INSTITUTO POLITÉCNICO
DE VIANA DO CASTELO

RELATÓRIO FINAL DE PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA

Mestrado em Ensino 1º e 2º CEB - Matemática e Ciências Naturais

As resoluções visuais de problemas com frações em diferentes contextos e com diferentes conexões numa turma do 6º ano de escolaridade

Andreia Filipa Araújo da Silva

Escola Superior de Educação

2021

INSTITUTO POLITÉCNICO
DE VIANA DO CASTELO

Andreia Filipa Araújo da Silva

RELATÓRIO FINAL DE PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA

Mestrado em Ensino 1º e 2º CEB
- Matemática e Ciências Naturais

As resoluções visuais de problemas com frações em diferentes contextos e com diferentes conexões numa turma do 6º ano de escolaridade

Trabalho efetuado sob a orientação do(a)
Professora Doutora Maria Isabel Piteira do Vale

Março de 2021

AGRADECIMENTOS

Ao longo desta caminhada pude contar com o apoio de várias pessoas, que me ajudaram a crescer a vários níveis e que me deram a mão nos momentos em que mais precisei. Como tal, quero aqui deixar o meu sincero agradecimento.

À minha família, pais e irmão, por serem os pilares da minha vida e por me terem incentivado e ajudado a concretizar este sonho, assim como tantos outros.

À minha orientadora, Professora Doutora Isabel Vale, pela partilha de conhecimentos, pela ajuda, pela atenção e pelo carinho.

Aos docentes da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, pela disponibilidade, ajuda e carinho.

Aos Professores Cooperantes, em especial ao Professor Rui e aos alunos com quem tive a oportunidade de partilhar momentos incríveis, contribuindo para a minha formação de forma tão significativa.

Às minhas amigas, Rute, Filipa e Andreia, que sempre me acompanharam em todos os momentos e com quem vivi as melhores experiências. À Filipa um especial agradecimento pelo companheirismo e por ter sido a melhor parceira que poderia ter.

A todos os meus colegas de licenciatura e mestrado, em especial à Anabela e ao Antony, pela amizade e companheirismo.

Aos meus amigos da Póvoa de Varzim por me terem acompanhado ao longo de vários anos e por me terem dado força nos momentos mais difíceis do meu percurso.

Às minhas colegas e amigas de trabalho por me escutarem e me darem força.

A todas as pessoas com quem tive a oportunidade de me cruzar ao longo deste percurso, em especial à minha madrinha Joana Giestas por me ter acolhido tão bem desde o princípio.

À cidade de Viana do Castelo que se tornou a minha 2ª casa e que me viu crescer ao longo deste tão espetacular percurso.

RESUMO

O presente relatório integra um estudo que seria realizado no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada (PES) com uma turma do 6º ano de escolaridade. O estudo seria focado num tema fundamental do currículo de Matemática – Números Racionais – e numa das suas capacidades transversais fundamentais – Resolução de Problemas. Salienta-se que este estudo foi interrompido, não tendo sido realizado pelo facto de ter surgido uma pandemia causada pela COVID-19 que levou ao encerramento das escolas a partir de março de 2020. Apesar desta limitação, todo o estudo foi devidamente planeado a nível da metodologia e dos procedimentos a desenvolver.

De facto, os Números Racionais são destacados pela sua importância, mas também pela sua complexidade devido às suas diferentes representações e significados. É nesse sentido que surgem as dificuldades no seu ensino e aprendizagem, tornando-se, assim, importante que os alunos desenvolvam, em paralelo com a aquisição de conhecimentos sobre os números racionais, a capacidade de Resolução de Problemas. Esses conhecimentos podem tornar-se mais compreensivos e duradouros se se estabelecerem conexões não só dentro da própria matemática, mas também, em particular, com a Arte e a vida real. Assim, neste estudo pretendia-se compreender o desempenho dos alunos na resolução de problemas com números racionais positivos sob a forma de fração onde se privilegiam as representações visuais e onde os contextos das diferentes tarefas privilegiam as conexões dentro e fora da matemática. Neste sentido, foram formuladas três questões orientadoras para este estudo: Q1) Como se pode caracterizar o desempenho dos alunos na resolução de problemas que envolvem números racionais positivos sob a forma de fração pelos diferentes contextos apresentados e conexões que suscitam? Q2) Que estratégias de resolução de problemas são privilegiadas pelos alunos na resolução dos problemas propostos? Q3) Como se podem caracterizar as principais dificuldades dos alunos na resolução dos problemas propostos?

Para o estudo iria adotar-se uma metodologia de natureza qualitativa de caráter interpretativo e exploratório, em que os dados iriam surgir a partir de observações, questionários, entrevistas/ conversas e documentos, em particular das produções escritas pelos alunos na resolução das tarefas propostas.

Como o estudo não foi colocado em prática, não foi possível a recolha de dados, pelo que não se conseguiu retirar conclusões com este estudo. Contudo, na descrição da intervenção didática e ao longo da descrição das diferentes tarefas propostas procura-se descrever as expectativas esperadas baseadas em referências teóricas e empíricas, para além de uma reflexão pessoal.

Palavras-Chave: Números Racionais; Frações; Resolução de Problemas; Estratégias visuais; Conexões.

ABSTRACT

This report is part of a study that would be carried out under the Supervised Teaching Practice (PES) with a class of the 6th grade of schooling. The study would be focused on a fundamental theme of the Mathematics curriculum - Rational Numbers - and in one of its fundamental transversal skills - Problem Solving. It should be noted that this study was interrupted and was not carried out due to the fact that a pandemic caused by COVID-19, which led to the closure of schools since March 2020. Despite this limitation, the entire study was properly planned including methodology and procedures to be developed.

In fact, Rational Numbers are highlighted for their importance, but also for their complexity due to their different representations and meanings. It is in this sense that difficulties arise in its teaching and learning, thus making it important for students to develop, in parallel with the acquisition of knowledge about rational numbers, the ability to solve problems. This knowledge can become more comprehensive and lasting if connections are established not only within mathematics itself, but also, in particular, with Art and real life. Thus, this study aimed to understand the performance of students in solving problems with positive rational numbers in the form of a fraction where visual representations are privileged and where the contexts of different tasks privilege connections inside and outside mathematics. In this sense, three guiding questions were formulated for this study: Q1) How can we characterized the students' performance in solving problems with positive rational numbers in the form of a fraction by the different contexts and connections they raise? Q2) What problem solving strategies are favored by students in solving the proposed problems? Q3) How can we characterize the main difficulties of students in solving the proposed problems?

For the study, a qualitative methodology with interpretative and exploratory nature in which the data would emerge from observations, questionnaires, interviews / conversations and documents, in particular from the productions written by the students to the proposed tasks.

As the study was not put into practice, it was not possible to collect data, therefore it was not possible to draw conclusions with this study. However, in the description of the didactic intervention and throughout the description of the different tasks proposed, we try to describe the expected expectations based on theoretical and empirical references, in addition to a personal reflection.

Key words: Rational Numbers; Fractions; Problem solving; Visual Strategies; Connections.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS

AAAF - Atividades de Animação e de Apoio à Família

AEC - Atividades de Enriquecimento Curricular

APM – Associação de Professores de Matemática

CEB – Ciclo do Ensino Básico

DGE – Direção Geral de Educação

EPE – Educação Pré-Escolar

ESE – Escola Superior de Educação

ICE – Intervenção em Contexto Educativo

INE – Instituto Nacional de Estatística

IPVC – Instituto Politécnico de Viana do Castelo

ME – Ministério da Educação

MEC – Ministério da Educação e Ciência

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics

NEE – Necessidades Educativas Especiais

PES – Prática de Ensino Supervisionada

INTRODUÇÃO

Este relatório enquadra-se no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada (PES), unidade curricular pertencente ao segundo ano de Mestrado em Ensino do 1º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2º Ciclo do Ensino Básico, na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

O formato deste relatório é um pouco diferente daquilo que seria esperado, uma vez que o estudo ficou interrompido devido à pandemia provocada pela COVID-19, o que levou a que se fizessem algumas alterações. A grande diferença deste relatório comparativamente aos relatórios de anos anteriores, relaciona-se com o facto de não ter sido possível implementar o estudo, uma vez que as escolas foram encerradas antes do início da intervenção educativa no 2º Ciclo do Ensino Básico (2ºCEB).

No que diz respeito à organização do relatório, encontra-se dividido em três partes fundamentais. A primeira parte é referente à PES nos dois ciclos, encontrando-se, assim, dividido em dois capítulos. No primeiro capítulo é feita uma pequena introdução, uma caracterização do contexto educativo do 1º CEB e uma descrição do percurso da intervenção educativa realizado e, no segundo capítulo, são abordados os mesmos tópicos, mas, desta vez, referentes ao contexto e intervenção educativa no 2º CEB.

Seguidamente, a segunda parte do relatório é referente ao trabalho de investigação e ao modo como o estudo iria ser desenvolvido com o qual se pretendia compreender o desempenho dos alunos na resolução de problemas com números racionais positivos sob a forma de fração onde se privilegiam as representações visuais e onde os contextos das diferentes tarefas privilegiam as conexões dentro e fora da matemática. Assim, esta parte encontra-se dividida em cinco capítulos, sendo que, no primeiro é feita uma introdução, onde é indicada a pertinência do estudo, o problema e as questões do mesmo. No segundo é feita uma fundamentação a nível teórico sobre os temas relevantes que enquadram este estudo. Já no terceiro capítulo, faz-se uma apresentação das opções metodológicas que seriam tomadas, dos participantes e dos procedimentos que seriam realizados, das técnicas de recolha e análise de dados que seriam utilizadas. No quarto capítulo faz-se uma descrição de como seria a intervenção didática, nomeadamente referindo-se como seria a dinâmica das aulas e as expectativas relativamente aos alunos durante a resolução dos problemas com números racionais positivos. Por fim, no quinto capítulo apresentam-se as principais conclusões que poderiam ser retiradas do estudo, tendo em conta estudos já realizados sobre os mesmos temas, assim como algumas limitações e recomendações para futuros estudos.

A terceira e última parte do relatório é referente à reflexão de toda a Prática de Ensino Supervisionada, na qual se reflete sobre as experiências vividas em cada um dos contextos e sobre os seus contributos para a formação profissional e pessoal.

PARTE I – ENQUADRAMENTO DA PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA

A primeira parte do presente relatório destina-se à apresentação de alguns aspetos referentes à Prática de Ensino Supervisionada. Encontra-se dividida em dois capítulos, um referente à intervenção em contexto educativo I (1º Ciclo) e outro à intervenção em contexto educativo II (2º Ciclo). Em ambos se faz uma pequena introdução, uma caracterização do contexto e se descreve o percurso da intervenção educativa.

CAPÍTULO I- INTERVENÇÃO EM CONTEXTO EDUCATIVO I - 1ºCiclo

Neste capítulo apresenta-se uma breve introdução relativa à organização da Prática de Ensino Supervisionada (PES), à caracterização do contexto educativo, ao percurso da intervenção educativa e ao envolvimento na comunidade educativa. A caracterização do contexto encontra-se subdividida em quatro partes: uma referente à caracterização do meio; outra referente à caracterização do estabelecimento de ensino; ainda outra referente à caracterização da sala; e, por fim, outra referente à caracterização da turma.

1. Introdução

A organização da PES foi apresentada em reunião com todos os mestrandos pelas Coordenadoras, na qual foi conhecida a distribuição dos pares pedagógicos por algumas das escolas pertencentes ao concelho de Viana de Castelo. Estes pares pedagógicos foram escolhidos previamente pelos estudantes. Neste sentido, tive a oportunidade de vivenciar esta experiência com a Ana Filipa.

Após esta informação, acrescentou-se que o estágio iria decorrer desde o início do mês de outubro até ao final do mês de janeiro, ao longo de quinze semanas, das quais três seriam de observação e as restantes doze seriam de regência. Ao longo das semanas de observação foi dada a oportunidade ao par pedagógico de se familiarizar com a turma, o Professor Cooperantes e o estabelecimento de ensino, conhecer os alunos, bem como as suas rotinas. Estas semanas foram cruciais para que a preparação das aulas para regência fosse de encontro com as aulas observadas, sendo sempre prioridade respeitar o que nos era proposto pelo Professor Cooperante. Relativamente às doze semanas seguintes, foi dada a oportunidade ao par pedagógico de intercalar as semanas de regência. Assim, um dos elementos do par implementou cinco vezes de segunda a quarta feiras e uma vez de segunda a sexta feiras, acontecendo o mesmo com o outro elemento do par pedagógico.

Em cada uma das semanas, o Professor Cooperante fornecia os conteúdos que queria que fossem abordados. Depois, o par pedagógico realizava uma planificação com atividades que abordassem esses mesmos conteúdos e, na semana seguinte, essa mesma planificação era corrigida pelo Professor Cooperante e pelo(s) professor(es) supervisor(es) da Escola Superior de Educação (ESE).

2. Caracterização do Contexto Educativo

Caracterização do Meio

O contexto educativo a ser caracterizado localiza-se no concelho de Viana do Castelo, que, segundo a Câmara Municipal, é a cidade atlântica mais ao norte de Portugal. Estende-se por uma área de 314 km^2 e possui 88725 habitantes (INE, 2011). Este concelho é composto por 27 freguesias, estando o contexto educativo localizado numa delas.

Assim sendo, a freguesia em questão possui 2930 habitantes (INE, 2011) e 7,64 km^2 de área. Para além de ser atrativa pelo facto de possuir rio, mar e monte, também o é pelo facto de possuir um vasto património histórico e cultural. Relativamente ao património histórico, é possível, atualmente, verificar vestígios de uma cultura denominada "castreja" que nos remete para um determinado período histórico. Já no que se refere ao património cultural, nesta freguesia realizam-se três momentos festivos: um no final do mês de julho, outro no segundo domingo de agosto e o último no final do mesmo mês. No que diz respeito às atividades económicas da freguesia, destacam-se a agricultura, a pesca, a construção civil, o pequeno comércio e a indústria.

Caracterização do Estabelecimento de Ensino

De acordo com o Projeto Educativo em vigor (2018-2022), o Agrupamento de Escolas que integra a escola onde decorreu o estágio foi constituído em 2013 e estende-se por dez freguesias do concelho de Viana do Castelo, abrangendo cerca de 72 km^2. Ao longo de toda esta área, verifica-se que o "meio envolvente é predominantemente rural/piscatório e, em menor área, urbano, existindo também zonas comerciais e industriais" (p.6).

Ainda de acordo com o Projeto Educativo, este Agrupamento é composto por catorze estabelecimentos de ensino, integrando estabelecimentos com apenas um nível de ensino e outros que abrangem três níveis. No global, o Agrupamento é constituído por nove Jardins de Infância, doze Escolas Básicas do 1º CEB, duas de Ensino Básico de 2º e 3º Ciclos e a Escola-sede que inclui Ensino Secundário (p.6), acolhendo, no total, 2118 alunos. Destes, 41,4% beneficia da Ação Social Escolar com escalão A ou B (p.8).

Relativamente à população docente e não docente, ainda segundo documento supracitado, o Agrupamento totaliza 233 Docentes, 160 Assistentes Operacionais, 3 Técnicas contratadas no âmbito do projeto TEIP, 1 Técnica de Intervenção Local, 1 Psicóloga e 25 Técnicos das Atividades de Enriquecimento Curricular (AEC) (p.8).

De um modo geral, no que se refere ao absentismo, abandono e indisciplina, verifica-se que existem duas Escolas do Agrupamento em que, no 1º Ciclo, se registam situações de indisciplina e absentismo. Já nos 2º e 3º Ciclos, existe uma escola onde se registam as três situações (abandono, absentismo e indisciplina). Apesar destas situações, e, com base no relatório de autoavaliação do Agrupamento, verifica-se uma melhoria nos resultados dos 1º, 2º e 3º Ciclos, comparativamente com anos letivos anteriores (p.9).

Em relação à escola onde foi desenvolvida a PES, pode verificar-se pelo documento mencionado anteriormente que compreende um total de 339 alunos, dos quais 24 frequentam a Educação Pré-Escolar (EPE), 91 frequentam o 1º Ciclo, 73 frequentam o 2º Ciclo e 151 frequentam o 3º Ciclo (p.7).

No que se refere ao espaço físico da escola, inclui-se o edifício central, o campo de jogos, o pavilhão gimnodesportivo e o parque infantil. O último é destinado aos alunos que frequentam a EPE e o 1º Ciclo. Já os restantes espaços mencionados são destinados a todos os alunos da escola. Assim sendo, o campo de jogos e o pavilhão gimnodesportivo estão organizados por horários para que todas as turmas da escola consigam usufruir do espaço. Por fim, o edifício central dispõe de dois pisos: o piso inferior e o piso superior. Uma parte do piso inferior, é destinada à EPE e ao 1º Ciclo, contando com uma sala para a EPE, cinco salas para o 1º Ciclo (uma para a turma do 1º ano, uma para a turma do 2º e 4º anos, uma para a turma do 3º ano, uma para a turma do 4º ano e, por fim, uma destinada a reuniões e aulas de apoio), duas casas de banho destinadas a esses alunos e uma arrecadação. Ainda no mesmo piso encontra-se a sala destinada aos professores, a cantina, o bar, a sala de convívio dos alunos, a associação de estudantes, quatro casas de banho, a reprografia, uma sala destinada ao pessoal não docente, uma sala para as Atividades de Animação e de Apoio à Família (AAAF) e uma sala de receção/ secretaria. Já no piso superior encontra-se a biblioteca e as salas destinadas aos alunos dos 2º e 3º Ciclos, das quais se encontram salas específicas, como laboratórios, sala de multimédia, sala de Educação Musical, sala de Educação Tecnológica e uma sala grande para reuniões.

De salientar, ainda, que a escola possui uma série de recursos de apoio à atividade educativa nas diversas áreas. Destacam-se os computadores, quadros interativos, projetores, livros, mapas, ábacos, sólidos geométricos, instrumentos de medida, entre muitos outros. Também no pavilhão gimnodesportivo desta escola se encontra uma diversidade de materiais que promovem o desenvolvimento de diversas capacidades.

Caracterização da Sala

A sala onde decorreu a PES é relativamente grande e bem iluminada pela luz natural, contemplando quatro janelas. Esta sala possui, também, doze mesas grandes (dois alunos), uma mesa pequena (um aluno), uma secretária para o professor, dois aquecedores, duas bancas, cabides, um quadro de giz, um quadro de marcadores, uma placa de cortiça, um computador com colunas, um projetor, um quadro interativo com projetor e dois armários grandes. Estes armários são utilizados para guardar material escolar dos alunos (réguas, esquadros, compassos e colas), para guardar os seus livros e cadernos da escola e também para guardar as suas capas onde são colocadas fichas de trabalho. De realçar o facto de os alunos poderem guardar o material nesses armários, uma vez que lhes permite andar com a mochila mais leve.

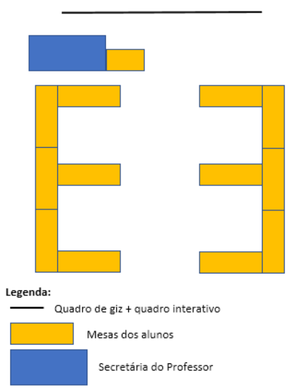


Figura 1: Disposição das mesas na sala de aula

No que se refere à disposição das mesas, durante a maior parte do tempo, estiveram organizadas de uma forma que se aproxima tanto da disposição em U como disposição em asa, tal como ilustra a figura.

