplificados impostos pelo EC2 e REBAP, são os indicados nas figuras 4.74, 4.75 e 4.76, tendo a comparação sido realizada para o pilar P2.

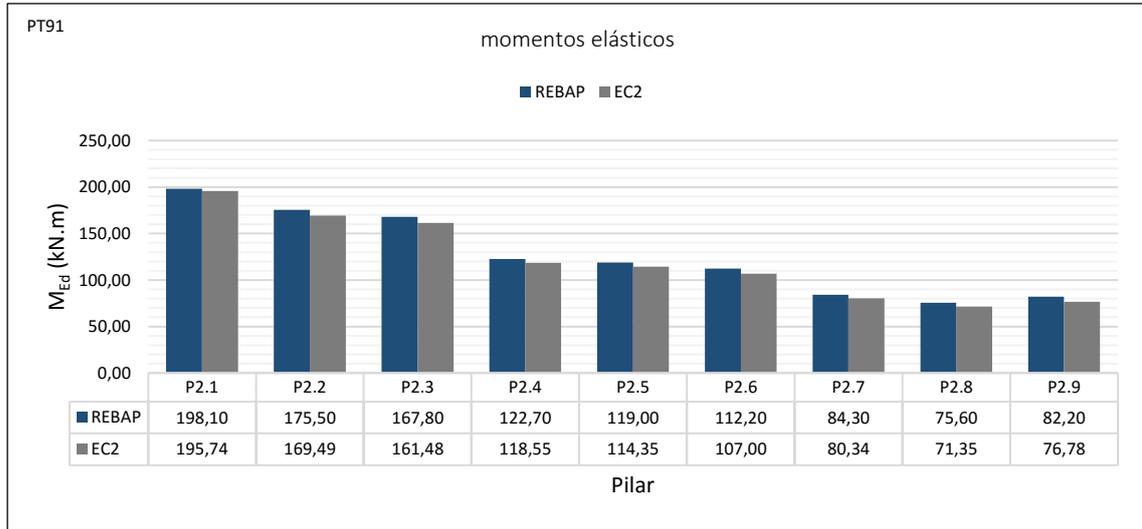


Figura 4.74 REBAP e EC2: Momentos elásticos do pilar P2 de *PT91*

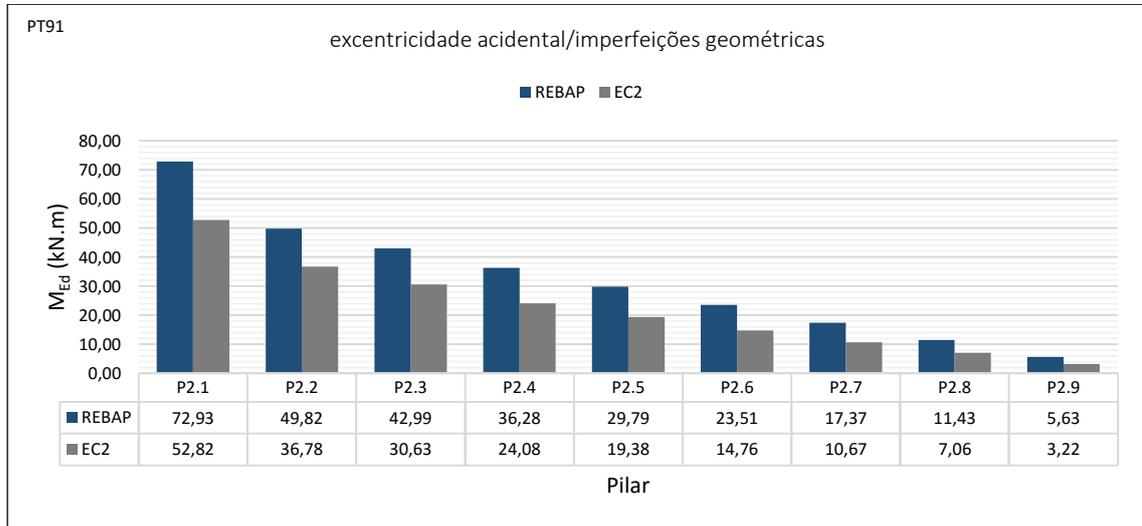


Figura 4.75 REBAP e EC2: Momentos relativos de imperfeições geométricas do pilar P2 de *PT91*

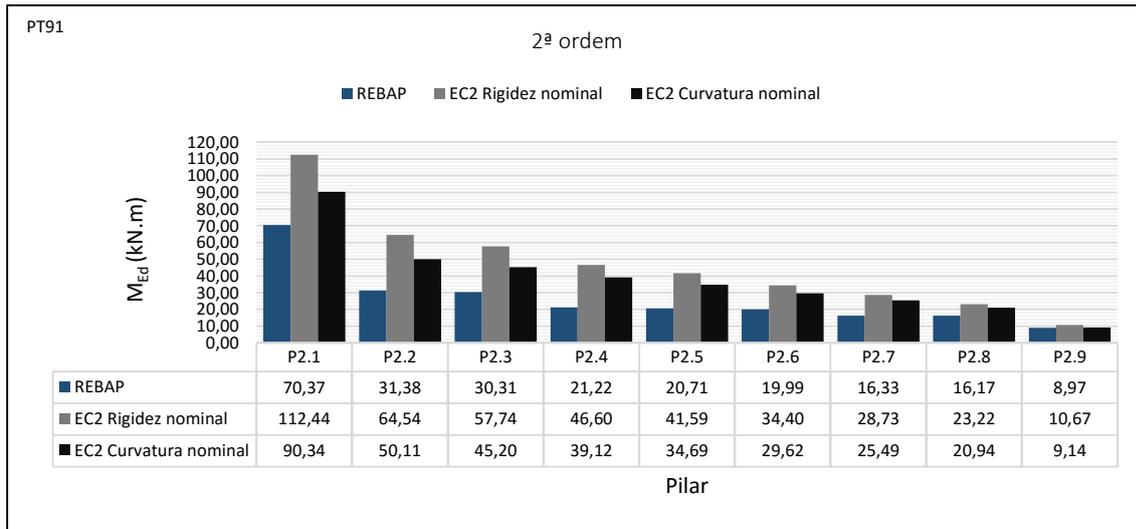


Figura 4.76 REBAP e EC2: Momentos de 2ª ordem do pilar P2 de *PT91*

Ao analisar as figuras 4.74 e 4.75, verifica-se a similaridade com os pórticos estudados anteriormente, em que o momento elástico e o momento relativo às imperfeições geométricas são sempre superiores no caso REBAP. Salienta-se que os momentos das imperfeições geométricas obtidos com o EC2 para o pórtico *PT91*, registam uma redução de 35%, em relação ao REBAP.

Relativamente à figura 4.76, esta permite concluir que, da aplicação dos métodos simplificados do EC2, resultam valores de 2ª ordem mais conservativos.

#### 4.8.4 Comparação de secções de armadura: 1ª ordem e esforços finais

A comparação de secções de armadura foi realizada para o pilar P2 para os efeitos de 1ª ordem e para os esforços finais. As respetivas secções de armadura são representadas nas figuras 4.77 e 4.78.

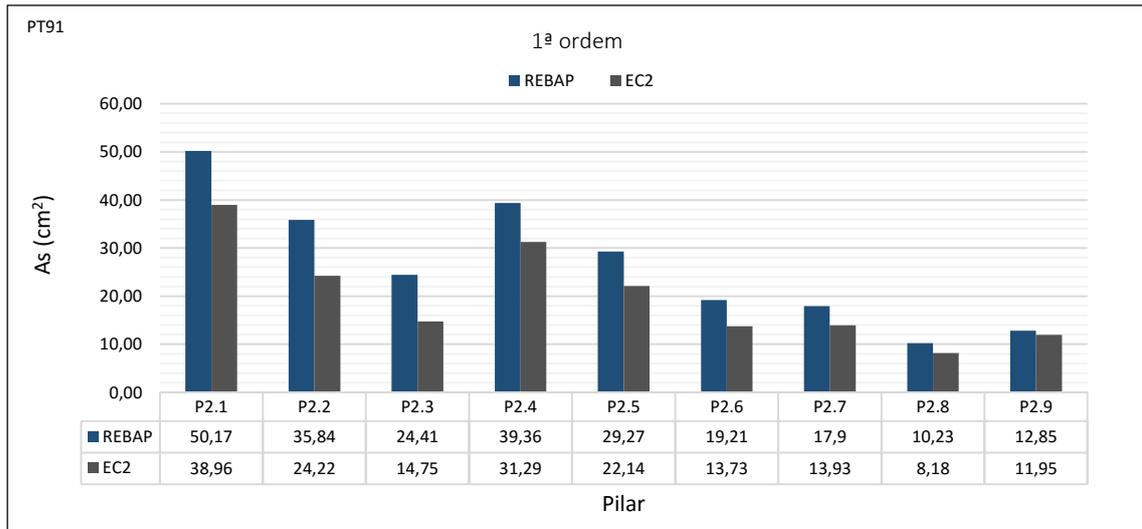


Figura 4.77 REBAP e EC2: Secções de armadura do pilar P2 de *PT91*. Efeitos de 1ª ordem