Esta organização aproxima-se da disposição em asa, uma vez que, segundo Teixeira e Reis (2012), é flexível e permite alternar entre uma aula de instrução direta e uma aula de aprendizagem cooperativa (p. 174). Por outro lado, partindo do que referem os mesmos autores, também se aproxima da disposição em U, na medida em que "atribui um lugar de destaque ao professor, permitindo-lhe liberdade de movimento, dando-lhe acesso rápido ao quadro e possibilitando a sua entrada dentro do U sempre que necessite de estabelecer contato mais próximo com algum aluno” (p. 176).

Caracterização da Turma

A turma onde se desenvolveu esta primeira etapa da PES frequentava o 4º ano de escolaridade e era constituída por vinte e um alunos, dos quais treze do sexo feminino e oito do sexo masculino. Um dos alunos estava sinalizado com Necessidades Educativas Especiais (NEE), sendo que, algumas vezes por semana, era acompanhado individualmente por uma professora do apoio. Para além deste aluno, um outro tinha o mesmo acompanhamento por parte da professora do apoio, uma vez que apresentava grandes dificuldades na aprendizagem. Relativamente aos restantes elementos da turma, verificaram-se diferentes níveis e ritmos de aprendizagem nas diversas áreas do currículo. Isto era muito notório quando se apresentavam algumas tarefas em que um grupo de alunos as resolviam rápida e autonomamente, enquanto outros resolviam de uma forma mais lenta e com necessidade de ajuda.

No que se refere às diferentes áreas do currículo, era claramente visível a preferência dos alunos pela área do Estudo do Meio e Expressões, sendo a área da Matemática aquela que os alunos demonstraram menos preferência.

No geral, a turma revelava algumas dificuldades em manter a atenção e concentração, sendo também bastante faladora e irrequieta. Apesar disso, os alunos sempre se mostraram muito participativos, empenhados e curiosos, particularmente em assuntos relacionados com a área de Estudo do Meio.

Como os alunos guardavam o material nos armários da sala, no início de cada semana era selecionado, pelo Professor Cooperante, um grupo de alunos que ficaria responsável pela distribuição e recolha dos materiais e pela distribuição do leite.

No que concerne à atividade letiva da turma, iniciava-se, todos os dias, às 9h15m e terminava às 16h. À quarta e sexta feiras, o horário da turma prolongava-se, devido à aula de Inglês, lecionada por uma professora externa. Deste modo, era respeitada a carga horária proposta pelo Ministério da Educação e Ciência. Para além desta carga horária, a maioria dos alunos frequentava as Atividades de Enriquecimento Curricular (AEC).

3. Percurso da Intervenção Educativa

Como já foi mencionado, no início da PES foi dada a oportunidade ao par pedagógico de observar a turma durante três semanas. Estas semanas permitiram, para além do que já foi referido anteriormente, identificar as áreas onde os alunos apresentam mais dificuldade ou mais facilidade e conhecer o modo de trabalho da turma em cada uma das áreas curriculares. Depois, e partindo de tudo aquilo que foi observado, foi chegado o momento de preparar as implementações. Neste sentido, foi necessária uma preparação de aulas de diferentes áreas curriculares, com maior ênfase na Matemática e no Português por possuírem uma carga horária maior.

No seguimento, serão relatadas as experiências vividas em cada uma das diferentes áreas curriculares.

Matemática

Na área da matemática, foram trabalhados conteúdos relacionados com diferentes domínios desta mesma área, ora como introdução, ora como revisão. Dos conteúdos introduzidos destacam-se: o ângulo (conceito e classificação); simplificação, adição, subtração, multiplicação e divisão de números racionais não negativos; frequência relativa (na forma de fração); gráficos circulares; e decimais (frações decimais, adição, subtração e ordenação na forma de fração decimal e dízima e sua representação na reta numérica). Já no que se refere aos conteúdos que foram revistos destacam-se as tabelas de frequências absolutas, os gráficos (barras, pontos e pictogramas), a moda, as retas (paralelas, concorrentes e perpendiculares) e os números decimais (parte inteira e parte decimal do número na forma de dízima).

Partindo do pressuposto de que "os novos conhecimentos operam conexões mentais, podendo levar a transformações que se entendem como um processo de desenvolvimento de estruturas significativas, que originam a aprendizagem dita significativa." (Ujiie, Brum, Pinheiro, Ciappina, & Silva, 2017), ao longo das doze semanas de regência procurou-se trabalhar sempre nesse sentido. Para além de se ter a consciência da importância de se partir das ideias prévias dos alunos, também se torna importante para que os alunos ganhem gosto pela matemática.

Efetivamente, como desde o início a maioria dos alunos da turma demonstrou menos preferência por esta área, procurou-se, também, recorrer a diferentes tipologias de tarefas, numa tentativa de aproximar os alunos à matemática. Assim, e, segundo a classificação proposta por Ponte (2005) recorreu-se a problemas, exercícios e investigações, que se distinguem pelo grau de desafio (reduzido/ elevado) e pelo grau de estrutura (aberto/ fechado). Assim, e ainda segundo o mesmo autor, tem-se o exercício como uma tarefa fechada de desafio reduzido, o problema como uma tarefa fechada e de desafio elevado e a investigação como uma tarefa aberta e de desafio elevado. Ora, os exercícios foram um tipo de tarefa muito usual ao longo da PES, uma vez que se recorria a este tipo de tarefa, particularmente, para consolidação de conteúdos. Um exemplo onde foi muito recorrente a sua utilização foi aquando da realização de tarefas do manual ou fichas de trabalho, onde o intuito era sempre o mesmo, o de consolidar a matéria, fazendo com que os alunos a praticassem. Por outro lado, os problemas foram o tipo de tarefa mais utilizado a seguir aos exercícios, contudo, desta vez, o intuito da sua utilização não era a consolidação, mas sim a introdução de novos conteúdos. Um exemplo onde se recorreu a este tipo de tarefa foi aquando da introdução das operações dos números racionais não negativos. Por fim, a investigação foi um tipo de tarefa proposta apenas uma vez, aquando da realização de uma Gallery Walk. De acordo com Vale e Barbosa (2018), esta estratégia de ensino e aprendizagem permite que os alunos, de forma individual ou em grupo, tenham a oportunidade de apresentar a resolução de uma tarefa, expondo-a em posters em torno da sala. Após isso, todos os alunos observam os trabalhos de forma a formularem questões e/ ou comentários que servirão para os autores dos trabalhos refletirem, sendo promovida, posteriormente, uma discussão coletiva de forma a esclarecer alguns aspetos do trabalho. Assim, para a realização desta tarefa, os alunos tiveram de investigar, em grupo, o número de letras do primeiro nome dos alunos da turma e organizar os dados. Foram notórios a motivação e o empenho dos alunos na realização desta tarefa, o que leva a concluir que os alunos gostam de serem desafiados. De realçar, ainda, o jogo como um outro tipo de tarefa utilizada. A sua utilização foi feita através de uma apropriação do “Jogo da Glória” e do

“Quem quer ser milionário”. Apesar de terem sido utilizados como forma de consolidação, a motivação dos alunos foi muito evidente, o que não seria esperado se as questões estivessem no formato de ficha de trabalho.

No mesmo sentido, foi tido em consideração um outro aspeto na tentativa de melhorar a relação da turma com a matemática. Assim, tentou-se diversificar as dimensões contextuais das tarefas. De acordo com o autor supracitado, estas podem surgir num contexto de realidade, matemática pura ou semi-realidade. Tendo por base o propósito acima referido, as tarefas foram inseridas num contexto de realidade e semi-realidade dos alunos, para que a aprendizagem se tornasse mais significativa. São exemplos desses contextos, a utilização de problemas envolvendo pizas e bombons.

Um outro aspeto a salientar é o facto de se ter tentado, sempre que possível, utilizar materiais para que os alunos pudessem manipular. Efetivamente, ao longo do tempo vários autores realçaram a importância da utilização de materiais manipuláveis no ensino e aprendizagem da matemática, uma vez que é através dos objetos concretos que se progride para o abstrato. Apesar de, ao longo do tempo, terem surgido diferentes definições de material manipulável, todas apontam para o facto de ser algo em que o aluno pode tocar, sentir, mover e manipular (Vale, 2002). Contudo, é de realçar que “mais importante que o material a utilizar é a experiência vivida pelos alunos visto que só ocorre aprendizagem se essa experiência for significativa.” (Vale, 2002, p. 17). Neste sentido, aquando, por exemplo, da lecionação dos conteúdos relacionados com os números racionais não negativos, procurou-se fornecer aos alunos materiais manipuláveis, pela particular abstração do tema e para que, assim, ao contactar com os materiais, se tornasse um pouco menos abstrato. Na aula de final de período, foi dada a oportunidade à turma de explorar diferentes materiais como tangram, mira, polydron, blocos lógicos, dominó matemático e poliedros regulares. Os alunos demonstraram bastante interesse e motivação na descoberta e exploração destes materiais, tendo-se, assim, fomentado o gosto pela matemática.

Por tudo aquilo que já foi referido anteriormente, foi um desafio enorme a preparação das aulas desta área, nomeadamente pela complexidade/ abstração dos conteúdos para os alunos da faixa etária onde se desenvolveu a PES. Contudo, é através dos desafios que nos superamos e que percebemos quais as nossas limitações e facilidades. Assim sendo, as dificuldades surgiram aquando da preparação de tarefas que cumprissem com tudo aquilo que foi referido. Tendo sido um aspeto sempre discutido e superado pelo par pedagógico.

Os alunos, desde o início, demonstraram dificuldades em apresentar as suas dúvidas, ou seja, não conseguiam matematicamente explicar o seu raciocínio. Neste sentido, tentou-se trabalhar a comunicação e o raciocínio matemáticos, nomeadamente, quando se ajudava o aluno a expressar a sua dúvida oralmente. Ou seja, nesta situação, tentou-se fazer com que o aluno fosse reformulando as suas frases à medida que se ia expressando. No final, foi notória a melhoria no discurso de alguns alunos e na exposição do seu raciocínio.

Português

Relativamente à área do Português, foram trabalhados conteúdos de todos os domínios, sendo que se tentou que todos fossem trabalhados em articulação. Neste sentido, as orientações do Professor Cooperante foram, regra geral, que se abordasse um texto e, através dele, se fizesse uma compreensão oral e escrita e ainda que se abordasse um conteúdo gramatical que fizesse sentido através daquele texto. E assim foi organizado o trabalho ao longo das doze semanas de regência.

Assim, no domínio da "Educação Literária" foram abordados diversos tipos textos, tanto do manual como de livros. De entre todos esses, destacam-se os narrativos como, por exemplo, "Os Três Reis do Oriente" de Sophia de Mello Breyner Andresen, os textos descritivos como, por exemplo, o excerto do manual intitulado "Espelho ou retrato vivo", a banda desenhada, como, por exemplo, a adaptação de uma banda desenhada da personagem "Mafalda", a carta que foi explorada e redigida pelos alunos e o mesmo aconteceu com o postal.

Com efeito, "o contacto com textos literários, portugueses e estrangeiros, em prosa e em verso, de distintos géneros, e com textos do património oral português, amplia o espectro de leituras e favorece a interação discursiva e o enriquecimento da comunicação."

(MEC, 2015). Deste modo, facilmente se percebe a interação entre o domínio anterior com o domínio da "Oralidade". Ora, depois de ser abordado um texto, os alunos faziam o levantamento das palavras desconhecidas e compreendiam o seu significado, aumentando, assim o seu léxico. Além disso, após a leitura/ audição de um texto, os alunos eram questionados a fim de se verificar a compreensão oral do mesmo. Com esta atividade, os alunos tinham de expor as suas ideias, desenvolvendo a capacidade de expressão oral. Existiu, ainda, uma atividade em que os alunos, por grupos, tinham de analisar um texto e organizar uma apresentação para os restantes elementos da turma. Esta atividade foi muito rica, pois permitiu trabalhar quase todos os domínios em simultâneo, uma vez que os alunos tinham de ler, interpretar, escrever o seu discurso e apresentá-lo, oralmente, à turma.

Enquanto em algumas aulas os alunos tinham acesso ao texto, noutras, apenas o escutavam. Nas situações em que ocorreu o último caso, foi notório que os alunos ficavam sempre muito atentos e entusiasmados com a história. De um modo geral, da mesma forma ficavam quando tinham de ser eles próprios a realizar a leitura. Assim, neste caso, entra-se no domínio da "Leitura e Escrita", que constituem um só domínio, uma vez que "apoiam-se em capacidades que lhes são em grande medida comuns." (MEC, 2015). Salienta-se o facto de que a maioria dos alunos apresentava gosto pela leitura e faziam-no de uma forma, mais ao menos, fluente, expressiva e articulavam bem as palavras. Nestes casos, foi visível uma melhor produção escrita, tanto nas respostas às questões de compreensão escrita do texto, como nas atividades em que tinham de escrever (carta, postal, descrições, banda desenhada e finais de histórias). Pelo contrário, nos casos em que os alunos não liam fluentemente, por não gostarem de ler, verificou-se que a sua escrita não era organizada e enriquecida.

Já no que se refere ao domínio da "Gramática", tentou-se sempre partir do texto abordado na semana para a introdução ou revisão de conteúdos gramaticais, partindo da ideia de que "o ensino dos conteúdos gramaticais deve ser realizado em estreita sintonia com atividades inerentes à consecução dos objetivos dos restantes domínios." (MEC, 2015). Neste domínio foram, assim, abordados conteúdos relativos ao discurso direto e indireto, tipos de frases, classe de palavras (nomes, adjetivos qualificativos e verbos), flexão em género e número dos nomes e adjetivos, adjetivo numeral, quantificador numeral, determinantes artigos, pronomes pessoais, graus dos adjetivos e sinónimos/ antónimos. De salientar que a maioria destes conteúdos foram apenas recordados, uma vez que já tinham sido lecionados em anos anteriores. De entre as tarefas desenvolvidas neste domínio, destaca-se a adaptação do jogo do "bingo", uma vez que suscitou nos alunos um enorme agrado.

Nesta área, a maior dificuldade sentida foi a preparação das abordagens feitas aos conteúdos gramaticais. Contudo, todas essas dificuldades foram sendo superadas ao longo do tempo, conseguindo-se criar tarefas que fossem desafiantes e interessantes para os alunos e que, ao mesmo tempo, estivessem em articulação com os outros domínios.

Para terminar, penso que o constrangimento inicial que os alunos sentiam ao nível da leitura, foi sendo ultrapassado gradualmente. Tentou-se sempre dar *feedback* positivo aos alunos e talvez isso lhes tenha ajudado a ultrapassar esses constrangimentos. Salienta-se, ainda, que a turma revela algumas dificuldades na escrita, no sentido em que escrevem exatamente como falam, produzindo algumas palavras com erros ortográficos. Isto verifica-se não só na produção de texto, mas também quando copiam. Para ultrapassar esta dificuldade, foi sempre sugerido aos alunos que realizassem mais leituras autónomas.

Estudo do Meio Físico

Relativamente ao Estudo do Meio Físico, foram trabalhados muito poucos conteúdos, uma vez que no nível de ensino onde foi desenvolvida a PES são abordados muito mais conteúdos relacionados com a história. No entanto, para além dos blocos destinados ao Estudo do Meio, foram, também, trabalhados conteúdos desta área nos blocos de Oferta Complementar. Neste sentido, abordou-se a pele, os hábitos de higiene e os cuidados a ter com o corpo, a exposição solar, a importância da água, a preservação da Biodiversidade, a forma da Terra e as fases da lua.

De realçar que, nesta área, foi possível utilizar vários materiais manipuláveis como a maquete da pele, o livro da água, as caixas das fases da lua e o calendário lunar. Também foi possível realizar com os alunos uma atividade prática do tipo ilustrativa referente à exposição solar. Em alguns dos temas abordados os alunos demonstraram-se pouco conscientes, tendo ficado, no final da abordagem muito sensibilizados, como aconteceu aquando da abordagem dos temas da água e da preservação da Biodiversidade.

Ao longo de todas estas aulas, os alunos demonstraram sempre muito interesse e vontade de participar, realizando muitas questões. Também era muito visível pelo facto de os alunos terem imensa vontade de partilhar as histórias do seu dia-a-dia. Porém, por vezes, o entusiamo prejudicava a aprendizagem, no sentido em que se gerava muito ruído na sala e existiam sempre paragem para os alunos se acalmarem.

Nesta área, a maior dificuldade sentida foi em partir das ideias que iam surgindo por parte dos alunos, isto é, como tinha muito presente o rumo que a aula iria tomar, deixava um pouco de "lado" algumas dessas ideias que os alunos iam tendo. Isto poderia possibilitar situações de debate e enriquecer ainda mais a aula. De facto, o que foi referido reflete uma das principais aprendizagens que se retiram da experiência nesta área do Estudo do Meio Físico.

Estudo do Meio Social

No que se refere ao Estudo do Meio Social, foram abordados os seguintes conteúdos: fontes primárias e secundárias, o século, a Península Ibérica, primeiros povos a chegar à Península Ibérica, os Iberos, os Celtas e os Celtiberos, os Fenícios, os Gregos e os Cartagineses, os Romanos e os Bárbaros, os Muçulmanos, o Condado Portucalense, a formação de Portugal, a primeira dinastia, o povoamento do reino, a segunda dinastia, a expansão portuguesa e a descoberta do caminho marítimo para a Índia e do Brasil, a terceira e a quarta dinastias.

Para a lecionação destes conteúdos recorreu-se a vídeos e a um livro da "Menina Catita". No que toca à consolidação, recorreu-se ao friso cronológico para a organização cronológica das informações e à adaptação do jogo "Quem quer ser milionário" para testar os conhecimentos. Estas aulas, comparativamente com as aulas das outras áreas, tiveram uma índole mais teórica. Contudo, é de realçar que não foram aulas meramente expositivas, pois os alunos participavam constantemente na construção do conhecimento e na organização de ideias.

Tal como acontecia nas aulas de Estudo do Meio Físico, os alunos sempre se demonstraram interessados e curiosos, realizando, igualmente, muitas questões. Por outro lado, como estas aulas exigiam muito dos alunos e como se realizavam da parte da tarde, o tempo de atenção destes era reduzido. Esta situação levou à adoção de algumas estratégias como, por exemplo, passar um vídeo, fazendo paragens para questionar acerca do que tinham acabado de ver e ouvir.

Realça-se, ainda, o facto de que no início de cada uma das aulas, se fazia uma breve revisão àquilo que tinha sido abordado na aula anterior. Isto torna-se bastante importante, uma vez que todos os acontecimentos da história estão relacionados e, desta forma, conseguia estabelecer-se um fio condutor entre todas elas.

Inicialmente, a preparação das aulas foram um autêntico desafio, uma vez que esta foi a área onde se sentiu mais dificuldade. Contudo, o Professor Supervisor desta área, apercebendo-se destes constrangimentos, sempre se disponibilizou para ajudar. Assim, todas as dificuldades foram sendo ultrapassadas e esta área consistiu numa bela surpresa.

Expressão e Educação Físico-Motora

No que diz respeito à área de Expressão e Educação Físico-Motora foram trabalhados, ao longo das aulas, diferentes blocos. De entre eles, destacam-se os blocos de "Jogos", de "Perícias e Manipulações", de "Deslocamentos e Equilíbrios", de "Ginástica" e de "Atividades Rítmicas Expressivas".