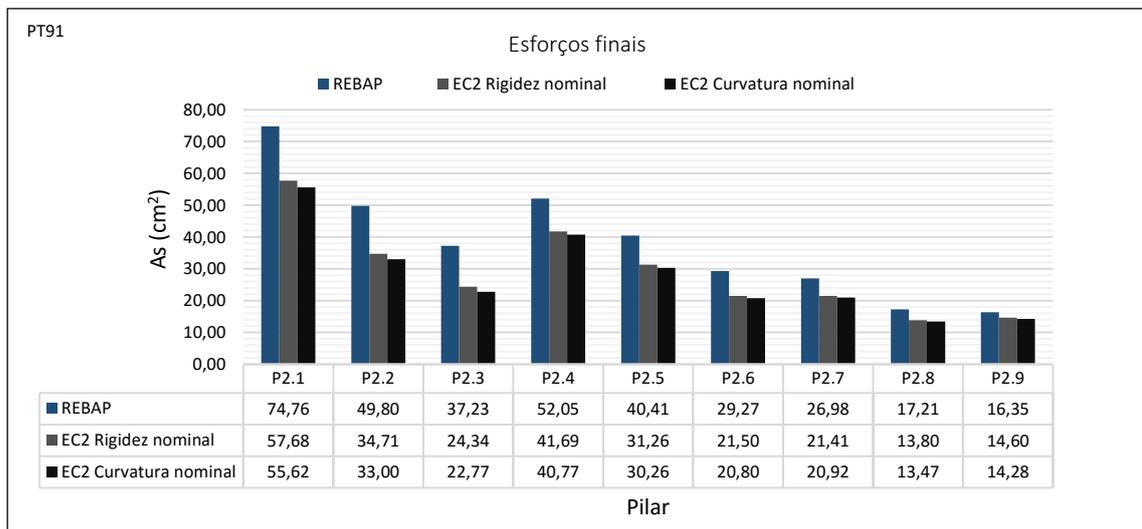


Figura 4.78 REBAP e EC2: Secções de armadura do pilar P2 de *PT91*. Esforços finais

Observando a figura 4.77 e a figura 4.78, relativa à comparação de secções de armadura, verifica-se a habitual hierarquia de resultados, ao registar sempre maior secção no caso do dimensionamento REBAP. É de notar que a secção de armadura de 1ª ordem, obtida com o EC2, ao contrário do acontecido em *PT43*, regista uma menor redução em relação ao REBAP, retomando um valor mais próximo dos outros pórticos estudados de cerca de 22,3%. Relativamente às secções de armadura dos esforços finais, encontra-se uma diferença de 22,6% do Método da Rigidez Nominal e de 25,1% do Método da Curvatura Nominal em relação ao REBAP.

#### 4.8.5 Avaliação de segurança

##### 4.8.5.1 Lei de distribuição do fator de carga de resistência – $\lambda R$

As leis de distribuição do fator de carga da resistência  $\lambda R$  foram determinadas a partir de um conjunto de 30 amostras  $A_{PT91}$ . Para gerar esse conjunto foi aplicado o Método do Hipercubo Latino.

- Método do Hipercubo Latino – MHL

Na Tabela 4.19 e na figura 4.79 estão representados os resultados obtidos com o MHL.

Tabela 4.19 Resultados das amostras da aplicação do MHL de  $PT91$

$A_{PT91}$ : Conjunto de 30 amostras								
n	$f_c$ (MPa)	$f_{sy}$ (MPa)	n	$f_c$ (MPa)	$f_{sy}$ (MPa)	n	$f_c$ (MPa)	$f_{sy}$ (MPa)
1	15,34	515,21	11	25,26	490,08	21	24,19	434,99
2	22,34	482,46	12	24,90	486,18	22	23,47	454,76
3	25,62	478,86	13	24,54	443,54	23	20,54	410,64
4	27,69	458,26	14	23,11	498,63	24	19,31	465,11
5	21,04	380,38	15	28,19	439,41	25	29,42	494,20
6	18,50	447,43	16	22,73	533,61	26	21,50	430,15
7	23,83	503,47	17	27,22	475,35	27	33,38	468,50
8	26,00	508,90	18	26,79	400,01	28	19,97	418,40
9	30,23	424,72	19	17,39	451,16	29	28,76	522,97
10	15,34	471,91	20	26,39	553,23	30	21,93	461,70

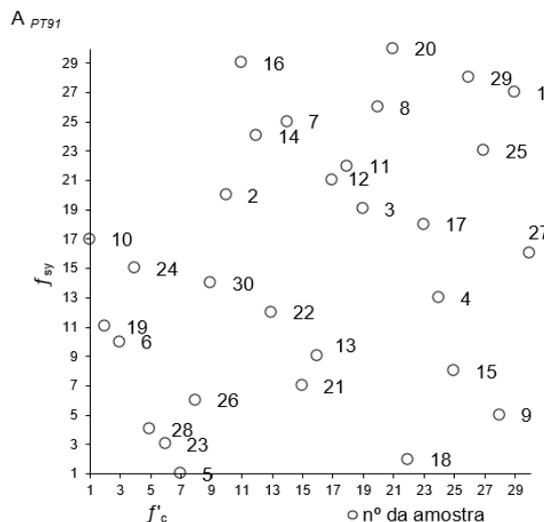


Figura 4.79 Representação gráfica dos resultados das amostras da aplicação do MHL

- Ajuste de leis de distribuição normal a  $\lambda R$  e sua validação.

Depois de geradas as 30 amostras, foi efetuado um igual número de cálculos utilizando o FEMPOR1, dos quais resultaram um conjunto de 30 resultados que permitiram definir um ajuste de uma lei de distribuição de  $\lambda R$ , e efetuar a respetiva validação da mesma. Na Tabela 4.20 são apresentados os parâmetros estatísticos das leis de distribuição obtidas para os cinco dimensionamentos analisados.