As preparações destas aulas, à semelhança de todas as outras, foram ao encontro do que era solicitado pelo Professor Cooperante. Como este conhece a turma desde o início da escolaridade, foi sempre referindo que os jogos em equipas não seriam uma boa aposta, mencionando que, o circuito por estações seria aquilo que melhor se adaptaria à turma. Neste sentido, para a parte fundamental de todas as aulas se cumpriu com essa sugestão, à exceção de uma delas, em que se preparou um circuito por estafetas. Assim, no primeiro circuito, e, de modo a conhecer a turma a nível motor, trabalhou-se, essencialmente, as perícias e manipulações e os deslocamentos e equilíbrios, tendo sempre em consideração as questões da lateralidade. Nas duas aulas seguintes, trabalhou-se o bloco de ginástica, aliado ao bloco dos deslocamentos e equilíbrios. Na última aula, trabalhou-se em circuito por estafetas onde se aliou alguns blocos desta área ao domínio de gramática da área do Português, de forma a haver interdisciplinaridade.

Relativamente ao aquecimento e ao relaxamento, foi dada total liberdade pelo Professor Cooperante para se fazer quaisquer atividades. Para o aquecimento, foram escolhidas atividades onde os alunos pudessem alternar os deslocamentos e circular pelo espaço, de modo a aquecer os músculos e o sistema cardiorrespiratório. Como exemplo tem-se o jogo das cadeiras (com arcos), o jogo do "rei manda" e uma espécie de jogo da apanhada, mas aliado à Matemática, onde se trabalhou, também, as operações e os números pares/ ímpares. Numa das aulas, criou-se uma coreografia de aquecimento para que os objetivos referidos anteriormente cumpridos. Já no que se refere ao relaxamento, foram escolhidas atividades para os alunos se acalmarem e para relaxar o corpo e os músculos. Para cumprir estes objetivos realizaram-se, ao som de música relaxante, movimentos de alongamento (imitação da professora e imitação do colega - espelho), movimentos nas costas de um colega e movimentos de uma bola de esponja pelo corpo de um par.

Como a turma, na sua maioria, é bem desenvolvida a nível motor, as atividades propostas foram realizadas sem grandes dificuldades. Ao longo das explicações, os alunos não demonstravam grandes dúvidas, no entanto, existiu sempre um momento de exemplificação. Porém, existe um ou outro caso em que o desenvolvimento motor da criança é reduzido, devendo-se ao facto de, nos dias de hoje, as crianças brincarem pouco ao ar livre, como acontecia antigamente.

Um outro aspeto a realçar é que, sempre que possível, foi dado *feedback* aos alunos, principalmente quando executavam corretamente a tarefa. Contudo, o *feedback* também foi dado no sentido de complexificar a tarefa para aqueles alunos que já a executavam com facilidade. Este aspeto foi melhorando ao longo das aulas. Para além deste aspeto, um outro que foi melhorando ao longo das aulas, foi a posição pelo espaço, onde se tentou dar atenção a todas as estações e não só a uma delas. Por último, outro aspeto que foi melhorando, foi a nível da gestão do tempo.

As maiores dificuldades sentidas foram ao nível da gestão do comportamento dos alunos, uma vez que, neste contexto, o seu comportamento era mau.

Expressão e Educação Plástica

Esta área foi a menos trabalhada de modo exclusivo ao longo de toda a PES, na medida em que o momento destinado às expressões no horário da turma era à sexta-feira, tendo sido trabalhada esta mesma área muitas vezes em simultâneo com outras áreas. Além disso, houve momentos, nomeadamente, antecedentes a datas festivas onde foi trabalhada esta área. Como tal, no Magusto pintaram uma castanha e colocaram fios de lã nos braços e pernas; no Natal, fizeram cartões com um pinheiro *pop-up*, um globo de neve a partir de uma garrafa de plástico e, ainda, uns enfeites de Natal com rolhas de cortiça.

Os alunos demonstraram algumas dificuldades a nível da sua destreza, mais concretamente nos recortes. Porém, o que lhes era proposto foi sempre do seu agrado, executando as tarefas com motivação.

Envolvimento na comunidade educativa

Ao longo da PES, toda a comunidade educativa nos recebeu muito bem, integrando-nos em tudo aquilo em que era possível. O ambiente que se vivia na escola era muito familiar, o que fez com que nos sentíssemos em “casa”.

É importante salientar que nós (professoras estagiárias no 4º ano) não ficamos sozinhas no contexto, sendo que existiam mais dois pares (um na turma do 3º ano e outro na turma do 1º ano). Por conseguinte, nós e o par que desenvolveu o estágio na turma do 3º ano trabalhamos, por muitas vezes em conjunto, uma vez que os dois anos de escolaridade são muito próximos e os conteúdos também. Desses trabalhos resultam o desenvolvimento de um *peddy-paper* pela escola no dia do Magusto com tarefas de diferentes áreas, a criação de um elemento de decoração para a festa de Natal da escola e, ainda, uma aula em contexto não-formal, na qual os alunos tiveram a oportunidade de realizar um trilho por uma parte da freguesia. Neste último trabalho mencionado, foram propostas aos alunos diferentes tarefas das diversas áreas do currículo nas quais teriam de estar fisicamente no local para as resolverem. De realçar que o desenvolvimento de uma aula em contexto não formal foi um trabalho proposto pelos Professores Supervisores a partir da unidade curricular de Complementos de Temas de Ensino (CTE). Assim, depois de explorar o local, a nossa escolha recaiu sobre a realização de um trilho dada a riqueza patrimonial da freguesia.

Como aconteceu em todas as tarefas mencionadas anteriormente, os Professores Cooperantes das duas turmas, deixaram totalmente ao nosso critério o que iria ser feito tanto no dia do Magusto, como na aula em contexto não-formal. Isto torna-se muito importante, uma vez que sentimos que nos foi dado um voto de confiança e, para corresponder às expectativas, envolvemo-nos ainda com entusiasmo na preparação das atividades.

Salienta-se, ainda, que sempre fomos convidadas a participar nas visitas de estudo organizadas pela escola como, por exemplo, a ida à Biblioteca Municipal de Viana do Castelo para assistir a uma peça de teatro e a ida à "Casa dos Nichos". Isto fez com que nos sentimos ainda mais integradas na comunidade educativa.

CAPÍTULO II- INTERVENÇÃO EM CONTEXTO EDUCATIVO II – 2º Ciclo

Neste capítulo apresenta-se uma breve introdução relativa à organização da Prática de Ensino Supervisionada no 2º CEB (PES), a caracterização do contexto educativo e o percurso da intervenção educativa nas áreas da Matemática e das Ciências Naturais. A caracterização do contexto encontra-se subdividida em duas partes: uma referente à caracterização do estabelecimento de ensino e outra referente à caracterização da turma.

1. Introdução

A organização da PES foi apresentada, à semelhança do que aconteceu na PES do primeiro semestre, pelas professoras responsáveis que distribuíram todos os pares pedagógicos por diferentes turmas de uma escola pertencente ao concelho de Viana do Castelo. Depois, foi atribuída uma turma do 6º ano de escolaridade a cada um dos pares, tendo sido distribuído um horário da mesma por cada um dos elementos do par. Após essas informações, acrescentou-se que o estágio iria decorrer desde meados do mês de fevereiro até meados do mês de junho, com algumas semanas de observação e outras semanas de regência. Seguidamente, foi agendada uma reunião com os Professores Cooperantes e os pares pedagógicos onde foram apresentados os temas que teriam de ser abordados em ambas as áreas, num total de dois temas por cada área. Coube ao par pedagógico decidir entre si qual dos temas é que iria abordar. Mais tarde, já na primeira sessão de observação, essa decisão foi comunicada aos Professores Cooperantes e, desta forma, o par pedagógico ficou a saber quem iria começar na área de Ciências Naturais e quem iria começar na área da Matemática.

Contudo, a calendarização que estava prevista não foi possível de ser cumprida, uma vez que, na sequência da pandemia da COVID-19, as escolas foram encerradas. Pela razão apontada apenas foi possível cumprir o período de observação. Em todo o caso, ao longo das semanas de observação foi dada a oportunidade ao par pedagógico de se familiarizar com a turma, as Professoras Cooperantes e o estabelecimento de ensino, conhecer os alunos, bem como as suas rotinas.

2. Caracterização do Contexto Educativo

Caracterização do Estabelecimento de Ensino

O contexto educativo a ser caracterizado pertence a um agrupamento de escolas que "congrega 9 espaços educativos com algumas décadas de existência e instituições escolares com mais de um século de vida.". Relativamente ao agrupamento em questão, sabe-se, através do projeto educativo mais recentemente publicado, que abrange algumas freguesias do concelho, como Afife, Carreço, Areosa e União de Freguesias de Viana do Castelo. No mesmo documento, é destacado que, pela oferta que possui, este agrupamento de escolas acolhe alunos de outras zonas, como, por exemplo, Caminha, Ponte de Lima e Esposende. As diferentes proveniências dos alunos refletem uma heterogeneidade na comunidade educativa, bem como diversidade de origem étnica e cultural.

O agrupamento oferece, também, diversos serviços técnico-profissionais que "asseguram respostas educativas diversificadas, apoiam as práticas pedagógicas de inclusão e favorecem a formação pessoal e profissional de um público heterogéneo.". De entre eles, destacam-se as bibliotecas escolares, o departamento de educação especial, os serviços de psicologia e orientação e o gabinete do aluno.

Já no que se refere à escola onde iria decorrer a PES, de acordo com o projeto educativo mais recentemente publicado (2015/2018), a instituição foi criada em 1973 como escola preparatória. Mais tarde, foi inaugurado um novo edifício escolar que foi sede de agrupamento e que serve até ao presente, acompanhando alunos dos 2º e 3º ciclos. O edifício escolar é constituído, interiormente, por dois pisos, onde estão à disposição dos alunos diversas salas de aula incluindo laboratórios, casas de banho, biblioteca, cantina, bar, reprografia, PBX e secretaria. Já na parte exterior, a escola é rodeada de espaços verdes e os alunos podem usufruir de um campo de futebol, um campo de basquetebol e jogos como a macaca e xadrez que estão representados no chão. Salienta-se, também, o facto de que a escola se encontra preparada para receber pessoas com mobilidade reduzida, disponibilizando elevador e rampas de acesso, tanto na entrada da escola, como no seu interior. No que se refere a materiais, a escola também oferece um conjunto de materiais de apoio à lecionação como, por exemplo, geoplanos e sólidos geométricos na área da matemática e microscópios e outros materiais de laboratório na área das Ciências Naturais. Além disso, disponibiliza, também, equipamentos informáticos nas salas de aula, como projetores, computadores e colunas.

Caracterização da Turma

Pela razão já mencionada anteriormente, apenas foi realizado o período de observação, contudo, nesse mesmo período foi possível conhecer a turma ao ponto de a conseguir caracterizar. Deste modo, a turma do 6º ano de escolaridade onde se iria desenvolver toda a PES era constituída por vinte e um alunos, dos quais nove eram do sexo masculino e doze eram do sexo feminino. Sabe-se que um dos alunos estava sinalizado com NEE, sendo que realizava testes adaptados e com o auxílio da Professora que lhe lia as questões. Relativamente aos restantes elementos da turma, foi possível verificar alguma diferença nos níveis e ritmos de aprendizagem, tendo sido notório que a maioria dos alunos se demonstrava muito mais rápida na realização e compreensão das tarefas que um outro grupo de alunos. Neste último grupo de alunos notava-se uma falta de atenção maior e, por essa razão, não se encontravam no mesmo nível que os restantes. Contudo, de uma forma geral, a turma era bastante boa, com alunos empenhados, participativos e curiosos, nomeadamente na área das Ciências Naturais.

3. Percurso da Intervenção Educativa

Tal como já foi referido acima, através da oportunidade que foi dada ao par pedagógico de observar a turma nas duas áreas, foi possível verificar que a turma se demonstrava mais ativa na área das Ciências Naturais, sendo que as tarefas mais práticas conseguiam despertar a atenção de todos os alunos e não apenas de um grupo de alunos que, por norma, se demonstrava sempre mais atento. Também é de salientar que, nas aulas desta área disciplinar, os alunos demonstravam-se sempre mais inquietos, talvez pelo facto de o horário destinado a estas aulas coincidir com a aproximação da hora do almoço.

Posto isto, na preparação das aulas que iriam ser implementadas, foi tido tudo isso em consideração e, por essa razão, tentou-se privilegiar metodologias de ensino e aprendizagem mais ativas de modo a permitir um maior envolvimento dos alunos nas tarefas propostas.

De reforçar que apenas foi possível cumprir o período de observação na escola onde iria decorrer o estágio, contudo, os períodos em que iriamos fazer uma implementação tiveram de ser igualmente planificados. Para ultrapassar esta limitação, foi-nos proposto que implementássemos uma das aulas (à escolha) de cada uma das áreas (Matemática e Ciências Naturais) via internet através da plataforma Zoom, para os nossos colegas e docentes envolvidos na PES do 2º semestre, para que conseguíssemos concluir esta fase com avaliação.

De seguida, será feito um breve relato relativamente a cada uma das áreas onde iria implementar e relativamente à aula implementada através da plataforma Zoom. Começarei pela área das Ciências Naturais, pois seria a área disciplinar onde iria começar a minha implementação ao longo de, aproximadamente, 4 semanas enquanto o meu par de estágio lecionava na área da Matemática sendo que, depois desse tempo, trocaríamos.

Ciências Naturais

Na área da Ciências Naturais estava previsto abordar conteúdos relativos às trocas nutricionais entre o organismo e o meio nas plantas. Para isso, dispunha de um total de oito aulas, das quais, cinco de 45 minutos e três de 90 minutos. É de salientar que a Professora Cooperante me deu total liberdade para a organização das aulas e dos conteúdos a lecionar. Deste modo, comecei por organizar os conteúdos programáticos tendo em conta as orientações curriculares, as Aprendizagens Essenciais e o Referencial de Educação para o Desenvolvimento. De uma forma geral, os principais conteúdos a serem trabalhados eram: fotossíntese, respiração celular, substâncias de reserva, constituição de uma flor completa e reprodução das plantas.

A parte inicial deste tema iria ser lecionado ainda pela Professora Cooperante, sendo que esta abordaria a captação de água e sais minerais por parte das plantas, a transpiração e a circulação da seiva bruta. Assim, para a minha primeira regência optei por preparar um jogo interativo que serviria de revisão relativamente aos conteúdos abordados pela Professora Cooperante e serviria de base para a construção do conhecimento que iriam adquirir no futuro. De facto,

> Através da brincadeira e do jogo as crianças divertem-se, relacionam-se e aprendem. As atividades lúdicas facilitam a aprendizagem, promovem nas crianças experiências agradáveis que se refletem na motivação do aluno, pois o prazer de aprender é encarado como veículo facilitador para a aprendizagem e o domínio de competências (Fonseca, 2012, p. 28)

Pela importância referida, e pelas características já apontadas relativamente à turma, ao longo das aulas tentei diversificar os recursos (vídeos, jogos, correspondências, PowerPoints, imagens e notícias) para que as aulas não tivessem um cariz apenas teórico e para que os alunos se sentissem envolvidos na construção e consolidação dos conhecimentos.

Para além disso, e como o tema assim o permitia, tentei recorrer, também, sempre que possível, a atividades práticas laboratoriais para que os alunos conseguissem prever, preparar, verificar e analisar os resultados num contexto real. Propus uma atividade do tipo investigativa, onde os alunos tinham de preencher um protocolo (V de Gowin) e outras atividades mais simples, sem protocolo, onde os alunos tinham de observar o material, descrever o procedimento, refletir, executar e analisar os resultados obtidos. Efetivamente, "as actividades laboratoriais são fundamentais para o aluno aprender a conhecer e a usar a metodologia científica, aprendendo assim a fazer ciência, ou seja, a resolver problemas." (Leite, 2000, p. 14).

No planeamento das aulas, tentei criar um fio condutor entre todas para que os alunos percebessem que os conteúdos estavam relacionados. Tentei, também, que existissem momentos de diálogo, tanto professor-aluno, como aluno-aluno, de forma a que existisse partilha e discussão de ideias.

Relativamente à aula implementada através da plataforma Zoom, optei por abordar as substâncias de reserva das plantas. Para isso, comecei por pedir aos alunos que fizessem uma correspondência entre algumas imagens que apareceram no PowerPoint e as palavras que se referiam a diferentes órgãos da planta, promovendo sempre um momento de discussão relativamente às respostas dadas. Findada esta tarefa introdutória, os alunos foram questionados sobre as suas ideias relativamente ao propósito da acumulação de substâncias por parte da planta, às situações em que as plantas recorrem a essas substâncias e que tipos de reservas acumulam. Os alunos foram respondendo a estas questões com algumas ideias que possuíam, sendo que, no final, foi mostrado um vídeo com essas informações para confrontar com o que havia é sido dito pelos alunos. Seguidamente, a partir de uma informação que mencionada no vídeo, foi dito aos alunos que iria provar a presença do amido através de uma atividade prática. Para isso, mostrei os materiais, questionando os alunos relativamente ao que observavam. Após terem visto todos os materiais, questionei-os relativamente ao procedimento que teria de ser realizado, tendo-o efetuado de seguida. Enquanto se aguardavam os resultados, perguntei quais as suas previsões, sendo que os alunos foram dizendo as suas ideias sem verificar realmente o que estava a acontecer. Posto isto, os resultados foram mostrados e foi pedido aos alunos que descrevessem o que viam e quais as conclusões que poderiam retirar. Posteriormente, foi realizada uma outra atividade prática para provar a presença de lípidos, tendo sido utilizada a mesma metodologia que na atividade prática anterior. Para finalizar a aula, foi realizada uma síntese em grande grupo, onde os alunos mencionaram o que foi abordado na aula e os conhecimentos adquiridos.

Para a aula neste formato, tive de adaptar a tarefa inicial de correspondência, pois, no planeamento original, tanto as imagens como as palavras estariam impressas e seriam coladas no quadro. Nas atividades práticas também teve de ser feita uma adaptação pois, nesta aula não seria possível que os alunos prestassem auxílio na realização da atividade. Na parte final do plano de aula original tinha proposto que fosse feito o registo de alguns conceitos abordados na aula, sendo que, essa parte foi retirada para a aula adaptada.

Para a vídeo-regência na área das Ciências Naturais senti-me muito calma, segura e confiante. Considero uma mais valia o facto de ter realizado com a turma tarefas diversificadas e, mais importante, ter realizado atividades práticas, na medida em que muitos consideram que as atividades práticas se destinam apenas a ser realizadas em laboratório. Relativamente ao que foi planeado para esta aula, foi cumprido antes do término do tempo, pelo que considero um ponto forte o facto de ter preparado previamente uma tarefa extra e de ter conseguido improvisar um desfecho para a aula sem que nenhum dos alunos percebesse que o estava a fazer.

Para terminar e, ainda relativamente à vídeo-regência, de uma forma geral, não senti grandes dificuldades e considero que foi uma experiência bastante enriquecedora, tendo-se constituído um grande momento de aprendizagem e superação.

Matemática

Na área da Matemática estava previsto abordar conteúdos relacionados com os Números Racionais, sendo que, para a sua abordagem dispunha de um total de doze aulas, das quais, oito de 90 minutos e quatro de 45 minutos. Tal como aconteceu na área das Ciências Naturais, a Professora Cooperante desta área também me deu total liberdade para a organização das aulas e dos conteúdos a lecionar. Posto isto, comecei pela organização dos conteúdos programáticos tendo em conta as Aprendizagens Essenciais e o Programa e Metas Curriculares de Matemática. Em ambos os documentos orientadores, os conteúdos relativos aos Números Racionais encontram-se no domínio dos Números e Operações (NO).