Tabela 4.20 Parâmetros estatísticos das leis de distribuição normais  $\lambda R$  de *PT91*

Dimensionamento <i>PT91</i>	Média $\lambda R$	Desvio Padrão $S_{\lambda R}$	Valor Característico $\lambda R_k$	Coefficiente de variação $CV_{\lambda R}$
REBAP 1ª Ordem	2,26	0,198	1,94	0,088
EC2 1ª Ordem	2,16	0,223	1,80	0,103
REBAP 2ª Ordem	2,33	0,199	2,01	0,085
EC2 Rigidez nominal	2,21	0,227	1,84	0,103
EC2 Curvatura nominal	2,19	0,226	1,82	0,103

A validação foi confirmada através dos resultados obtidos com a aplicação do teste de normalidade baseado nos coeficientes de assimetria e achatamento e o teste de *Kolmogorov-Smirnov*, versão proposta por Lilliefors (1967).

Tabela 4.21 Resultados do teste de normalidade de *PT91*

Dimensionamento <i>PT91</i>	Condições a verificar: $\begin{cases} \hat{\gamma}_1(n) < 1,5\sigma_{\hat{\gamma}_1(n)} \\ \left  \hat{\gamma}_2(n) + \frac{6}{n+1} \right  < 1,5\sigma_{\hat{\gamma}_2(n)} \end{cases}$	Verificação	Normalidade da distribuição
EC2 1ª ordem	$\begin{cases} 0,288 < 0,608 \text{ OK} \\ 0,403 < 1,050 \text{ OK} \end{cases}$	Ambas as condições são verificadas	Aceite
EC2 Rigidez nominal	$\begin{cases} 0,134 < 0,608 \text{ OK} \\ 0,474 < 1,050 \text{ OK} \end{cases}$	Ambas as condições são verificadas	Aceite
EC2 Curvatura nominal	$\begin{cases} 0,140 < 0,608 \text{ OK} \\ 0,465 < 1,050 \text{ OK} \end{cases}$	Ambas as condições são verificadas	Aceite