De uma forma geral, os conteúdos a abordar no presente ano letivo prendiam-se aos números racionais negativos, ao simétrico e ao valor absoluto de um número racional e à comparação, ordenação, adição e subtração de números racionais. Contudo, comecei por planear uma aula com o objetivo de rever conteúdos relativos aos números racionais positivos (conteúdos abordados em anos anteriores), pois seriam conhecimentos necessários para a aprendizagem dos novos conteúdos e porque, ao longo do período de regência, iriam ser necessários para conseguirem resolver os dez problemas que iriam ser propostos em quase todas as aulas de 90 minutos.

Relativamente à natureza das aulas, tentei planeá-las tendo em conta um ensino exploratório, isto é, tentei criar momentos onde, através de tarefas desafiantes, os alunos conseguissem desenvolver o conhecimento matemático através de explorações e discussões (Canavarro, 2011). Como exemplo tem-se uma aula em que os alunos iriam ter oportunidade de manipular as barras chinesas de forma a representar um determinado número. Como há diferentes formas de o fazer, as várias propostas iriam ser exploradas e discutidas em grande grupo para que todos compreendessem as diferentes de pensamento. Para além disso, tentei recorrer, sempre que possível, a materiais manipuláveis (barras chinesas, cartas, reta numérica) e a recursos digitais (jogos interativos, PowerPoint, vídeos), de forma a cativar e motivar os alunos. Tentei, ainda, na abordagem dos conteúdos, estabelecer conexões com a realidade para os alunos conseguissem compreender a importância da matemática no mundo que os rodeia. Como exemplo tem-se uma aula em que os alunos iriam conseguir observar, através de imagens, diferentes situações do dia a dia onde são utilizados os números negativos.

Para além da abordagem dos conteúdos, no planeamento das aulas privilegiei, ainda, o desenvolvimento das capacidades transversais como o raciocínio matemático, a comunicação matemática e, como já mencionado, a resolução de problemas.

Efetivamente, apoiando-me no que referem Cabrita e Fonseca (2012), tentei proporcionar momentos em que os alunos tivessem oportunidade de experimentar, comparar, formular conjeturas e generalizar, desenvolvendo, assim, o raciocínio matemático. Como exemplo, posso referir uma das aulas em que planeei apresentar à turma diferentes situações do dia a dia, em que lhes ia ser pedido que, com a ajuda/manipulação das barras chinesas, as resolvessem. Depois de resolvidas, ia-lhes ser pedido que comparassem as resoluções, formulassem conjeturas e que generalizassem as regras, neste caso, para a adição e subtração de números racionais.

Também em vários momentos tentei suscitar nos alunos o desenvolvimento da comunicação matemática, ora para pedir que explicassem os seus raciocínios, ora para manifestarem as suas opiniões relativamente a explorações realizadas por outros colegas, ora para explicarem à turma o seu entendimento relativamente a uma determinada situação. Também no início de todas as aulas, tentei planear momentos em que os alunos pudessem criar ligações com a aula anterior, questionando o que teria sido feito ou pedindo que recordassem alguma situação/ tarefa para realizar uma ponte com a presente aula. Assim como no final de cada aula, em que foram planeados momentos de síntese em grande grupo, de forma a que vários alunos interviessem. De facto, através de diferentes oportunidades os alunos iriam conseguir desenvolver uma comunicação matemática oral que não seria apenas unidirecional (sentido aluno-professor), sendo que existiriam vários momentos em que o sentido da comunicação seria aluno-turma ou aluno-aluno.

A terceira capacidade transversal mencionada, sendo um dos propósitos do estudo, foi, efetivamente, aquela que foi planeada mais intensamente. De facto, a resolução de problemas "além de nos ajudar a resolver os problemas do quotidiano, permite, principalmente, desenvolver processos e capacidades de pensamento que são o que de mais importante a matemática escolar pode desenvolver num indivíduo" (Vale & Pimentel, 2004, p. 10). Para que os alunos se sentissem motivados e compreendessem que a resolução de um problema pode ir muito mais além do que um conjunto de cálculos para chegar a uma solução, tentei propor problemas que estabelecessem diferentes conexões, tanto com a arte, como com o quotidiano e também com a própria matemática. Para além disso, os problemas propostos privilegiavam a resolução através de modelos visuais, como o modelo da barra. Estas resoluções permitem ao aluno dar sentido ao problema, facilitando a sua exploração.

Para a implementação via Zoom de uma aula, optei por rever conteúdos relativos aos números racionais positivos, sendo que, no final, propus a resolução de problemas recorrendo a modelos visuais. A dinâmica na apresentação foi o mais próximo do que poderia desenvolver presencialmente, de modo a permitir uma interação com os "alunos". Assim sendo, comecei por projetar um PowerPoint para me auxiliar em toda a aula, tendo sido este o único recurso utilizado.

Inicialmente, foi pedido à turma que recordasse número racional, sendo que várias ideias foram surgindo, mas a definição só apareceu após os alunos exporem todas as suas ideias. Depois, confrontando essas mesmas ideias com a definição que apareceu, foi dado feedback aos alunos. Após a revisão da definição, foi feita a revisão às representações dos números racionais, sendo que diferentes alunos as recordaram, mencionando-as. Assim, surgiu no PowerPoint uma tarefa onde tinham de fazer a correspondência entre as diferentes representações mencionadas e os exemplos de cada uma delas. Esta tarefa foi realizada sem grandes dificuldades pelos alunos.

No seguimento, com o objetivo de rever os contextos (contínuo e discreto), surgiram várias imagens em que todas representavam a fração $\frac{3}{5}$, tendo sido pedido que as organizassem em dois grupos tento em conta a forma como estão apresentadas as partes em relação ao todo da imagem. Depois de proporem uma organização, foi pedido que indicassem a designação de cada um dos contextos, tendo surgido o discreto e o contínuo.

Posteriormente, foram revistas as interpretações do número racional na forma de fração. Para isso, comecei por mostrar uma imagem para que os alunos indicassem a fração que a poderia representar; após indicarem, os alunos tiveram de explicar como chegaram a essa fração; seguidamente, tiveram de recordar o nome dado ao tipo de interpretação realizada; depois, tiveram de justificar para que conseguissem recordar a definição; e, por fim, surgiu a definição que foi confrontada com aquilo que havia sido dito pelos alunos, dando, assim, o feedback. O mesmo procedimento foi realizado para a interpretação de fração como parte-todo, fração como quociente, fração como razão e fração como operador.

Seguidamente, pedi aos alunos que me ajudassem a recordar as regras para operar com frações. Para isso, surgiram no PowerPoint algumas operações para os alunos resolverem, indicarem o resultado, referirem o modo como pensaram e generalizarem a regra. Após isso, a generalização da regra surgiu no PowerPoint para se conseguir confrontar com o que havia sido dito e para dar feedback. O mesmo aconteceu para a adição/subtração de frações com denominadores iguais, para a adição/subtração de frações com denominadores diferentes, para a multiplicação de frações e para a divisão de frações.

Após toda a revisão, perguntei aos alunos se se sentiam capazes de resolver problemas com números racionais positivos, sendo que a resposta foi positiva. Assim, apresentei no PowerPoint o enunciado de um problema, tendo explorado, de seguida, uma resolução não visual e uma resolução visual utilizando o modelo da barra. Depois da exploração passo a passo das resoluções, perguntei aos alunos se tinham dúvidas. Como não apresentaram dúvidas, desafiei os alunos a resolverem dois problemas através dos dois processos. Após terem resolvido cada um deles, foi pedido a diferentes alunos que apresentassem a sua resolução, sendo discutida com os restantes alunos.

Para terminar a aula, foi pedido aos alunos que fizessem a síntese da mesma, recordando aquilo que foi abordado.

Para a aula neste formato, escolhi, inicialmente, uma outra aula que não a descrita, contudo, como a sua abordagem iria ser um pouco complicada para este formato, optei por alterar. Assim, para esta aula tive de realizar pequenas adaptações, tendo de recorrer mais frequentemente ao questionamento por não conseguir acompanhar os registos que os alunos iam fazendo, nomeadamente, nas resoluções dos problemas na parte final da aula.

Para a vídeo-regência nesta área senti-me nervosa, tendo começado a aula um pouco tensa. Apesar de me ter sentido assim, através do feedback dado, isso não foi notório.

Considero importante o facto de ter escutado os alunos em todos os momentos e de ter partido do que diziam para chegar àquilo que se pretendia. Também considero importante o facto de ter, frequentemente, recorrido ao questionamento e de ter tido o cuidado não deixar os alunos com dúvidas. Destaco, também, como um fator importante o recurso ao PowerPoint para guiar a aula, tendo sido fundamental para manter os alunos focados. Realço, ainda, o facto de ter proposto tarefas desafiantes para os alunos e de ter explorado as diferentes resoluções em grande grupo, de forma a que houvesse momentos de partilha de ideias.

Como aspetos menos bons da aula posso realçar o facto de que o meu nervosismo levou a que, no início da aula, não desse o devido tempo para a exploração por parte dos alunos algumas definições. E realço, também, o facto de ter explorado as resoluções do primeiro problema sem a participação dos alunos.

Para terminar e, à semelhança do que referi na área das Ciências Naturais, considero que foi uma experiência bastante enriquecedora, tendo-se constituído um grande momento de aprendizagem.

PARTE II – TRABALHO DE INVESTIGAÇÃO

Esta segunda parte do presente relatório destina-se à apresentação do estudo que iria ser desenvolvido ao longo da PES no 2º Ciclo. Encontra-se dividida em cinco capítulos. No primeiro capítulo apresenta-se a pertinência do estudo bem como o problema e as suas questões orientadoras. No segundo capítulo é realizada a fundamentação teórica dos temas em estudo. No terceiro capítulo apresenta-se a metodologia de investigação que seria adotada no estudo bem como os métodos de recolha de dados que seriam utilizados e refere-se, ainda, como se faria a análise dos dados. No quarto capítulo é realizada uma descrição do modo como se desenvolveria a intervenção didática, sendo feita uma descrição das tarefas que iriam servir o estudo (dez problemas), bem como seriam apresentadas algumas das possíveis estratégias de resolução. Por fim, no quinto capítulo faz-se uma análise do trabalho de investigação desenvolvido, sendo mencionadas as possíveis conclusões do estudo, as principais limitações que poderiam encontrar-se e as perspetivas para futuros estudos.

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO

Este capítulo encontra-se dividido em dois subcapítulos. No primeiro apresenta-se o tema em estudo, justificando-se a sua pertinência e no outro apresenta-se o problema e suas questões de investigação.

1. Pertinência do estudo

Encontrando-se a matemática presente no currículo dos alunos ao longo de todo o ensino básico, percebe-se facilmente a sua importância, que não se deve unicamente à aquisição dos conhecimentos por parte dos alunos (conteúdos). Efetivamente, o ensino da matemática tem várias finalidades, das quais se podem destacar o desenvolvimento da capacidade de utilizá-la em vários contextos (matemáticos e não matemáticos) e a aprendizagem para o desenvolvimento pessoal do aluno, permitindo-lhe a sua apropriação noutras disciplinas ou na atividade profissional (DGE, 2018).

Sabe-se, porém, que esta área curricular é vista negativamente por muitos alunos, refletindo-se, muitas vezes, no seu insucesso escolar. Isto poderá estar relacionado com algumas práticas de ensino e/ou com a falta de estímulos por parte de quem ensina. Neste sentido, torna-se importante fomentar "o gosto pela Matemática e pela redescoberta das relações e dos factos matemáticos (…) que pode e deve ser alcançado através do progresso da compreensão matemática e da resolução de problemas." (MEC, 2013, p. 2).

De facto, de acordo com o que referem Vale, Fão, Alvarenga, Geraldes, Sousa e Pimentel (2008), a resolução de problemas surge como uma das formas que permite ao aluno "fazer matemática", possibilitando o seu contacto com ideias significativas e contribuindo para a sua motivação. Para Vale (2017), a visão sobre a resolução de problemas "inclui um ensino que proporcione aos alunos um leque variado de problemas não rotineiros nos quais possam ser aplicadas diferentes estratégias" (p. 138). Neste sentido, é destacada a importância da visualização na resolução de problemas, onde o *ver* é tão importante como o *fazer* (Vale, 2017). Na mesma linha de pensamento, Greeno e Hall (1997) referem que o recurso a representações visuais na resolução de problemas torna-se importante, na medida em que auxilia os alunos quer na resolução do próprio problema quer na explicitação dessa resolução e consequente discussão através da comunicação que estabelecem com o auditório. Ainda no mesmo sentido, já em trabalhos mais recentes, Barbosa (2009) reforça a ideia de que "as representações de natureza visual constituem uma estratégia incontornável na resolução de problemas, actuando frequentemente como um elemento facilitador na compreensão das situações propostas e inspirando descobertas criativas." (p. 3).

A par desta consideração, surge um tema estruturante no programa de matemática no ensino básico, os números racionais. Já no passado se destacava a importância deste tema, ora por permitir aos alunos lidar com situações/ problemas do mundo real, ora por permitir o desenvolvimento de estruturas mentais necessárias ao progresso intelectual dos alunos (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983). Atualmente, esta ainda é uma grande referência para muitos trabalhos realizados acerca do mesmo tema ao longo das últimas décadas. De facto, a importância deste tema é bastante referenciada, contudo, a sua complexidade está-lhe igualmente associada. Esta complexidade traduz-se nas dificuldades que os alunos têm na aprendizagem deste tema sobretudo na utilização da representação sob a forma de fração. Ou seja, advém dos diferentes significados que o número racional pode assumir, dos vários modos de representação e do modo como este tema é abordado (Ventura & Oliveira, 2014; Vale & Barbosa, 2020a). Para colmatar estas dificuldades, torna-se importante que o aluno tenha tempo para desenvolver o sentido do número racional, de forma a que seja capaz de utilizar os conhecimentos sobre estes números em diferentes contextos e que estabeleça conexões entre as diferentes formas que o número pode assumir (Monteiro & Pinto, 2005; Ponte & Quaresma, 2011). Neste sentido, em conformidade com aquilo que já foi referido anteriormente, Ponte e Quaresma (2011) afirmam que "os alunos devem ser capazes de resolver problemas, compreender e ser capazes de usar propriedades e representações dos números racionais e de apreciar a ordem de grandeza dos números." (p. 62).

A partir do que já foi mencionado, percebe-se que é de extrema importância para uma aprendizagem da matemática com compreensão que os alunos tenham oportunidades para se envolverem "em tarefas que se centrem no raciocínio e na resolução de problemas e que viabilizem múltiplas abordagens e estratégias diversificadas de resolução" (NCTM, 2017, p. 23). De facto, para que tal seja possível, a mesma fonte refere que é fundamental que se proporcione aos alunos a oportunidade de estabelecer conexões entre diferentes representações matemáticas. Para além dessas, também é importante que se estabeleçam conexões com outras áreas, “de modo a que considerem a Matemática como uma teia de relações, fortemente ligada a outras áreas curriculares e ao mundo que os rodeia, e não como uma Ciência isolada, inacessível e fechada sobre si mesma.” (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008, p. 58). Esta visão das múltiplas representações assim com o estabelecimento de diferentes conexões permitem obter uma compreensão mais sólida de qualquer conceito e em particular dos números racionais.

2. Problema e questões do estudo

Mediante o que foi referido, neste estudo o objetivo seria compreender o desempenho dos alunos na resolução de problemas com números racionais positivos sob a forma de fração onde se privilegiam as representações visuais e onde os contextos das diferentes tarefas privilegiam as conexões dentro e fora da matemática. Para isso, ao longo da unidade de ensino sobre o tema, para além da apresentação e discussão dos números racionais, iriam ser propostos aos alunos um conjunto de problemas diversificados.

Neste sentido foram delineadas três questões orientadoras para o estudo:

Q1: Como se pode caracterizar o desempenho dos alunos na resolução de problemas que envolvem números racionais positivos sob a forma de fração pelos diferentes contextos apresentados e conexões que suscitam?

Q2: Que estratégias de resolução de problemas são privilegiadas pelos alunos na resolução dos problemas propostos?

Q3: Como se podem caracterizar as principais dificuldades dos alunos na resolução dos problemas propostos?

CAPÍTULO II – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No presente capítulo apresenta-se a fundamentação teórica do problema em estudo, tendo por base alguns autores de referência. Este encontra-se dividido em quatro partes. Na primeira, procura-se perceber quais as orientações curriculares a nível geral na matemática e, mais particularmente, a nível dos números racionais. Na segunda parte, procura-se demonstrar que o ensino e a aprendizagem da matemática sofreram alterações, distinguir os tipos de tarefas matemáticas, abordar os contextos das mesmas e as conexões em matemática. Na terceira parte aborda-se o ensino e a aprendizagem dos números racionais não negativos, ao nível das suas representações, significados, dificuldades subjacentes à sua aprendizagem, da resolução de problemas e das estratégias visuais. Por fim, é feito um levantamento dos estudos empíricos realizados, sobretudo, no âmbito da resolução de problemas com números racionais onde se privilegiam as representações visuais e as conexões.

1. A matemática no currículo do Ensino Básico

1.1. Orientações gerais

Com o avanço e desenvolvimento do conhecimento científico e tecnológico, a educação sofre constantes desafios, nomeadamente pelo crescimento exponencial da informação. É, assim, necessário que a escola prepare os alunos para enfrentarem e responderem aos desafios e imprevisibilidade a que podem ser sujeitos (ME, 2017).

Num dos documentos orientadores designado *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória* (ME, 2017) foram definidos um conjunto de princípios, valores e competências que deverão ser incutidos e trabalhados com os alunos ao longo da escolaridade e em todas as áreas do currículo para que sejam indivíduos capazes de responder aos desafios do dia-a-dia. De entre as várias competências apontadas neste documento, é possível identificar algumas que são mais direcionadas para a área da matemática, não sendo exclusivamente direcionadas a esta área, como por exemplo, "Raciocínio e Resolução de Problemas".

Também, noutros documentos curriculares, orientadores da disciplina de matemática, como as *Aprendizagens Essenciais* (DGE, 2018) e o *Programa e Metas*

Curriculares de Matemática (MEC, 2013) é destacada essa mesma competência como uma das mais importantes para o aluno, por permitir que este desenvolva a capacidade de resolver problemas em diversas situações, analise as estratégias utilizadas bem como os resultados obtidos. Contudo, para além dessa, também são apontados o "Raciocínio Matemático" e a "Comunicação Matemática" como capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática (DGE, 2018). Estas capacidades, segundo as orientações apresentadas nas *Aprendizagens Essenciais*, devem ser trabalhadas com o aluno de forma a que este desenvolva a capacidade de raciocinar e argumentar as suas formulações, testando conjeturas, bem como as dos outros e desenvolva a capacidade de comunicar, tanto oralmente como por escrito, utilizando uma linguagem apropriada. Estas capacidades ditas transversais devem ser trabalhadas em articulação com todos os domínios da disciplina que estão organizados por conteúdos no documento *Programa e Metas Curriculares de Matemática*. Nesse documento que rege o ensino da matemática e que deve ser articulado com os restantes documentos orientadores, percebe-se que a disciplina está organizada em quatro domínios no 2º Ciclo do Ensino Básico: Números e Operações (NO), Geometria e Medida (GM), Álgebra (ALG) e Organização e Tratamento de dados (OTD). Em cada um destes domínios, é importante que a aprendizagem "se faça de forma gradual, respeitando os tempos próprios dos alunos e promovendo assim o gosto por esta ciência e pelo rigor que lhe é característico." (MEC, 2013, p.1). No mesmo documento são destacadas, ainda, três grandes finalidades do ensino da matemática, sendo elas a estruturação do pensamento, a análise do mundo natural e a interpretação da sociedade, ou seja, o ensino da matemática contribui para que o aluno seja capaz de organizar o seu pensamento através da "apreensão e hierarquização de conceitos matemáticos" (p. 2), para que compreenda alguns dos fenómenos do mundo que o rodeia e, ainda, para que analise e compreenda o funcionamento da sociedade (MEC, 2013).