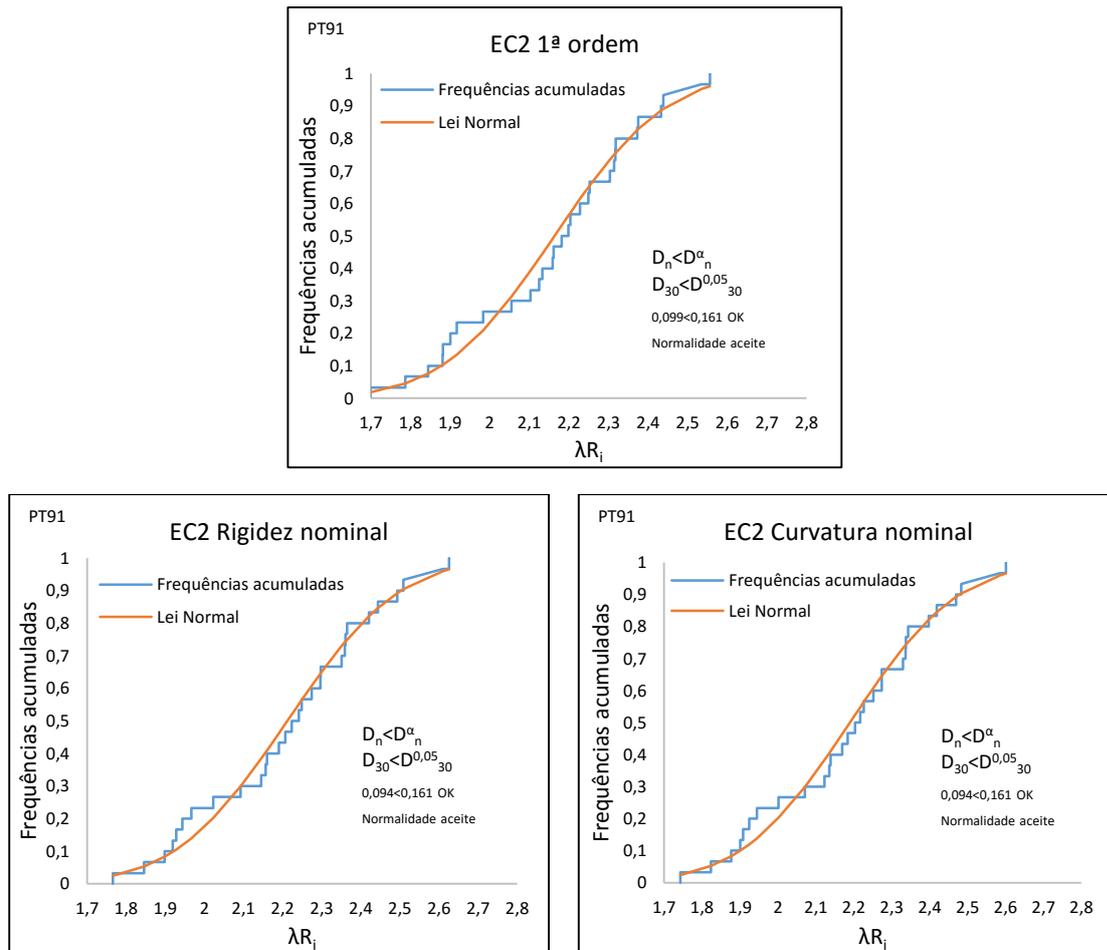


Figura 4.80 Resultados do teste de *Kolmogorov-Smirnov* de *PT91*

#### 4.8.5.2 Probabilidade de ruína e índices de fiabilidade

Definidas as leis de distribuição normais dos fatores de carga da solicitação e da resistência, é possível apresentar, agora, os índices de fiabilidade  $\beta$  e as probabilidades de ruína  $p_f$  para os cinco casos estudados de *PT91*

#### 4.8.5.2.1 REBAP e Eurocódigo2: 1ª ordem

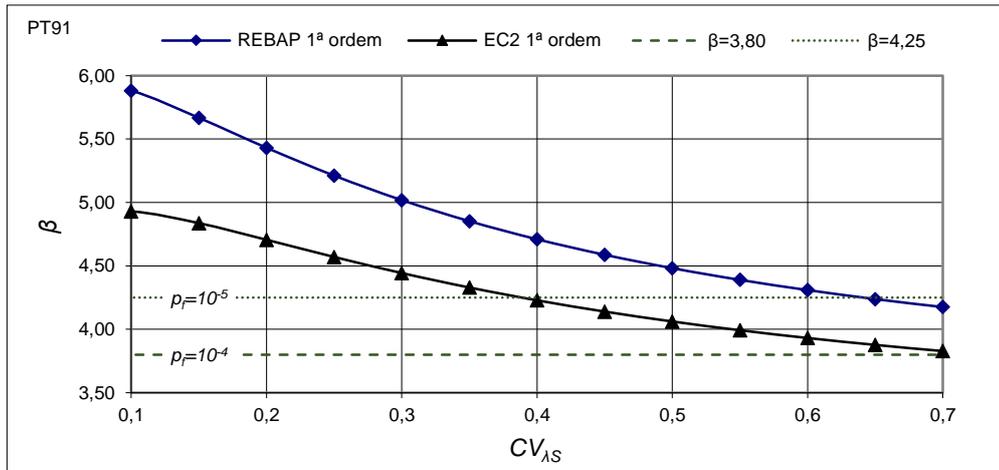


Figura 4.81 REBAP e EC2: Índice de fiabilidade  $\beta$  para os casos de 1ª ordem de *PT91*

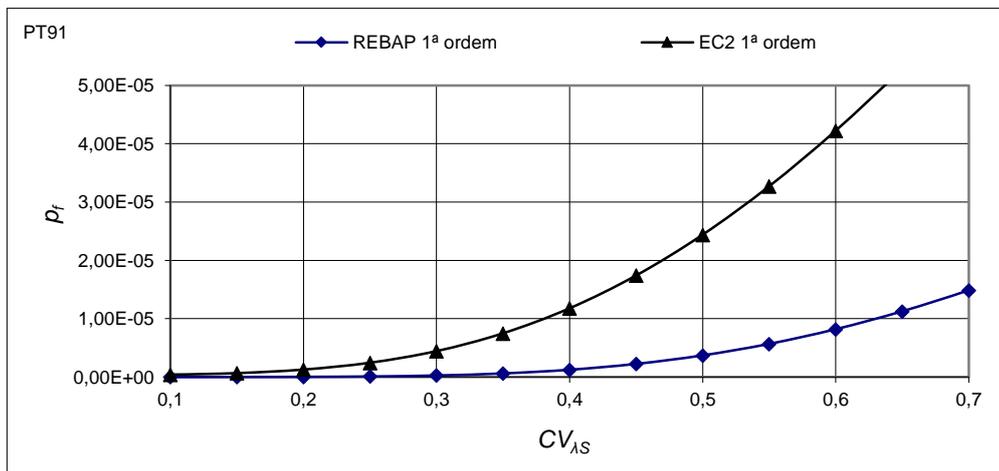


Figura 4.82 REBAP e EC2: Probabilidade de ruína  $p_f$  para os casos de 1ª ordem de *PT91*

A análise das figuras 4.81 e 4.82 permite verificar a semelhança de resultados obtidos em *PT43*, isto é, apresenta uma diferença considerável de segurança entre os dois regulamentos. O REBAP apresenta, uma vez mais, níveis de segurança bastante conservativos, por só apresentar probabilidade de ruína superior a  $10^{-5}$ , para coeficientes de variação superiores a 0,65. Os resultados obtidos para *PT91*, no dimensionamento de 1ª ordem, aplicando o EC2, registam os menores níveis de segurança encontrados, quando comparados com todos os pórticos estudados anteriormente. De facto, neste caso acabam por se atingir probabilidades de ruína superiores a  $10^{-5}$ , para coeficientes de variação superiores a 0,4, ou seja, ainda dentro da gama de valores de referência.

#### 4.8.5.2.2 REBAP e Eurocódigo2: Esforços finais

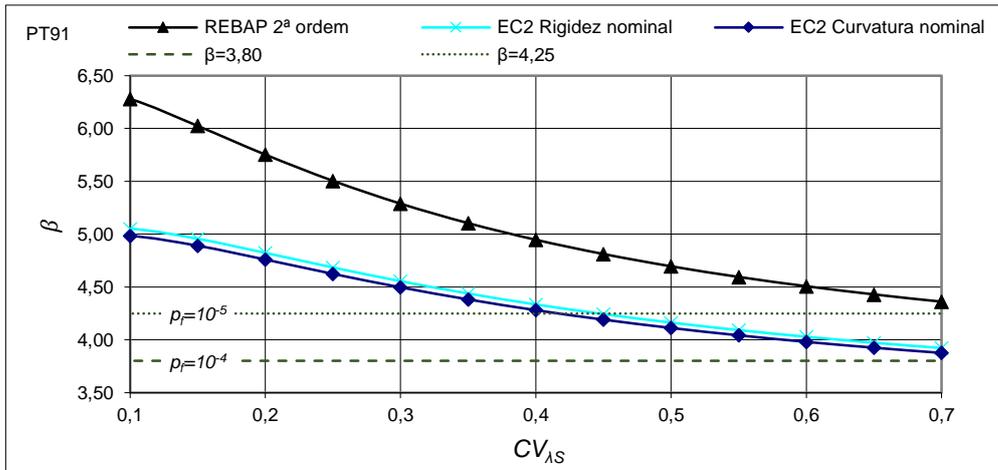


Figura 4.83 Índice de fiabilidade  $\beta$  para os casos de esforço final de *PT91*

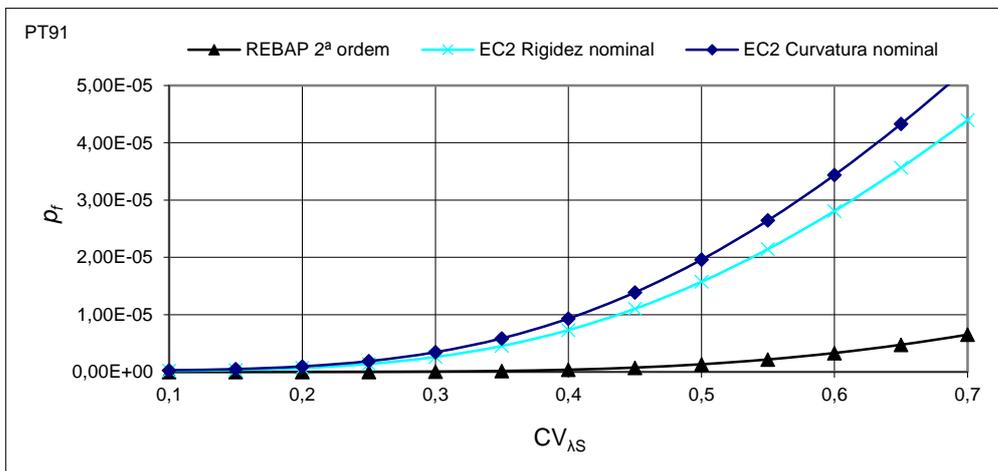


Figura 4.84 Probabilidade de ruína  $p_f$  para os casos de esforço final de *PT91*

Através das figuras 4.83 e 4.84, é possível confirmar a semelhança de resultados com o pórtico *PT43*, uma vez que o dimensionamento simplificado de 2ª ordem do regulamento REBAP não apresenta probabilidades de ruína de,  $10^{-5}$ , para a gama de valores de coeficiente de variação de referência. Relativamente aos métodos simplificados do EC2, para os coeficientes de variação da gama de valores de referência, a probabilidade de ruína atinge valores superiores a  $10^{-5}$ , para coeficientes de variação acima de 0,42 para o Método da Curvatura Nominal e de 0,45 para o Método da Rigidez Nominal.