Sintetizando, as experiências atuais da sociedade, fez com que as orientações para o ensino, mais particularmente para o ensino da matemática, fossem sofrendo algumas alterações. Isto é, o ensino da matemática deve estar centrado na resolução de problemas, orientado por experiências de aprendizagem ricas e diversificadas que proporcionem aos alunos a integração de diferentes conhecimentos e recursos, bem como diversificar momentos significativos de discussão e reflexão. (Barbosa, 2009; NCTM, 2017; Vale & Barbosa, 2020a).

1.2. Números Racionais

Em primeiro lugar, é pertinente referir que os conteúdos relativos aos números racionais se encontram no domínio dos *Números e Operações.* Ora, este domínio está presente desde o início da escolaridade e prolonga-se ao longo de todos os ciclos, promovendo uma aprendizagem progressiva, isto é, uma aprendizagem onde "a aquisição de certos conhecimentos e o desenvolvimento de certas capacidades depende de outros a adquirir e a desenvolver previamente." (MEC, 2013, p.1).

Neste sentido, no domínio acima mencionado, o *Programa e Metas Curriculares de Matemática* apontam para que, no início do 1º Ciclo sejam apresentadas as quatro operações através dos números naturais, sendo que, posteriormente, deve fazer-se a extensão dessas mesmas operações aos números racionais não negativos. É, ainda, destacada a importância da aquisição de fluência de cálculo neste ciclo que é conseguida através de uma boa capacidade de cálculo mental. Para os alunos a adquirirem, é fundamental que os professores trabalhem essa capacidade através de atividades convenientes e apropriadas. Ainda de acordo com o mesmo documento orientador e, ainda no mesmo ciclo, são introduzidas as frações, seguindo-se o seu tratamento e a construção dos números racionais positivos que representam, sendo esperando que seja feito com rigor e cuidado.

No 2º Ciclo, o documento *Programa e Metas Curriculares de Matemática* aponta para que, no mesmo domínio, seja concluído o estudo das operações com frações e completada a construção dos números racionais, sendo introduzidos os negativos. No final deste ciclo, os alunos deverão "mostrar fluência e desembaraço na utilização de números racionais em contextos variados, relacionar de forma eficaz as suas diversas representações (frações, dízimas, numerais mistos, percentagens)" (MEC, 2013, p. 14). Ainda neste domínio são abordadas as potências de base racional positiva e expoente natural, assim como as noções básicas de divisibilidade, "explorando-se o Algoritmo de

Euclides no 5.º ano e o Teorema Fundamental da Aritmética, que dele pode ser deduzido, no 6.º ano.” (MEC, 2013, p. 14).

Relativamente aos conteúdos presentes no *Programa e Metas Curriculares de Matemática* (MEC, 2013) relacionados especificamente com os números racionais, é de salientar que surgem, pela primeira vez, no 2º ano de escolaridade onde são apresentadas algumas frações como medidas de comprimento e de outras grandezas e, ainda, são representadas numa reta numérica através da decomposição de um segmento de reta em segmentos de igual comprimento. No ano seguinte, é apresentado o conceito de fração equivalente, a noção de número racional, é feita a ordenação de frações, assim como a sua adição e subtração e ainda é abordada a representação decimal. Já no último ano deste ciclo, ou seja, no 4º ano, para além de fortalecerem os conteúdos abordados nos anos anteriores, é abordada a simplificação de frações e a multiplicação e divisão de números racionais não negativos. Pela análise do documento *Programa de Matemática do Ensino Básico*, e, comparativamente com o atual documento orientador, é notória uma grande perda na abordagem conteúdos relativamente aos números racionais não negativos, uma vez que foi retirada a importância que era dada às diferentes interpretações dos números racionais sob a forma de fração e à introdução deste tema complexo através de situações do quotidiano (ME, 2007).

Ainda no que concerne aos conteúdos presentes no *Programa e Metas Curriculares de Matemática* (MEC, 2013) acerca dos números racionais, espera-se que, no 5º ano de escolaridade, sejam capazes de tornar frações irredutíveis, de adicionar e subtrair numerais mistos e de fazer aproximações e arredondamentos. Já no 6º ano são introduzidos os números racionais negativos, os conceitos de simétrico e de valor absoluto e a adição e subtração de números racionais negativos.

É de salientar que, depois de apresentados os conteúdos acerca dos números racionais em cada ano, é pertinente identificar algumas das perspetivas do ensino e aprendizagem da Matemática antes de nos focarmos no ensino e aprendizagem dos números racionais.

2. O ensino e aprendizagem da Matemática

2.1. Ensino tradicional e ensino exploratório

Como já foi referido anteriormente, houve um grande desenvolvimento do mundo que nos rodeia nas últimas décadas e, por essa razão, o ensino não ficou estanque. Neste sentido, o processo de ensino e aprendizagem da matemática também sofreu, ao longo do tempo, algumas transformações pelo que é possível fazer-se uma distinção entre o ensino tradicional (Zabala, 1998) e o ensino exploratório (Canavarro, 2011).

O primeiro, isto é, o modelo de ensino dito "tradicional" é caracterizado pelo facto de o professor assumir papel de transmissor de conhecimentos e controlador dos resultados (Zabala, 1998). Ainda segundo o mesmo autor, neste tipo de ensino, o professor é aquele que possui os saberes e tem como função informar e apresentar aos alunos os conhecimentos. Por sua vez, os alunos interiorizam e repetem os exercícios até que sejam capazes de os fazerem automaticamente. No mesmo sentido, Vale e Barbosa (2020b) caracterizam uma aula deste tipo de ensino da seguinte forma:

> o professor usa tarefas para introduzir um novo conceito, ou procedimento de um determinado conceito, em seguida, os alunos praticam esse conhecimento usando tarefas semelhantes. Isto é o que alguns chamam de ensino Triple X "exposição, exemplos, exercícios" ou I-R-F "Inicia-Responde-Avalia". Neste tipo de aula, não há necessidade de o professor estabelecer conexões ou comparar abordagens alternativas, pois está predeterminado o que todos os alunos devem fazer para resolver cada tarefa usando a mesma técnica e os mesmos conceitos. É improvável que surjam dificuldades por parte do aluno que surpreendam o professor, uma vez que as tarefas são propostas, imediatamente, depois de os alunos receberem o conteúdo e o procedimento. Muitas destas tarefas são consideradas "problemas" pelos professores, mas, na verdade, são meros exercícios ilustrativos. (p. 4).

Posto isto, é importante perceber em que momento é que este tipo de ensino deixa de ser predominante. Ponte (2002) num dos seus trabalhos aborda os momentos significativos no ensino da matemática em Portugal, fazendo uma breve contextualização histórica. Começa nos anos 40 e 50, onde refere que estes ficaram marcados pela memorização e mecanização, pois os alunos tinham de saber de cor demonstrações de teoremas e de praticar bastantes exercícios. Os anos 60, ficaram conhecidos, segundo o autor, pela "Matemática moderna" onde se introduziram novas matérias e outras foram eliminadas para que a matemática pura desse lugar à matemática com aplicações noutras áreas. Nesta altura, começou a defender-se que o papel do aluno não poderia ser 100%

passivo, tendo o professor que estabelecer diálogo para estimular a imaginação. Já nos anos 70 e 80 os programas foram alterados salientando o que era abstrato e formal, mas sem descartar a importância ao cálculo. O autor refere-se a estes programas como "uma curiosa mistura de Matemática formalista no estilo moderno com Matemática computacional no estilo tradicional." (p. 7). Por fim, já nos anos 90 os novos programas surgem com novas perspetivas e "é assim que a resolução de problemas assume um lugar de relevo no ensino básico, se admite o uso das novas tecnologias "quando possível e necessário" e se revaloriza a Geometria." (p. 9).

Atendendo às características acima apontadas relativamente ao ensino tradicional, é possível verificar, através do que foi mencionado por Ponte (2002), que nos anos 60 o ensino deixa de ser o dito tradicional, nomeadamente pelo facto de o aluno "ganhar voz".

Após todas as reformas que foram feitas aos programas a partir dessa época, os novos foram cada vez mais de encontro a outro tipo de ensino: o ensino exploratório.

> O ensino exploratório da Matemática defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão colectiva. Os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. (Canavarro, 2011, p. 11).

Na perspetiva desta autora, o professor desempenha, ao contrário do papel de transmissor no ensino tradicional, a importante tarefa de gerir o trabalho dos alunos, interpretar e compreender o modo como resolvem as tarefas e explorar as respostas para conseguir articular as ideias dos alunos com aquilo que se espera que aprendam.

Segundo Canavarro (2011) e Canavarro, Oliveira e Menezes (2014) numa aula deste tipo de ensino, é fundamental impor ritmo de trabalho e motivar os alunos para que não dispersem. Este tipo de aula encontra-se, geralmente, dividida em 3 ou 4 fases: a primeira onde o professor expõe a tarefa (problema ou investigação); a segunda onde os alunos exploram e interpretam a tarefa e onde o professor deve apoiá-los para que entendam o que se espera que façam; a terceira onde há discussão coletiva acerca das resoluções e onde o professor deve promover a argumentação dos alunos, mantendo um clima positivo na discussão; por fim, a quarta onde se sintetiza e "podem surgir novos conceitos ou procedimentos emergentes da discussão da tarefa como serem revistos e aperfeiçoados conceitos e procedimentos já conhecidos" (Canavarro et al., 2014, p. 219).

Como é evidente, a prática deste tipo de ensino exige do professor muito mais do que transmitir os saberes e de selecionar tarefas do manual para estes praticarem. De acordo com Canavarro et al. (2014), é necessária, como já foi referido acima, uma seleção adequada e valiosa das tarefas para que se criem boas oportunidades de aprendizagem através da exploração das tarefas propostas.

2.2. As tarefas

A partir do que referido anteriormente, percebe-se que é possível distinguir-se mais que um tipo de tarefas, uma vez que foram mencionadas aquelas mais rotineiras, características do ensino tradicional e aquelas que são desafiantes características do ensino exploratório. De acordo com Stein e Smith (2009), as primeiras "representam um certo tipo oportunidade para os alunos pensarem" e as segundas "representam um tipo diferente de oportunidade para os alunos pensarem" (p. 22).

Sobre a função das tarefas nos dois tipos de ensino referidos anteriormente, Ponte, Quaresma, Mata-Pereira e Baptista (2015) afirmam o seguinte:

> Num ensino da Matemática que se baseia principalmente na transmissão de conhecimentos pelo professor, o conceito de tarefa é de pouca utilidade. Pelo contrário, num ensino da Matemática que valoriza o papel ativo dos alunos, este conceito é essencial, uma vez que neste caso as tarefas são reconhecidas como elemento organizador da atividade dos alunos. (p. 111).

Ponte (2005) afirma que "quando se está envolvido numa actividade, realiza-se uma certa tarefa. Uma tarefa é, assim, o objectivo da actividade.". O mesmo autor refere, ainda, que a tarefa pode surgir de diferentes maneiras e pode ser enunciada logo de início ou ir sendo construída. Refere, também, que existem muitos tipos de tarefas matemáticas, das quais problemas, exercícios, investigações, projetos e tarefas de modelação, sendo necessário que o professor diversifique pois cada um desempenha um papel específico na aprendizagem. É, igualmente, importante salientar que "diferentes tipos de tarefas matemáticas podem contribuir para o desenvolvimento de capacidades fundamentais nos alunos, tais como o raciocínio matemático, a resolução de problemas e a comunicação matemática" (Oliveira & Borralho, 2014, p. 149), capacidades transversais destacadas no currículo de matemática como já foi referido no ponto anterior. No mesmo sentido, o NCTM (2017) reforça a ideia de que "um ensino eficaz da matemática envolve os alunos na resolução e discussão de tarefas que promovem o raciocínio matemático e a resolução de problemas, além de permitirem diferentes abordagens e várias estratégias" (p. 17).

Stein e Smith (2009) distinguem três fases através das quais passa a tarefa. A primeira, refere-se à tarefa como aparece nos materiais curriculares. A segunda fase é referente à tarefa apresentada pelo professor. E, por fim, a última fase, é como são implementadas/ realizadas pelos alunos. As mesmas autoras defendem que a natureza da tarefa se altera quando se passa de uma fase para outra, ou seja, uma tarefa que surge nos materiais curriculares pode ser alterada ao ser apresentada pelo professor, sendo que, por outro lado, também pode, ao ser realizada pelos alunos, diferente do que era esperado inicialmente. Para as autoras, a natureza da tarefa é influenciada pelo nível de exigência cognitiva, isto é, pelo "tipo e nível de pensamento necessários para a sua resolução" (NCTM, 2017, p. 18). Stein e Smith (1998, citado por NCTM, 2017), distinguem as tarefas matemáticas em quatro níveis de exigência cognitiva: exigência baixa (memorização), exigência baixa (procedimentos sem conexões), exigência alta (procedimentos com conexões) e exigência alta (fazer matemática). De um modo geral, na perspetiva destas autoras, as tarefas que exigem um nível de cognição mais elevado são aquelas em que os alunos estão envolvidos de forma ativa em questionamentos e explorações ou que estimulem a aplicação de procedimentos estabelecendo relações que lhes permitam uma compreensão dos conceitos. Já as tarefas que exigem um nível de cognição mais baixo são aquelas que estimulam os alunos para a utilização de procedimentos, fórmulas ou algoritmos sem relação com o significado ou que estimulem a utilização de memorizações prévias. Stein e Smith (2009), após a análise dos resultados de um estudo realizado em turmas de escolas dos 2º e 3º ciclos pertencentes a um projeto que visa estimular e estudar o desenvolvimento e implementação de novos programas de ensino da Matemática, concluíram que os alunos obtinham melhores resultados nas turmas onde eram apresentadas e implementadas tarefas de níveis elevados de exigência cognitiva.

Ponte (2005) propõe uma organização das tarefas tanto quanto ao grau de desafio como ao grau de estrutura. O grau de desafio relaciona-se com a dificuldade de uma questão, que vai, assim, desde o grau de dificuldade reduzido ao elevado. Já o grau de estrutura, que se relaciona com a natureza da tarefa, varia entre aberta e fechada, isto é:

> Uma tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas. (Ponte, 2005, p. 8).

O mesmo autor, interseta e organiza os graus de estrutura e desafio com o tipo de tarefa na figura seguinte:

Figura 2:Tipos de tarefas e o grau de desafio e estrutura

Através da sua análise, podemos constatar que os exercícios constituem tarefas fechadas, com grau de desafio reduzido; os problemas são tarefas fechadas, mas com grau de desafio elevado; as investigações e as explorações são ambas tarefas abertas, mas uma com grau de desafio elevado e outra com grau de desafio reduzido, respetivamente.

Em ambas as propostas de classificação acima apresentadas percebe-se que existem dois polos opostos, por um lado tem-se as tarefas que se relacionam mais com a memorização e o recurso a procedimentos e, por outro lado, tem-se as tarefas mais complexas que envolvem o pensamento e o envolvimento ativo do aluno. Apesar disso, Boavida et al. (2008) defendem que o nível de conhecimento do aluno influencia a interpretação da tarefa, podendo uma tarefa constituir-se de resposta automática com recurso à memória para um aluno e para outro envolver um caminho de descoberta.

De uma forma geral, os professores devem escolher tarefas que promovam o raciocínio matemático e a resolução de problemas para propor aos alunos (NCTM, 2017).

2.3. Os contextos e as conexões

Para além do que já foi referido acerca das tarefas, há que realçar um outro aspeto também analisado por Ponte (2005) - o contexto. Ponte e Quaresma (2012) entendem o contexto como “o universo experiencial associado a cada tarefa, que pode remeter para um campo da vida quotidiana em que o aluno tem maior ou menor experiência pessoal, ou remeter para o universo matemático.” (p. 196). Tendo isso em conta e aquilo que já foi mencionado anteriormente, sabe-se que no ensino tradicional, as tarefas surgiam num contexto de *matemática pura*. Contudo, no ensino exploratório, para que o envolvimento dos alunos seja maior, as tarefas devem surgir num contexto de *realidade* ou ainda, segundo Skovsmose (2000) num contexto de *semi-realidade*, que é intermédio aos dois mencionados anteriormente. Para o autor, este contexto constitui-se uma realidade construída e não uma realidade que de facto se observa, sendo totalmente descrita pelo texto da tarefa.

De modo a dar uma atenção especial aos contextos das tarefas, Freudenthal (1973, citado por Ponte & Quaresma, 2012) iniciou uma corrente denominada *educação matemática realística* na qual salienta que as situações que são primordiais para a aprendizagem matemática devem fazer parte da realidade dos alunos, de modo a que estes compreendam as situações e lhes atribuam significado.

Mais tarde, Gravemeijer (2005, citado por Ponte & Quaresma, 2012) referiu que “os alunos devem começar por trabalhar em contextos específicos. Começam assim a elaborar modelos que inicialmente surgem como “modelos de” (situações concretas).” (p. 201). Segundo o mesmo autor, estes modelos permitem estratégias informais de resolução ao nível da situação definida no problema contextualizado. Consoante os alunos adquirem experiências com problemas semelhantes, vão prestando mais atenção às relações e estratégias, alterando-se o papel do modelo, assumindo uma natureza mais objetiva e abstrata. Deste modo, o modelo constitui-se mais importante para suportar o raciocínio matemático do que para representar um problema contextualizado, tornando-se uma base para o trabalho em Matemática formal (Ponte & Quaresma, 2012).

Uns anos mais tarde, Palm (2009, citado por Ponte & Quaresma, 2012) inspirado pela teoria da *educação matemática realística* criou um quadro concetual de *situações autênticas* de forma a determinar as questões envolvidas na noção de contexto. Segundo o autor, nessas situações, a *abrangência* e a *fidelidade* são os elementos que desempenham um papel central e definem a *representatividade* de uma situação. A *abrangência* engloba a diversidade dos aspetos da situação que são simulados e a *fidelidade* diz respeito ao grau como cada um deles se aproxima de uma descrição exata da situação. Palm (2009, citado por Ponte & Quaresma, 2012) apresenta uma tabela com os aspetos importantes na simulação de situações reais, na qual destaca os acontecimentos, as questões, as informações, a apresentação, as estratégias de solução, as circunstâncias, as exigências da solução e o propósito de encontrar a solução no contexto. De entre esses aspetos, nas circunstâncias defende que é necessário ter em atenção as ferramentas disponíveis e a orientação do professor. Também destaca a importância das oportunidades dadas para interação entre os alunos (em grupo ou em discussão coletiva com toda a turma). O autor reconhece que os aspetos mencionados variam de tarefa para tarefa e reforça a ideia de que o trabalho com problemas com alto grau de representatividade que incluem contextos diversificados levam os alunos a um envolvimento cada vez mais forte. (Ponte & Quaresma, 2012).

Mediante tudo o que foi referido, e, segundo Ponte e Quaresma (2012), na aprendizagem da Matemática os alunos precisam de trabalhar em diferentes contextos (realísticos, de semi-realidade e matemáticos), devendo ter por base as suas experiências em contextos de realidade e as experiências matemáticas anteriores. De acordo com os mesmos autores, mais do que motivar, o contexto deve ser um suporte para a aprendizagem da Matemática.

Efetivamente, as tarefas devem ser selecionadas e articuladas tendo em conta, nomeadamente, os diversos contextos de forma a que proporcionem "um percurso de aprendizagem coerente, que permita aos alunos a construção dos conceitos fundamentais em jogo, a compreensão dos procedimentos matemáticos, o domínio das notações e formas de representação relevantes, bem como das conexões dentro e fora da Matemática" (Ponte, 2005, p. 18).

De facto, um outro aspeto a ter em conta na construção ativa do conhecimento pelos alunos é o estabelecimento de conexões. Quando se pensa em conexões, a ideia que está associada, pelo significado da palavra, é a ideia de ligação/ relação de alguma coisa com outra. No Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), é mencionado que os alunos devem ter a capacidade de estabelecer conexões entre conceitos e relações matemáticas, mas também entre esses conceitos e relações e situações não matemáticas. Neste sentido, Boavida et al. (2008) referem que é importante que o professor ajude os alunos a estabelecerem essas mesmas conexões de forma a não verem a Matemática como uma Ciência isolada sobre si, mas como uma rede de relações com outras áreas curriculares e com o mundo ao seu redor.

De facto, segundo Vale e Pimentel (2011), o facto de os alunos recorrerem à memorização em alternativa à compreensão, leva-os ao insucesso na matemática. Assim, segundo as mesmas autoras, através do estabelecimento de conexões os alunos, de uma forma integrada, vão construir um novo conhecimento a partir de conhecimentos adquiridos anteriormente. Desta forma,

> os estudantes obtêm um conhecimento mais profundo e duradouro, assim como desenvolvem a curiosidade e a criatividade, quando se realçam as conexões entre as ideias matemáticas que estão a ser trabalhadas e os conhecimentos matemáticos já adquiridos, e também os da vida de todos os dias. (Vale & Pimentel, 2011, p. 33).

Para Canavarro (2017), as conexões servem os propósitos de ampliar a compreensão das ideias e conceitos envolvidos e de permitir dar sentido à Matemática como coerente, articulada e poderosa.

Boavida et al. (2008) mencionam que as conexões matemáticas visam tanto à criação e exploração de situações matemáticas ligadas a problemas da vida real como a valorização das relações entre diferentes temas matemáticos. No mesmo sentido, Amado, Carreira e Canavarro (2019) referem que

> As conexões matemáticas podem ser entendidas como um processo cognitivo através do qual um indivíduo estabelece relações entre duas ou mais ideias, conceitos, definições, representações e teoremas matemáticos (conexões intra-matemáticas), ou relações entre estes e os conteúdos de outras disciplinas ou situações do mundo real (conexões extra-matemáticas). (p. 4).

Ora, neste sentido, já foram mencionadas algumas conexões intra-matemáticas que deverão ser feitas ao longo do processo de ensino e aprendizagem, nomeadamente no ensino e aprendizagem dos números racionais, permitindo que os alunos tenham uma melhor compreensão dos conceitos. Realçam-se, assim, as conexões entre representações e significados dos números racionais. Por outro lado, relativamente às conexões extra-matemáticas, foi apontada como uma das dificuldades neste mesmo conteúdo a falta de conexões entre os conceitos e as experiências de vida dos alunos.

De facto, Boavida et al. (2008) consideram uma ótima fonte de trabalho o desenvolvimento, em sala de aula, de conexões com a realidade e as experiências dos alunos, com os seus interesses pessoais, com outras áreas do currículo e dentro da própria matemática. Sendo o trabalho de sala de aula realizado desta forma, é possível contrariar a ideia de que os conceitos matemáticos são desconectados uns em relação aos outros além disso, permitem que o aluno alargue tanto a sua experiência matemática como a sua compreensão sobre a aplicabilidade da matemática no mundo real, que vai muito além da resolução de exercícios padronizados (Amado et al., 2019).

De acordo com Silver, Ghousseini, Gosen, Charalambous, & Font Strawhun (2005, citado por Jacinto & Pires, 2019), a resolução de problemas pode suscitar o estabelecimento de conexões, nomeadamente quando são solicitadas diferentes abordagens: "resolver um problema de várias formas pode impelir a comparação das várias estratégias desenvolvidas, alternar entre diferentes representações, relacionar diferentes conceitos e ideias que, por sua vez, levam à construção de conhecimento matemático" (p. 191).

Vale (2017a) analisou as conexões da matemática com a arte realçando a ideia de que esta é gerada e inspirada na matemática. Segundo a autora, através do estabelecimento deste tipo de conexões é possível fazer matemática de modo mais intuitivo e envolvente. Também refere que já há muito que a matemática é considerada difícil e pouco interessante, acrescentando que deve ser mostrada a sua beleza, potencialidade, poder e utilidade ao aluno. A autora afirma que "fazer arte no seu sentido mais inclusivo e nas suas diferentes dimensões (e.g. arte visual, desenho, pintura, arquitetura, música, dança, poesia) é fazer matemática de uma forma mais intuitiva e lúdica" (p. 225). Há muitas obras de diferentes artistas que podem ser usadas nas aulas de matemática de diversas formas, sendo que o caso mais evidente é o trabalho dessas obras na geometria; mas não só, há obras que podem ser utilizadas no trabalho com os números, nomeadamente com os números racionais estabelecendo relações entre as partes e o todo (Vale, 2017a).

De uma forma geral, a educação de hoje deve valorizar as conexões. Nomeadamente em educação matemática, é fundamental que os conceitos não surjam desconectados entre si e desconectados com a vida real, pois, para além do que já foi referido, "ligar a Matemática à vida real permite realçar a sua importância no desenvolvimento da sociedade actual, quer do ponto de vista científico, quer social." (Boavida et al., 2008, p. 38).

3. O ensino e a aprendizagem dos números racionais não negativos

De acordo com Behr, Lesh, Post e Silver (1983), os números racionais são considerados como um dos temas matemáticos mais complexos e importantes do ensino básico. O mesmos autores salientam a sua importância mediante três perspetivas: (a) perspetiva prática, na medida em que a capacidade de lidar com estes conceitos melhora a capacidade de compreender e resolver situações e problemas do dia-a-dia; (b) perspetiva psicológica, dado que os números racionais proporcionam o desenvolvimento e a expressão das estruturas mentais necessárias ao crescimento intelectual; e (c) perspetiva matemática, pois a compreensão destes conceitos fornecem uma base na qual as operações algébricas elementares podem ser baseadas posteriormente.

No mesmo sentido, Vale e Barbosa (2020a) consideram o tema dos números racionais estruturante no desenvolvimento matemático dos alunos, salientando, também, o facto de que o estudo destes números confere grande complexidade devido, em parte, às suas diferentes interpretações. Também Guerreiro, Morais, Serrazina e Ponte (2018) realçam a complexidade dos números racionais pelo facto de estes assumirem diferentes representações e significados.

3.1. Representações e significados

Mediante o que foi referido, torna-se importante analisar as representações e os significados que um número racional pode tomar.

Post, Cramer, Behr, Lesh e Harel (1993, citado por Quaresma & Ponte, 2012) concluem, através dos resultados de estudos desenvolvidos pelo *Rational Number Project,* que a compreensão de número racional por parte dos alunos está relacionada com "(i) a flexibilidade na conversão entre as diferentes representações de número racional; (ii) flexibilidade nas transformações dentro de cada representação; e (iii) a independência cada vez maior das representações concretas." (pp. 40-41).

Neste sentido, Ponte e Quaresma (2011) reforçam o papel fundamental das representações no trabalho com os números racionais. Um número racional pode representar-se como o quociente entre dois números inteiros *a* e *b,* sendo *b* diferente de zero, ou seja, na forma de fração; pode também representar-se na forma de dízima e de percentagem, sendo esta última representação aquela com que os alunos mais contactam antes da sua aprendizagem na escola (Morais, Cerca, Quaresma & Ponte, 2014). Uma outra representação dos números racionais são os numerais mistos, uma representação que não deve ser mecanizada pelos alunos para a sua conversão em fração ou decimal, sem que os alunos os compreendam (Ventura, 2013). Torna-se, também, importante salientar que,

> Para além das representações simbólicas (fração, dízima, percentagem), outras representações de número racional como a verbal e a pictórica assumem um papel igualmente importante. A representação verbal está sempre presente, pois todas as outras representações (incluindo as simbólicas) têm uma expressão verbal. Pelo seu lado, as representações pictóricas (que podem estar ou não presentes) distinguem-se pelo seu cunho semiformal, que facilita a interpretação dos alunos (Ponte & Quaresma, 2011). Na aprendizagem dos números racionais é muito importante que o aluno seja capaz de estabelecer conexões entre diferentes representações. (Morais et al., 2014, p. 93).

Uma representação que difere das outras é a reta numérica, "pois não só sugere a iteração da unidade, mas também a subdivisão simultânea de todas as unidades iteradas." (Ponte & Quaresma, 2011, p. 58).

Por outro lado, sabe-se que, qualquer que seja a representação que o número racional assuma, a sua interpretação depende da unidade que se considera (Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross, 2010; Monteiro & Pinto, 2005, citados por Morais et al., 2014). Esta unidade poderá ser contínua ou discreta. A primeira pode ser dividida infinitamente (como um bolo ou o comprimento de um objeto) e a segunda é indivisível, mas pode ser contada (como o número de berlindes). É fundamental para a aprendizagem das crianças que contactem com ambas as grandezas (Morais et al., 2014).

Ainda relativamente às representações, é igualmente relevante a ideia de que "os alunos devem compreender que um mesmo número racional pode ser expresso através de diferentes representações simbólicas, nomeadamente numeral decimal, percentagem ou fração." (Guerreiro et al., 2018, p. 552), ou seja, devem ser trabalhados de forma flexível e não isoladamente.

Como já foi referido, o ensino e a aprendizagem dos números racionais torna-se complexo também pelos múltiplos significados que podem assumir. Em conformidade com o que foi referido através da análise do currículo de matemática, e, de acordo com Silva, Boavida e Oliveira (2012) nos primeiros anos em que os alunos contactam com os números racionais, fazem-no intuitivamente, partindo de situações de partilha equitativa. Nos anos que se seguem, o estudo dos números racionais é aprofundado e, através do recurso à resolução de problemas, trabalham outros significados da fração.

Ao longo dos tempos foram sendo feitas várias categorizações dos significados de fração. Primeiramente, surgiram quatro categorias interrelacionadas: razão, operador, quociente e medida, sendo que a ideia de parte-todo está implícita nas quatro anteriores, não se considerando por si só uma quinta categoria (Kieren, 1976, citado por Vale & Barbosa, 2020a). Com o passar do tempo, vários modelos foram surgindo, com mais ou menos categorias. De uma forma geral, autores como, por exemplo, Monteiro e Pinto (2005), Vale, Sousa e Pimentel (2007), Pinto (2011), Quaresma e Ponte (2012), Silva et al. (2012) e Ventura (2013) analisam e descrevem cada um dos significados de fração de acordo com a seguinte categorização:

O significado da fração como *parte-todo* surge quando a fração representa uma relação entre o número de partes da unidade dividida que se toma (numerador) e entre o número total de partes em que a unidade foi dividida (denominador), ou seja, entre estamos perante este significado quando um todo (contínuo ou discreto) se divide em partes iguais (com a mesma área) e relacionamos as partes consideradas com o todo (Vale et al., 2007; Quaresma & Ponte, 2012; Ventura, 2013). Admite-se, ainda, que este significado de fração é considerado essencial para o desenvolvimento da compreensão dos restantes significados (Silva et al., 2012), por essa razão, o ensino não pode ser limitado a este significado de fração (Ventura, 2013).

O significado da fração como *quociente* surge associado à operação de dividir um número por outro onde o numerador e o denominador representam o todo, surgindo, muitas vezes associado a problemas de partilha (Vale et al., 2007; Quaresma & Ponte, 2012; Ventura, 2013). Silva et al. (2012) considera que este significado de fração é um dos que mais contribui para a compreensão da multiplicação de frações. Ainda Lamon (2006, citado por Ventura, 2013) refere que a função do dividendo e do divisor na operação divisão tem de ser compreendida, por isso, a base para que se entenda este tipo de interpretação é a divisão em partes iguais.

Um outro significado de fração que contribui para a compreensão da multiplicação é o significado de fração como *operador*, sendo necessário, neste tipo de interpretação um raciocínio multiplicativo (Silva et al., 2012). Neste tipo de interpretação, os números racionais são como *transformadores*, ou seja, é uma ação que se realiza sobre um número transformando o seu valor (Vale et al., 2007; Ventura, 2013).

Já o significado de fração como *medida* pode ser considerado como um caso especial do significado parte-todo, pois neste caso, a unidade vai sendo partida em unidades cada vez menores, ou seja, considera-se uma quantidade relativamente a uma determinada unidade quantitativa (Vale et al., 2007; Wheeldon, 2008, citado por Ventura, 2013). "A recta numérica é uma boa representação de interpretação de fracções como medida" (Vale et al., 2007, p. 49). De acordo com Lamon (2006, citado por Ventura, 2013) a compreensão deste significado implica a identificação da unidade de medida, a determinação de um comprimento e medição de um comprimento através da repartição da unidade de medida.

Por fim, o significado de fração como *razão* é considerado por Pinto (2011) e Silva et al. (2012) como a mais "natural" para a compreensão da equivalência de frações. Nesta interpretação, a fração traduz uma relação entre duas quantidades, não envolvendo a ideia de partilha (Vale et al., 2007). Contudo, segundo Ventura (2013) e Monteiro e Pinto (2005) é importante fazer-se uma distinção entre dois tipos desta mesma interpretação: razão "parte-parte", isto é, a razão entre duas quantidades do mesmo tipo (duas partes de um todo); e a razão entre duas quantidades distintas.

De uma forma geral, à semelhança do que foi mencionado relativamente às representações, os professores não devem trabalhar exclusivamente um significado de fração. Charalambous e Pitta-Pantazi (2006, citado por Ventura, 2013) confirmam essa ideia dizendo que é necessário que sejam abordados os cinco significados para que se desenvolva o conceito de número racional. Acrescentam, ainda, que mesmo que os alunos compreendam o significado parte-todo e não lhes forem apresentados mais significados, poderão encontrar dificuldades na aquisição de outros significados que poderão não superar. Ventura (2013) refere, ainda, que a introdução ao estudo dos números racionais através desse significado pode ser questionada, pois,

> apesar de os significados se relacionarem entre si, cada um tem as suas características particulares e nem todos são um bom ponto de partida; os significados de operador e quociente são menos poderosos que os significados de medida, razão e parte-todo, para se iniciar a aprendizagem dos números racionais. (Lamon, 2007, citado por Ventura, 2013, p. 49)

Ventura (2013) analisou aquilo que vários autores defendiam sobre o assunto e concluiu que será vantajoso que o ensino dos números racionais se inicie pelos significados parte-todo e quociente em simultâneo, seguindo com os significados operador e medida e, por último, o significado razão, por considerar o mais complexo.

Em suma, é preciso ter em conta os diferentes significados de fração e as diferentes representações dos números racionais, sendo considerado um desafio, tanto para alunos como para professores, o estabelecimento das conexões necessárias para a compreensão desses números (Silva et al., 2012).

3.2. Dificuldades na aprendizagem

Como já foi referido, sabe-se que o ensino e a aprendizagem dos números racionais acarretam algumas dificuldades, tanto pelas suas diferentes representações como pelos significados que as frações podem assumir. Importa, assim, perceber quais os fatores que estão na origem das dificuldades dos alunos.

Primeiramente, uma dificuldade que pode surgir desde logo é na transposição das conceções dos números inteiros para os números racionais (Oliveira, 1994 citado por Monteiro & Pinto, 2005; Pinto, 2011; Ventura, 2013). Já Vanhille e Baroody (2002, citado por Pinto & Ribeiro, 2013; Ventura, 2013) apontam que algumas das dificuldades dos alunos a operar com frações prendem-se à falta de conexão entre os conceitos e as suas vivências (necessárias para que o aluno construa o seu conhecimento concetual) e ao fraco desenvolvimento do raciocínio multiplicativo que se torna essencial para a compreensão das frações.

Ponte e Quaresma (2011) acrescentam que algumas dificuldades advêm do facto de os alunos perderem "de vista a necessidade de todas as partes em que a unidade está dividida serem iguais, contam as partes incorrectamente e, dada uma parte, têm dificuldade em relacioná-la com o todo correspondente." (p. 57). Também relativamente à unidade de referência, Monteiro e Costa (1996, citado por Ventura, 2013) referem que os alunos demonstram dificuldades em comparar frações, por não terem a mesma unidade de referência, como por exemplo na comparação de $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

Quaresma e Ponte (2012) seguindo aquilo que foi mencionado por Monteiro e Pinto (2005), apontam

> (i) confusão entre décimas e centésimas, por exemplo confundem 2,5 com 2,05; (ii) confundirem o número de algarismos com a quantidade, quando, por exemplo, confundem que 1,456 é maior que 1,5, (iii) e acharem que entre 0,1 e 0,2 não existem números racionais. (p. 42)

Estas confusões podem ser explicadas pelo facto de os alunos trabalharem representações decimais sem terem compreendido o conceito de número decimal. Além destas dificuldades, as mesmas autoras apontam o facto de muitos demonstrarem dificuldades na ligação entre as representações decimais e sob a forma de fração. Por esta razão, como já foi apontado, estas representações devem ser trabalhadas em simultâneo.

Também na representação na forma de percentagem os alunos revelam algumas dificuldades, nomeadamente

> (i) na compreensão do símbolo %, a que por vezes não atribuem significado, colocando-o em qualquer lugar e não fazendo distinção entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{4}$ %, (ii) na utilização incorrecta da "regra do numerador", acreditando que o símbolo da percentagem à direita do número pode ser substituído por uma vírgula à esquerda do número (e transformando, por exemplo, 8% em 0,8), (iii) na procura da percentagem (por exemplo escrevendo 60 = 50% de 30), e (iv) no cálculo de percentagens maiores que 100. (Parker & Leinhardt, 1995, citado por Quaresma & Ponte, 2012, p. 42).

De um modo geral, o ensino e a aprendizagem dos números racionais devem procurar a compreensão concetual dos diferentes significados, assim como deve ser disponibilizado o tempo necessário para que os alunos adquiram os diferentes conceitos e compreendam as relações existentes entre os diferentes significados e representações (Ventura, 2013). Ponte e Quaresma (2011) referem que, através da reinterpretação das ideias e conceitos, os alunos adquirem novos conceitos e/ou reforçam os que já possuíam, conseguindo uma compreensão mais alargada e profunda das ideias matemáticas.

3.3. A resolução de problemas e as estratégias visuais

A resolução de problemas já aqui foi referida como uma das capacidades transversais presentes nas orientações da disciplina, sendo a sua importância realçada em vários documentos. Aliás, como refere Vale (2017b) "um ensino da matemática deve envolver os alunos na resolução e discussão de tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas, capacidades que devem ser enfatizadas nas salas de aula de matemática de todos os níveis." (p. 136).