#### 4.8.5.2.3 Eurocódigo2

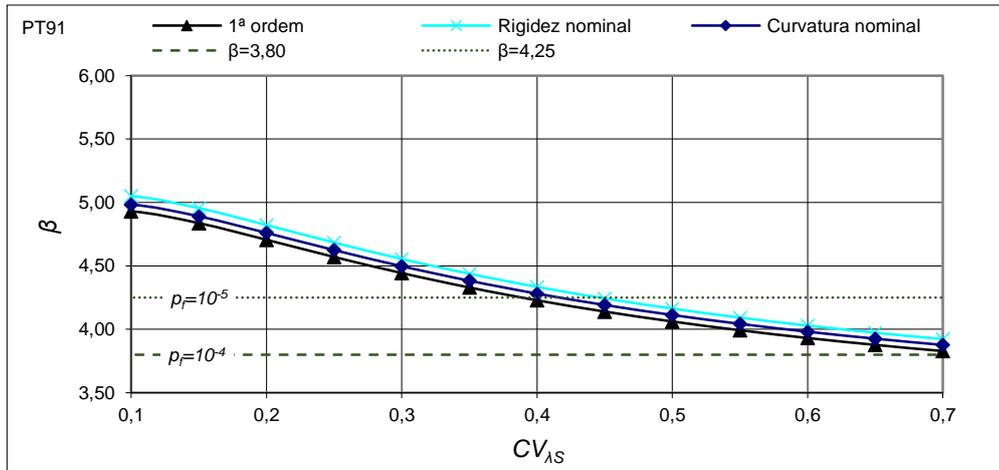


Figura 4.85 EC2: Índice de fiabilidade  $\beta$  de PT91

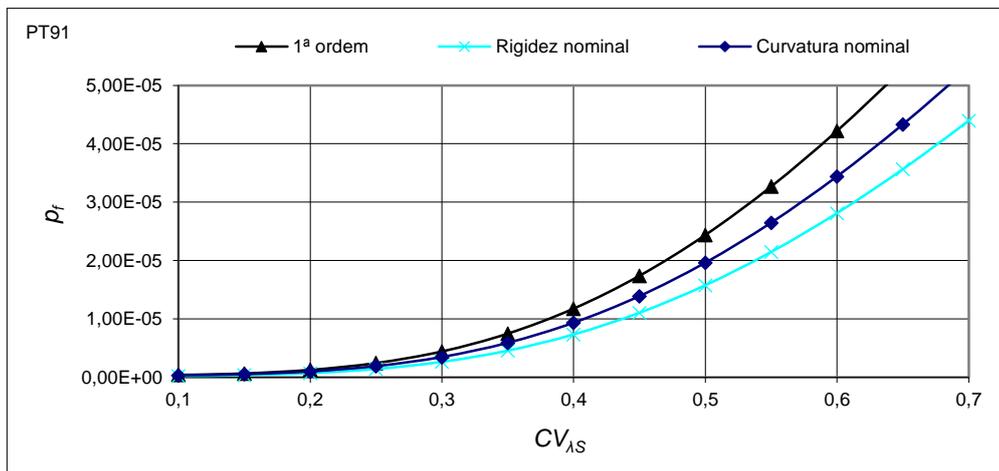


Figura 4.86 EC2: Probabilidade de ruína  $p_f$  de PT91

A análise da figura 4.85 e da figura 4.86 permite concluir que ambas as metodologias simplificadas do EC2 obtiveram resultados muito próximos aos obtidos como dimensionamento de 1ª ordem, o que permite concluir fiabilidade da aplicação destes métodos. Todavia, este pórtico apresenta-se como o pórtico com os resultados menos conservativos, por apresentar probabilidades de ruína superiores a  $10^{-5}$ , para a gama de coeficientes de variação, dentro do intervalo de referência.



## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 5.1 Conclusões

A simulação do comportamento real da estrutura relativo aos efeitos de 2ª ordem implica a utilização de métodos de análise não linear cuja aplicação envolve normalmente algumas dificuldades resultantes da sua complexidade. Para contornar esta dificuldade, o regulamento E2 em vigor apresenta métodos simplificados que podem ser utilizados para a quantificação dos efeitos de 2ª ordem, mas que por envolverem as referidas simplificações, geram dúvidas quanto à sua real eficácia na quantificação do real comportamento da estrutura, aos efeitos de 2ª ordem.

O desenvolvimento desta dissertação visou avaliar a qualidade dos resultados obtidos com a aplicação dos métodos simplificados de dimensionamento de pilares aos efeitos de 2ª ordem presentes no EC2, nomeadamente o Método da Rigidez Nominal e o Método da Curvatura Nominal. Estes dois métodos são de fácil aplicação a pilares inseridos em estruturas reticuladas, sendo o Método da Curvatura Nominal principalmente adequado para o dimensionamento de elementos efetivamente isolados. Para tal, numa primeira fase, foi realizada uma comparação entre os resultados obtidos com o REBAP e o EC2, ao nível de esforços e secções de armadura para cinco pórticos que haviam já sido estudados por Delgado (2002).

Relativamente à comparação de esforços, os resultados obtidos para os cinco pórticos, permitiu concluir que:

- a minoração das cargas permanentes de 1,5 do REBAP para 1,35 de EC2, resulta numa pequena redução dos esforços elásticos;
- o momento proveniente das imperfeições geométricas, assume valores de esforços mais conservativos no regulamento REBAP do que no EC2;
- a parcela de esforços de 2ª ordem mais elevados que se obtiveram resultaram da aplicação do Método da Rigidez Nominal, enquanto que, na generalidade dos casos, os respetivos valores mais baixos foram obtidos com a aplicação do REBAP.