Neste sentido, primeiramente, torna-se importante definir problema. De acordo com Vale, Pimentel e Barbosa (2015) e Vale (2017b), um problema é "como uma situação que envolve o aluno em atividade, mas para a qual não conhece à partida, ou não é óbvio, um caminho para chegar à solução." (p. 41 e p. 137, respetivamente). As autoras defendem que esta definição pode ser a mesma que define um mero exercício, sendo que, por isso, o que os distingue é que no problema os alunos têm de escolher os métodos e as estratégias que devem pensar em cada situação. Também anteriormente se fez uma distinção entre os problemas e os exercícios, que, segundo Ponte (2005) está relacionada com o grau de desafio. Neste sentido, de acordo com Serrazina (s.d), um bom problema deverá possuir as seguintes características:

> - ser desafiante e interessante a partir de uma perspectiva matemática;
> - ser adequado, permitindo relacionar o conhecimento que os alunos já têm de modo que o novo conhecimento e as capacidades de cada aluno possam ser adaptadas e aplicadas para completar tarefas;
> - ser problemático, a partir de algo que faz sentido e onde o caminho para a solução não está completamente visível. (p. 3).

No seguimento, e, de acordo com Cai e Lester (2010, citado por Vale at al., 2015), um problema deve obedecer aos seguintes critérios:

> (1) tem incorporadas ideias matemáticas importantes e úteis; (2) requer pensamento de ordem elevada; (3) contribui para o desenvolvimento concetual; (4) permite ao professor avaliar a aprendizagem dos alunos; (5) permite múltiplas formas de abordagem e estratégias de resolução; (6) tem várias soluções e permite opiniões ou tomadas de decisão; (7) envolve os alunos e fomenta o seu discurso; (8) conecta-se com outras ideias matemáticas importantes; (9) desenvolve a habilidade para usar a matemática; e (10) é uma oportunidade para praticar destrezas importantes. (p. 43).

Neste sentido, a resolução de problemas permite ao aluno ser sujeito ativo na sua aprendizagem, relacionando os conhecimentos que possui. Vale (2017b) reforça essa mesma ideia acrescentando que a partilha de ideias torna-os mais criativos e igualmente capazes para a resolução dos problemas do dia-a-dia.

A partir do que é referido por Boavida et al. (2008), sabe-se que, alguns autores, consideram a resolução de problemas como o processo de aplicar o conhecimento adquirido anteriormente a novas situações. Barbosa (2009) refere que este ensino *para* a resolução de problemas se assemelha ao ensino tradicional, na medida em que são dados os conteúdos para os alunos aplicarem. Mas também pode considerar-se a resolução de problemas numa perspetiva mais abrangente, isto é, o ensino da matemática através da resolução de problemas, sendo que estes surgem em primeiro plano (Boavida et al., 2008). Nesta última visão do ensino da matemática através da resolução de problemas, acredita-se que nem todos os problemas são desafiantes, com nível de desafio que permita aos alunos a especulação, o trabalho e a investigação de ideias matemáticas e modos de pensar importantes (Vale et al., 2015).

Como já foi referido, a aprendizagem dos números racionais é complexa devido a vários fatores já mencionados, por isso, torna-se importante que o ensino desde tema preconize situações nas quais seja possível estabelecer diferentes conexões, nomeadamente entre representações (Ventura, 2013).

Para Barbosa (2009), “as representações têm vindo gradualmente a ocupar um papel de destaque na aprendizagem da Matemática e, em particular, na resolução de problemas.” (p. 27). O NCTM (2000, citado por NCTM, 2017) também destacou o papel das representações matemáticas, acrescentando que constituem características importantes das estruturas mentais e das ações matemáticas. Middleton, van den HeuvelPanhuizen e Shew (1998, citado por Ventura, 2013) afirmam que é fundamental no ensino dos números racionais recorrer a várias formas de representação desses números, “incluindo as gráficas, que personifiquem a natureza das grandezas (discreta e contínua), e que possam ser utilizadas como um modelo de forma a facilitar a sua compreensão” (p. 74). Também Hiebert e Carpenter (1992, citado por Ventura, 2013) reforçam essa ideia acrescentando que se as representações mentais (internas) fizerem parte de um conjunto de representações, os alunos compreendem os conceitos matemáticos, sendo que o grau de compreensão se relaciona com as conexões que consegue estabelecer.

De acordo com Lesh, Post e Behr (1987, citado por Barbosa, 2009; Vale & Barbosa, 2020a) as representações que estão associadas à aprendizagem da matemática e à resolução de problemas, podem ser classificadas como: concretas (materiais manipuláveis); verbais (linguagem); simbólicas (notação); semi-concretas (pictóricas); e contextuais (situações da vida real). Esta categorização tem por base os trabalhos de Bruner (1962, citado por Boavida et al., 2008) que refere que existem várias formas de representar as ideias matemáticas, destacando as representações ativas, as representações icónicas e as representações simbólicas. As primeiras estão relacionadas com a ação, onde o manuseamento adequado de objetos (de uso corrente ou produzido como material didático) e a simulação de situações desencadeiam a criação de modelos ilustrativos que contribuem para a construção de conceitos (Boavida et al., 2008). A par disso, Vale (2002) destaca a utilização de materiais manipuláveis por poder constituir-se uma boa ferramenta para o professor, na medida em que os saiba utilizar para os fins que pretende, mas, tendo em conta as limitações que possam ter. A autora refere, ainda, que mais importante que o material é a experiência que o aluno vai vivenciar, pois irá ocorrer aprendizagem se essa experiência for significativa. No seguimento e, relativamente às representações icónicas, tal como o nome incita, estão relacionadas com a utilização de "figuras, imagens, esquemas, diagramas ou desenhos para ilustrar conceitos, procedimentos ou relações entre eles" (Boavida et al., 2008, p. 71). Por fim, segundo os mesmos autores, as representações simbólicas, não correspondem apenas aos símbolos como suscita o nome, mas a todas as linguagens envolventes num conjunto de ideias matemáticas que conduzem à sua compreensão. Realça-se, ainda, que as diferentes representações devem ser utilizadas em simultâneo, sendo importante o estabelecimento de conexões entre elas.

No seguimento desta ideia, Vale e Barbosa (2020a) num dos seus trabalhos, destacam "a estratégia de *procurar ver* que conduz a resoluções visuais, com recurso a diferentes representações visuais, em contraponto com as resoluções não visuais, que recorrem principalmente a representações algébricas, numéricas e verbais." (p. 221). Apontam a estratégia de *procurar ver* como uma "estratégia de pensamento que envolve a perceção visual de objetos matemáticos combinada com o conhecimento e experiências passadas." (Vale & Barbosa, 2020a, p. 223). As mesmas autoras salientam que o facto de os alunos terem diferentes preferências, levam-nos à utilização de diferentes estratégias de resolução de problemas de acordo com os estilos de aprendizagem diferentes, sendo eles:

> (1) *visuais ou geométricos* – aqueles que preferem usar esquemas pictórico-visuais mesmo quando os problemas são mais facilmente resolvidos com meios analíticos; (2) *não-visuais, analíticos ou verbais* – aqueles que preferem utilizar abordagens mais verbais, mesmo nos problemas em que é relativamente mais simples resolvê-los através de uma abordagem visual; e (3) *mistos, integradores ou harmónicos* – aqueles que não têm preferência específica nem pelo pensamento lógico-verbal nem pelo visual-pictórico, e tendem a combinar métodos analíticos e visuais. (p. 223).

Relativamente às estratégias de resoluções não visuais sabe-se que não dependem das representações visuais para chegar à solução, dependem de representações numéricas, algébricas e verbais (Vale & Barbosa, 2020a). Vale (2017b) refere que a forma como os problemas são colocados incitam a resoluções não visuais por parte dos alunos, contudo, torna-se fundamental mostrar que existem outros modos de resolução que também são válidos. Uma das alternativas são as estratégias de resoluções visuais que dizem respeito ao modo como a informação matemática é apresentada na abordagem inicial ou durante a resolução do problema (Vale & Barbosa, 2020a). De acordo com as mesmas autoras, recorrem a diferentes representações visuais como parte fundamental do processo para chegar à solução. Em conformidade com o que refere Vale (2015) estas resoluções não foram sempre aceites como válidas. A autora acrescenta que, pelo que se sabe da história da matemática, estas resoluções foram desenvolvidas de uma forma exponencial, seguindo-se um retrocesso e, mais tarde, no século XX ressurgiram como uma forte aliada do raciocínio matemático.

De facto, várias investigações têm destacado a importância da visualização e do papel das imagens mentais e têm contribuído para que a utilidade das representações na formação dos conceitos e na resolução de problemas seja reconhecida (Barbosa, 2009). Também é destacado pelo NCTM (2017) o papel das representações visuais por ajudarem os alunos a aperfeiçoar os seus conhecimentos, por darem sentido aos problemas e por apoiarem o discurso. Para alguns autores como Polya (2004) e Presmeg (2014, citados por Vale & Barbosa, 2020a), as representações visuais contribuem para que se cheguem a soluções poderosas e criativas. Para Vale e Barbosa (2017), a imagem visual transmite a maior parte da informação, permitindo compreender ou explicar um determinado conceito de forma mais rápida do que uma sequência de palavras.

Particularmente nos números racionais sobre a forma de fração, Vale e Barbosa (2020a) referem que

> os alunos devem explorar uma diversidade de contextos, representações e tarefas, como desenhar figuras, realizar recortes/dobragens, manipular conjuntos, identificar frações, localizar frações numa reta numérica. O recurso a materiais manipuláveis (representações ativas) no ensino das frações pode ajudar ao desenvolvimento de estratégias para aplicar em processos como comparar, encontrar equivalências e realizar operações, mas importa realçar que deverá ser estabelecida uma conexão com as representações simbólicas (p. 237).

Segundo as mesmas autoras, os modelos mais utilizados são os modelos discretos (conjuntos de objetos), os modelos de área, a reta numérica e o modelo da barra. Os primeiros fornecem uma boa compreensão do significado parte-todo; os modelos de área podem ajudar a perceber o papel do denominador e, de acordo com Cramer e Wyberg

(2009, citado por Vale & Barbosa, 2020a), constituem uma das representações mais fortes pelo facto de o círculo ou retângulo simbolizarem a unidade, simbolizando, também, o conceito de fração parte-todo e o significado de grandeza relativa das frações; para Siegler, Thompson e Schneider (2011, citado por Vale & Barbosa, 2020a) a reta numérica "ajuda a suportar um modelo integrado que associa as frações aos números reais." (p. 237); por fim, o modelo da barra, é, segundo Ng e Lee (2009, citado por Vale & Barbosa, 2020a) utilizado a fim de simplificar a resolução do problema que envolva frações, números inteiros, razões e percentagens.

Este último, o modelo da barra, é destacado por Ventura e Oliveira (2014) pela sua utilidade numa fase inicial para exploração das representações simbólicas dos números racionais, nomeadamente em contextos que envolvam medida e divisão. De acordo com as mesmas autoras que seguiram o pensamento de van Galen et al. (2008), este modelo permite o estabelecimento de relações entre números racionais e quantidades, pode utilizar-se para diferentes significados de números racionais e permite o estabelecimento de conexões entre as diferentes representações destes números.

De uma forma geral, segundo van den Heuvel-Panhuize (2003, citado por Morais, Serrazina & Ponte, 2018), "os modelos podem ser entendidos como representações que refletem aspetos matemáticos e estruturas consideradas relevantes para a situação em que se utilizam, podendo assumir diferentes formas" (p. 29).

Efetivamente, de acordo com Vale e Barbosa (2020a), torna-se fundamental que se trabalhem, de forma articulada, as resoluções visuais e numéricas, estabelecendo relações entre as duas para ser possível aos alunos atribuírem significado às expressões matemáticas e às palavras envolvidas. Assim, os professores devem propor aos alunos tarefas que os encorajem na procura de diferentes modos de resolução e devem ter em consideração que, na resolução de problemas, existem alunos que preferem as estratégias visuais e outros as analíticas (Vale at al., 2015). De facto, segundo Vale e Barbosa (2020a), ao resolver-se um problema de diferentes formas consegue desenvolver-se o conhecimento, o pensamento matemático, assim como a criatividade do aluno.

4. Estudos Empíricos

Neste ponto faz-se o levantamento de alguns estudos empíricos acerca da resolução de problemas com números racionais, das representações visuais e das conexões matemáticas. Realça-se o facto de que tem vindo a aumentar o número de estudos em Portugal relativamente a estas temáticas em estudo. Assim, relativamente à resolução de problemas com números racionais e/ ou com recurso a representações visuais tem-se os trabalhos realizados por Sá (2020), Barreto (2019), Esteves (2018), Vieira (2018), Laranjeira (2017), Canelas (2016), Ventura (2013) e Pinto (2011). No que se refere à potencialidade dos contextos das tarefas para o estabelecimento de conexões tem-se, por exemplo, o trabalho de Gomes (2021) e Fernandes (2019). Exclusivamente acerca das conexões matemáticas, tem-se o estudo realizado por Melo (2013), Ferreira (2012) e Camacho (2011).

O estudo realizado por Sá (2020) pretendeu identificar os conhecimentos dos alunos de uma turma do 6º ano de escolaridade relativamente aos números racionais positivos, às diferentes representações e ao modo como as utilizam na resolução de problemas. Para isso, a autora optou por uma investigação qualitativa de caráter descritivo e interpretativo e utilizou diferentes instrumentos de recolha de dados como observações, conversas e produções escritas pelos alunos. Concluiu que os alunos não demonstraram grandes dificuldades ao nível da compreensão dos números racionais, apresentaram grande destreza na conversão entre as diferentes representações dos números racionais e demonstraram alguma dificuldade na resolução de problemas com estratégias visuais, recorrendo, constantemente, a estratégias analíticas com registos pouco reveladores do raciocínio envolvido.

O estudo realizado por Barreto (2019) analisou o contributo de uma Gallery Walk na resolução de problemas com números racionais numa turma de 6º ano de escolaridade, numa investigação qualitativa de caráter exploratório e interpretativo. De uma forma geral, o objetivo do estudo era compreender o desempenho dos alunos na resolução de problemas com números racionais, identificando as estratégias utilizadas e as dificuldades. Mais particularmente, o estudo realizado que utilizou como estratégia a Gallery Walk pretendia não, só o que foi referido, como também perceber a forma como o trabalho colaborativo permitia maior sucesso da turma. Antes da realização da Gallery Walk propôs que resolvessem alguns problemas individualmente e, neste caso, os alunos, apesar de inicialmente não revelarem muito à vontade com os problemas, foram demonstrando um bom desempenho recorrendo, frequentemente, a estratégias visuais (modelo da barra). As principais dificuldades apontadas pela investigadora foram a falta de explicações, os erros de cálculo e as dificuldades ao nível da interpretação do enunciado. Relativamente às resoluções de grupo, a investigadora salienta a atitude positiva demonstrada pelos alunos que foi refletida na concretização da Gallery Walk, o bom desempenho dos alunos na realização das tarefas com recurso a estratégias visuais e as dificuldades ao nível da interpretação dos enunciados que formam colmatadas logo desde o início.

O estudo desenvolvido por Esteves (2018) pretendeu compreender como os alunos de uma turma do 5º ano de escolaridade resolvem problemas envolvendo a multiplicação e a divisão de números racionais não negativos, evidenciando as estratégias de resolução utilizadas, as representações e as dificuldades sentidas, numa investigação qualitativa de caráter exploratório. A investigadora concluiu que, de uma forma geral, o desempenho da turma foi bastante bom. Após analisar os resultados, concluiu que recorreram com frequência a resoluções visuais, fazendo-as acompanhar de alguns cálculos, o que tornou as resoluções mais completas. Já no que se refere às dificuldades, destacou as produções escritas que não demonstram aquilo que os alunos pensaram, uma vez que, quando se expressavam oralmente eram claros e era fácil de acompanhar os seus raciocínios.

Vieira (2018) realizou um estudo com o intuito de analisar a resolução de tarefas com frações numa turma do 6º ano de escolaridade, tanto a nível dos desempenhos dos alunos, como a nível das resoluções (representações e estratégias utilizadas) e ainda das dificuldades. Através de uma investigação qualitativa de caráter interpretativo, a autora concluiu que os alunos privilegiavam, inicialmente, a estratégia de natureza analítica, contudo, conforme foram conhecendo e familiarizando-se com estratégias de natureza visual, passaram a recorrer a estas estratégias com mais frequência. Concluiu, também, que o desempenho dos alunos foi bom e que possuíam os conhecimentos básicos sobre os números racionais. Relativamente às dificuldades, concluiu que os alunos evidenciavam dificuldades a nível da compreensão de fração como operador, de frações equivalentes e da interpretação dos enunciados.

O estudo desenvolvido por Laranjeira (2017) pretendia verificar as dificuldades e a compreensão da adição/subtração de números racionais não negativos representados na forma de fração por alunos de uma turma do 6º ano de escolaridade. Neste estudo, a investigadora recorreu a uma investigação qualitativa que teve por base o método investigação-ação, partindo de um diagnóstico que serviu de ponto de partida à sua investigação. No diagnóstico, a investigadora constatou "dificuldades ao nível dos significados da fração, da unidade de referência e a própria compreensão da adição e subtração" (p. 50). Depois disso, a autora propôs tarefas de natureza exploratória para resolverem individualmente ou em pares que, posteriormente, foram discutidas em grande grupo para haver partilha e discussão de resultados/ raciocínios. Após a sua intervenção, a investigadora verificou uma grande evolução nas respostas, comparativamente com o diagnóstico. Relativamente ao papel da unidade de referência na compreensão de número racional representado na forma de fração, a investigadora concluiu que os alunos revelaram uma melhor compreensão após a sua intervenção, fazendo a comparação entre as respostas dadas antes e depois. Por fim, quando a investigadora analisou o contributo dos modelos de área para a compreensão da unidade de referência na adição e subtração de números racionais (não negativos) representados na forma de fração, verificou uma enorme evolução nos resultados obtidos pelos alunos antes e depois da sua intervenção.

Com o seu estudo, Canelas (2016) pretendia identificar as representações utilizadas na resolução de problemas com números racionais, as dificuldades sentidas e os conhecimentos relativamente aos números racionais. Esta investigação qualitativa de caráter descritivo e indutivo teve o envolvimento dos alunos de uma turma do 5º ano onde a investigadora desenvolveu o estágio. Após ter analisado os dados recolhidos no contexto, a investigadora concluiu que os alunos privilegiaram as representações mais concretas, como materiais manipuláveis, representações pictóricas e simbólicas. Relativamente às dificuldades, a investigadora identificou algumas, como na identificação de frações, na representação pictórica, na divisão do segmento em partes iguais, na ordenação de números decimais, na representação do numeral misto e na comparação de frações relativamente à unidade. Por fim, no que se refere aos conhecimentos dos alunos relativamente aos números racionais, a investigadora concluiu que possuíam conhecimentos acerca do significado parte-todo da fração, alguns alunos conseguiam converter os numerais mistos para frações, compreendiam que o significado de medida está implícito na divisão do segmento e possuíam conhecimentos acerca de frações equivalentes.

Ventura (2013) desenvolveu um estudo com o objetivo de compreender a evolução dos alunos na aprendizagem dos números racionais e de analisar as potencialidades de uma sequência de tarefas selecionadas que promovessem o uso de modelos. Para a concretização do estudo teve a oportunidade de o fazer com alunos do 5º ao de escolaridade, mais propriamente, com quatro alunos de uma turma. Deste modo, percebe-se que optou por um estudo de caso e utilizou uma metodologia de investigação denominada *design research* de natureza qualitativa. Após selecionar as tarefas que procurou que integrassem contextos familiares, que tivessem os vários significados dos números racionais, os vários tipos de grandezas e que promovessem as várias representações dos números racionais, com a utilização de modelos, colaborou com a professora do 2º ciclo onde desenvolveu o estudo, dando um teste inicial, as tarefas e um teste final. Assim, após analisar os resultados, conseguiu concluir que, de uma forma geral, os alunos evoluíram relativamente às aprendizagens do conceito de número racional e que a integração do modelo da barra numérica constituiu uma mais valia para os alunos desenvolverem o seu raciocínio.