Analisadas as secções de armadura obtidas com as duas regulamentações, percebe-se numa primeira fase que, nas secções de armadura resultantes dos esforços de 1ª ordem, o REBAP

não inclui os efeitos das imperfeições geométricas, remetendo-os para a análise de 2ª ordem, enquanto que o EC2 considera como efeito de 1ª ordem essas imperfeições geométricas.

Ainda assim, para as secções de armadura de 1ª ordem, o REBAP apresenta valores de armadura mais elevados, o que resulta maioritariamente da redução de 15% no valor de cálculo da tensão de rotura à compressão. Em virtude do facto mencionado anteriormente, as secções de armadura de 2ª ordem (esforço final), resultam em valores menores de armadura para o regulamento EC2.

Após a análise desses resultados e através da aplicação de uma metodologia de avaliação de segurança proposta por Delgado (2002), foi possível concluir que o dimensionamento EC2 resulta em valores menos conservativos de segurança do que o REBAP, verificando-se que frequentemente este último método, conduz a secções de armadura bastante elevadas.

Pela observação dos resultados de 1ª ordem, em que apresenta um cálculo maioritariamente elástico, os pórticos *PT41*, *PT43* e *PT91* apresentam-se como os pórticos menos seguros para o regulamento EC2, por apresentarem probabilidades de ruína superiores a  $10^{-5}$ , para valores de coeficientes de variação das ações dentro do intervalo de referência, sendo os pórticos *PT11* e *PT42* que apresentam maior segurança para os efeitos de 1ª ordem. Para o regulamento REBAP, todos os pórticos apresentam elevada segurança, por não apresentarem probabilidades de ruína de  $10^{-5}$ , para o intervalo de referência de coeficientes de variação.

Comparando os pórticos analisados, unicamente em relação ao dimensionamento EC2, apenas os pórticos *PT11* e *PT42* apresentam sempre probabilidades de ruína inferiores a  $10^{-5}$ , dentro do intervalo de referência de coeficientes de variação das ações correspondentes à gama de valores 0,2 a 0,5. Um dos aspetos mais relevantes das conclusões obtidas é o facto de existir uma grande proximidade dos níveis de segurança encontrados para o dimensionamento de 1ª ordem e o dimensionamento de 2ª ordem (esforço final). Esta proximidade permite aferir de forma positiva a qualidade de dimensionamento dos métodos simplificados de 2ª ordem do EC2, uma vez que retira a subjetividade das simplificações existentes na metodologia de avaliação de segurança, calibrando os resultados de 2ª ordem pelos resultados de 1ª ordem consensual e generalizadamente utilizados.

## 5.1 Desenvolvimentos futuros

Na sequência do trabalho realizado, pode ser complementado e enriquecido com os seguintes estudos:

- Aplicação da metodologia simplificada ANEXO H presente no EC2 e comparação para com os resultados obtidos neste trabalho.
- Quantificação das rigidezes relativas à rotação dos nós pelo método descrito na regulamentação EC2.



## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Appleton, J. (2013). Análise estrutural. Appleton, J. *Estruturas de Betão*. Amadora, Edições Orion. cap. 5, p. 247-311
- Calgaro, J.A. (1996). *Introducion aux Eurocodes. Sécurité des constructions et bases de la théorie de la fiabilité*. Presses de L'école Nationale des Ponts e Chaussées, Paris.
- Carvalho, L.F. (2008). *Avaliação da segurança de estruturas de betão armado, incluindo efeitos de 2ª ordem, dimensionadas de acordo com EC2*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Delgado, J.M. (2002). *Avaliação de segurança de estruturas reticuladas com comportamento não linear material e geométrico* – Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto;
- *Estruturas de betão I*. (2012/2013). Lisboa. Verificação da segurança aos estados limites últimos de elementos com esforço axial não desprezável
- Eurocódigo 2 – Projeto de estruturas de betão – Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios – NP EN 1992-1-1:2010.
- Jacinto, L. (2013). Pilares. Jacinto, L. *Betão Estrutural I*, Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, Lisboa. Cap. 7, p. 1-39.
- Lúcio, Válter. (2006).  
[http://www2.dec.fct.unl.pt/seccoes/S\\_Estruturas/Betao\\_armado\\_I/downloads/12Encurva\\_duraprint.pdf](http://www2.dec.fct.unl.pt/seccoes/S_Estruturas/Betao_armado_I/downloads/12Encurva_duraprint.pdf). [Consultado em 14-10-2015]
- REBAP, *Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado (1985)* – Decreto-Lei nº 275/85, Imprensa Nacional da Casa da Moeda, Lisboa.
- Terra, N.M.S. (2008). *Análise das metodologias de avaliação dos efeitos de 2ª ordem previstas no Eurocódigo2*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Tiago de Oliveira, J. (1989). Probabilidades e estatística. Conceitos, métodos e aplicações, Vol. I., McGraw-Hill, Lisboa.
- Vinagre, J. Bartolo, A. e Camara, J. (1994). Avaliação e discussão dos efeitos de 2ª ordem em edifícios.
- Vinagre, J. e Camara, J. (1998). Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas, Lisboa.