Um estudo desenvolvido por Pinto (2011) pretendeu analisar o desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais por alunos do 6º ano de escolaridade. O objetivo do estudo era analisar as estratégias adotadas pelos alunos e as dificuldades, sendo que, para isso, realizou três estudos casos. É de realçar que, para este estudo, a investigadora recolheu dados em três fases distintas que lhe permitiu concluir que, numa fase inicial, os alunos apresentavam pouca flexibilidade no uso das propriedades das operações, recorriam apenas a esquemas informais (modelo da área retangular), utilizavam o raciocínio aditivo quando se pretendia que utilizassem o multiplicativo, apresentavam dificuldades em interpretar os resultados obtidos tendo em conta o enunciado, assim como na compreensão da divisão como operação inversa da multiplicação e, por fim, também apresentavam dificuldades na elaboração de enunciados para expressões. No que se refere ao sentido de número racional, a investigadora concluiu que revelaram "familiaridade com os diferentes significados das frações em contexto" (p. 485), com as diferentes representações, "flexibilidade na comparação, ordenação e densidade de números racionais, bem como capacidade de usar símbolos e linguagem matemática formal significativos" (p.485). Na fase durante e final da unidade de ensino, os alunos utilizaram a operação envolvida, recorrendo a procedimentos de caráter multiplicativo e mostraram familiarização com os diferentes significados e contextos, que foi, também, possível verificar seis meses após a unidade de ensino.

No estudo desenvolvido por Gomes (2021) era pretendido compreender a influência do contexto das tarefas na resolução de problemas com números racionais não negativos numa turma do 6º ano de escolaridade, onde o contexto pode remeter para um campo da vida quotidiana ou para o universo matemático. Tendo em conta as questões que delineou, com este estudo pretendia caracterizar as estratégias utilizadas pelos alunos, as dificuldades que apresentam e as atitudes que evidenciam na resolução de tarefas em diferentes contextos. A investigação iria seguir uma metodologia de natureza qualitativa de caráter interpretativo, contudo, devido à situação pandémica imposta pela COVID-19 não foi possível a recolha e análise de dados. Apesar disso, a autora refere que a recolha de dados iria recair sobre as observações, conversas informais, questionários e gravações. Tendo em conta a literatura e alguma informação resultante de uma pilotagem das tarefas com alguns alunos das mesmas idades, esperava-se que surgissem algumas diferenças nos diferentes contextos, sendo que poderia haver maior diversidade de estratégias em tarefas da semirrealidade e da realidade; dificuldades mais evidentes nesses tipos de tarefas pela natureza do enunciado; e, por fim, que evidenciassem autoconfiança, motivação e entusiasmo nomeadamente na resolução de tarefas de realidade por não estarem tão habituados.

Fernandes (2019), com o seu estudo, pretendia compreender de que forma é que os alunos do 1ºCEB resolvem tarefas matemáticas em contextos não formais de aprendizagem. Para isso, procurou perceber, através dos trilhos, o desempenho e o envolvimento dos alunos na realização das tarefas. A sua opção recaiu para um estudo qualitativo de caráter interpretativo, no *design* de estudo caso com dois grupos. Na recolha de dados recorreu à observação participante, às entrevistas, a questionários, às resoluções das tarefas, às notas de campo, aos registos áudio e aos documentos fornecidos pela docente. A partir da análise dos dados, concluiu que os alunos mostraram algumas dificuldades de compreensão que foram ultrapassadas de diversas formas, mostraram conhecimentos, capacidades, estratégias de resolução e diferentes tipos de representação e mostraram que os trilhos contribuíram para o desenvolvimento de várias capacidades, nomeadamente para dar sentido à matemática, reconhecer a sua aplicabilidade e utilidade no meio envolvente.

O estudo desenvolvido por Melo (2013) teve o intuito de compreender a necessidade de se estabelecerem conexões matemáticas nas suas diferentes vertentes, destacando-se aquela que promove a aprendizagem da matemática em contextos reais, de vivências do dia a dia. Para isso, a autora procurou perceber como se promovem as diferentes conexões e de que forma podem contribuir para o desenvolvimento do gosto pela Matemática. A autora optou por uma metodologia qualitativa, e, através de tarefas propostas em contexto do pré-escolar e do 1ºCEB, recolheu os dados através da observação direta participante, da análise documental, de notas de campo e de registos audiovisuais. A autora concluiu que a prática matemática baseada no estabelecimento de conexões constitui-se muito importante, contribuído para a diversificação de tarefas e, consequentemente contribui para despertar o gosto nos alunos para a Matemática em contextos de aprendizagem não orientados diretamente para esta área, fazendo-os entender que a Matemática é uma forma de pensar e de agir sobre o mundo que os rodeia.

Ferreira (2012), no seu estudo, procurou compreender como lidam os alunos de uma turma do 7º ano de escolaridade com tarefas que envolvem conexões entre ideias matemáticas. O seu objetivo era verificar a que estratégias recorrem os alunos na resolução de tarefas que envolvem o estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos, processos e representações matemáticos e que dificuldades manifestam os alunos na resolução de tarefas que envolvem conexões matemática. Para isso, optou por uma metodologia de investigação qualitativa e recorreu a gravações audiovisuais e a produções escritas dos alunos para a recolha de dados. Após a sua análise, concluiu que as dificuldades dos alunos se prenderam com o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico e que os alunos se apropriaram do significado matemático de muitas ideias matemáticas e estabeleceram conexões revelando uma boa capacidade de raciocínio. Em forma de síntese, a autora revela que pertinência do estudo das conexões matemáticas confirma-se ao proporcionar uma ideia da Matemática como um todo integrado, contribuindo para que os alunos apreciem a sua beleza e o seu poder, como instrumento de compreensão da realidade. Além disso, reforça, ainda, que as conexões permitem uma melhor compreensão das ideias matemáticas, diminuindo a necessidade de memorização.

O estudo realizado por Camacho (2011) seguiu uma metodologia qualitativa de caráter descritivo, exploratório e interpretativo e teve como objetivo estudar, analisar, descrever e interpretar o pensamento dos alunos relativamente à presença da matemática no dia-a-dia. Para o estudo, foi solicitado aos alunos que elaborassem diferentes trabalhos onde fosse possível identificar as conexões entre a matemática e o dia-a-dia, de entre eles foi proposto o trabalho "Matemática e as profissões", "Matemática no quotidiano-fotografia" e "Sólidos geométricos no quotidiano". No primeiro, os alunos tiveram de selecionar uma profissão para depois verificar as conexões que teria com a matemática; no segundo, os alunos tiveram de tirar uma fotografia a algo do seu dia-a-dia para relacionarem com uma temática; e no terceiro, foi proposto aos alunos que ajudassem um latoeiro a contruir uma almotolia, seguindo algumas restrições. Após a análise dos trabalhos, a investigadora verificou uma evolução na comunicação matemática dos alunos e na forma como utilizavam os conhecimentos diários na resolução de problemas, além de terem despertado o gosto pela matemática na maioria dos alunos, por terem verificado eles próprios que a matemática está presente no dia-a-dia.

De um modo geral, confrontando-se os estudos acima apresentados acerca da resolução de problemas com números racionais não negativos, pode verificar-se que, na sua grande maioria, os principais objetivos eram verificar quais as estratégias ou representações privilegiadas pelos alunos, identificar as suas dificuldades e, ainda, verificar os desempenhos dos alunos na resolução de problemas envolvendo números racionais não negativos. Na mesmo sentido, constata-se que as principais dificuldades apontadas eram relativamente à compreensão dos significados das frações, à explicação das resoluções efetuadas e à interpretação dos enunciados. Quanto ao recurso às estratégias visuais, os estudos apontam que o seu uso contribuiu com um bom desempenho dos alunos na resolução de problemas com números racionais não negativos e para o modo como facilitam e apoiam o seu discurso. Em relação aos estudos sobre os contextos das tarefas, apontam para a importância que revelam para dar sentido à Matemática e às tarefas, favorecendo, ainda, as conexões matemáticas que, como os estudos apontam, são uma mais valia para despertar o gosto pela área e para fazer entender que a Matemática está presente e influencia o mundo que os rodeia.

CAPÍTULO III – METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Neste capítulo apresenta-se a metodologia que iria ser adotada para o estudo. Em primeiro lugar fundamentam-se as opções metodológicas que iam ser tomadas. Depois, faz-se uma breve descrição do contexto, dos participantes e dos procedimentos que iriam ser adotados. De seguida, descrevem-se os métodos e as técnicas de recolha de dados, finalizando com a descrição da análise de dados.

1. Opções metodológicas

A especificidade do fenómeno educativo, os objetivos a que os educadores se propõem e aquilo que necessitam de saber, tornam uma investigação em educação muito diferente de uma investigação em qualquer outra área social (Amado, 2017). De facto, como refere Vale (2004), as diferentes crenças influenciam de forma diferente o comportamento humano, sendo que influenciam, também, as formas de investigação mediante os diferentes pontos de vista. De uma forma geral, vários autores, como por exemplo, Fernandes (1991), Bogdan e Biklen (1994) e Vale (2004) distinguem dois grandes tipos de investigação: quantitativa e qualitativa. As investigações quantitativas, segundo Vale (2004), foram dominantes durante muito tempo, onde se procuravam relações causa-efeito e variáveis isoladas. Ainda segundo a mesma autora, este tipo de investigação que se enquadrava numa teoria positivista, deixou de ser suficiente para estudos mais complexos. Assim, e conforme foi surgindo a necessidade de, por exemplo, o investigador realizar observações mais ao menos prolongadas aos envolvidos na investigação, realizar entrevistas e de registar as suas formas de pensamento, surgiu, também, a necessidade de recorrer ao outro tipo de investigação, a investigação qualitativa (Fernandes, 1991).

Numa tentativa de definir investigação qualitativa, Bogdan e Biklen (1994) referem que este tipo de investigação consiste num método que envolve uma interpretação por parte do investigador do assunto em estudo, sendo que, para isso, este se encontra no ambiente natural por forma a ser possível realizar a interpretação do fenómeno em estudo. Assim, uma investigação deste tipo

> começa com a identificação de um problema que dê a orientação para o estudo e do "espaço" onde o problema possa ser investigado. O propósito da investigação é "resolver" o problema, no sentido de acumular suficientes conhecimentos que conduzam à sua compreensão ou explicação. (Vale, 2004, p. 175).

Bogdan e Biklen (1994) referem que a investigação qualitativa possui cinco características, sendo que nem todas as investigações deste tipo têm obrigatoriedade de obedecer a todas. A primeira característica apontada pelos autores é o facto de que neste tipo de investigação quem constitui o instrumento principal é o investigador, sendo a fonte direta dos dados o ambiente natural (escolas, famílias, entre outros), passando o investigador grande parte do tempo neste mesmo ambiente. A segunda característica que apontam os autores é o facto de a investigação qualitativa ser descritiva. A terceira característica passa pela importância dada ao processo, não se focando apenas nos resultados. A quarta característica apontada pelos autores é referente ao facto de os investigadores qualitativos analisarem os dados de forma indutiva, não fazendo a recolha de dados com o objetivo de confirmar hipóteses já construídas. Por fim, a quinta característica está relacionada com a importância dada ao significado, sendo da preocupação do investigador o modo como os sujeitos pensam e interpretam.

Mais especificamente em relação à investigação qualitativa em educação, Fernandes (1991) refere que através deste tipo de investigação é possível gerar boas hipóteses de investigação pela utilização de técnicas como "entrevistas detalhadas e profundas (…), observações minuciosas e prolongadas (...) e análise de produtos escritos (e.g., relatórios, testes, composições)." (p. 66). A utilização da abordagem qualitativa será um dos um dos caminhos para a análise qualitativa onde há uma interpretação dos significados construídos quer pelos participantes, quer pelo investigador (Miles & Huberman, 1994, citado por Vale, 2004).

De uma forma geral, de acordo com Vale (2004), há autores que defendem que uma investigação qualitativa passa por diferentes fases ou estádios. Apoiando-se em Morse (1994, citado por Vale, 2004), refere seis estádios pelos quais passa a investigação qualitativa: i) *estádio de reflexão*, no qual o investigador reflete sobre o tema a estudar; ii) *estádio de planeamento*, no qual o investigador seleciona o local, as estratégias e as questões do estudo; iii) *estádio de entrada*, no qual o investigador se deve preocupar em saber quem são os envolvidos e quais as características do local; iv) *estádio de produção e recolha de dados*, que inclui a análise de dados; v) *estádio de afastamento,* no qual o investigador reflete sobre o trabalho desenvolvido; vi) *estádio de escrita,* no qual o investigador interpreta os dados tendo em conta aquilo que é referido na literatura.

Assim, tendo em conta tudo aquilo que foi referido acima, e, depois de ter-se definido o problema para o estudo, onde se pretende compreender o desempenho dos alunos na resolução de problemas com números racionais positivos sob a forma de fração e onde os contextos das diferentes tarefas privilegiam as conexões dentro e fora da matemática, optou-se por uma investigação qualitativa mediante uma abordagem interpretativa, onde se pretende compreender, interpretar ou descobrir significados (Coutinho, 2014). Este é um estudo de natureza exploratória, pois pretendia-se explorar a importância dos contextos e das conexões, aspetos sobre os quais ainda não há muitas evidências e resultados relacionados com os números racionais, de modo a fornecer informações que permitam uma melhor compreensão do fenómeno. Importa, também, salientar que a investigação iria decorrer ao longo da regência, ou seja, iria decorrer num ambiente natural, onde o investigador passaria grande parte do seu tempo (Bogdan & Biklen, 1994).

2. Contexto / Participantes e Procedimentos

O trabalho de investigação iria desenvolver-se ao longo da ICE II com uma turma do 6º ano de escolaridade de uma escola pertencente a um Agrupamento de Escolas do distrito de Viana do Castelo. Durante a investigação, a professora estagiária iria também desenvolver o papel de investigadora, sendo que existiria um envolvimento próximo com os participantes. Tal como já foi referido anteriormente, a turma onde se iria desenvolver a PES era constituída por 21 alunos, dos quais 9 eram do sexo masculino e 12 eram do sexo feminino.

Como já se referiu no capítulo II da parte I do presente relatório, a turma tinha um bom aproveitamento, contudo, verificavam-se algumas diferenças entre os ritmos de aprendizagem dos alunos, no sentido em que, após a introdução de um novo conteúdo, um grupo de alunos demonstrava-se mais rápido na realização e compreensão das tarefas do que um outro grupo de alunos. De uma forma geral, os alunos eram empenhados, curiosos e bastante participativos. Através da observação, verificou-se que os alunos demonstravam uma maior curiosidade relativamente a assuntos da área das Ciências Naturais. A nível comportamental, no geral, a turma tinha um bom comportamento, respeitando os colegas e os professores, contudo, por vezes, era notória a falta de atenção de alguns alunos.

Se tudo corresse dentro daquilo que se esperava, o estudo decorreria entre os meses de fevereiro de 2020 e novembro de 2020 com diferentes etapas, como se descreve na tabela abaixo (tabela 1).

Tabela 1: Calendarização das etapas do estudo

Organização do tempo	Etapas do estudo	Procedimentos
fevereiro a abril de 2020	Observação da turma e preparação do estudo	- Observação e caracterização do contexto e da turma - Definição do problema e das questões de investigação - Recolha bibliográfica - Planificação da intervenção didática - Entrega dos pedidos de autorização
maio de 2020	Concretização do estudo	- Aplicação de um questionário inicial - Implementação da intervenção didática e realização dos problemas - Recolha de dados - Entrevistas/conversas com os alunos - Aplicação de um questionário final - Recolha bibliográfica
junho a março de 2021	Análise e escrita do relatório	- Análise dos dados - Redação do relatório

A primeira etapa, a de observação da turma e preparação do estudo, decorreu quase toda conforme estava previsto, ou seja, observou-se a turma em contexto de sala de aula, onde foi possível caracterizá-la, assim como ao contexto escolar. Ao longo do tempo foi possível identificar algumas capacidades e fragilidades da turma de modo a conseguir-se definir um problema e as questões orientadoras para o estudo. Também, em conjunto com a professora cooperante, delinearam-se em traços gerais os conteúdos a abordar na intervenção didática (Números Racionais). Contudo, em meados do mês de março, as escolas encerraram e a PES ficou interrompida devido à pandemia da COVID-19. No meio da incerteza daquilo que seria o futuro, foi-se continuando a recolher bibliografia para o estudo e planear a intervenção didática. Quando se percebeu que as escolas não voltariam ao normal funcionamento, a alternativa proposta pelas professoras coordenadoras foi a continuação da planificação da intervenção didática e a implementação de uma das aulas em formato Zoom. Contudo, foi planeado todo o processo como se tudo decorresse na normalidade.

De realçar que, no final desta etapa, por uma questão de ética, iriam ser entregues aos participantes uns pedidos de autorização de forma a resguardar o anonimato dos mesmos e a confidencialidade dos dados que iriam fornecer para a recolha de dados (Anexo 1).

Tal como no final da primeira etapa, e, como consequência do encerramento das escolas, a segunda e terceira etapas não puderam decorrer conforme o planeado. Consequentemente, no presente relatório, como não foi possível recolher dados, não se podem apresentar resultados que surgiriam da intervenção didática que também não se realizou. As conclusões sobre o estudo dando resposta ao problema em estudo também não se podem apresentar, contudo far-se-á uma breve reflexão das expectativas esperadas tendo por base o perfil dos alunos e os resultados de estudos teóricos e empíricos relatados. Em alternativa, e, na base do hipotético, faz-se uma descrição de como seriam as aulas, como se esperava que os alunos resolvessem os problemas, quais as dificuldades que poderiam surgir por parte dos alunos na resolução dos mesmos, quais as técnicas de recolha de dados que se utilizariam no estudo e como se analisariam os dados.

3. Recolha de dados

Após se ter definido o problema, as questões de investigação e os participantes para o estudo, iria seguir-se a fase de recolha de dados. Esta que, de acordo com Vale (2004) é uma fase fundamental em qualquer investigação que se desenrola, ao longo de um certo período, junto do contexto e dos participantes. No mesmo sentido, a autora aponta o facto de os dados se focarem em ocorrências naturais e em ambientes naturais, como um dos pontos fortes dos dados qualitativos.

Segundo a mesma autora, numa investigação qualitativa, o foco são os dados sob a forma de palavas que se baseiam em observações, entrevistas e documentos. De facto, como refere Aires (2015), uma das etapas que não se pode dispensar é a da seleção das técnicas a utilizar durante a pesquisa, uma vez que é através delas que se concretizam os objetivos do estudo. Assim, para o estudo que se iria realizar, os dados iriam ser recolhidos através dos seguintes métodos: observações, questionários, entrevistas/ conversas e documentos.

Observações

As observações consistem, segundo Aires (2015), numa recolha de informação sistemática, intencional e naturalista através da sua prática e interação naturais entre os participantes e o investigador. Ainda segundo a mesma autora, a observação qualitativa caracteriza-se pelo seu caráter flexível e aberto e não por ser uma pesquisa rígida. Vale (2004) considera-a como a melhor técnica de recolha de dados por permitir fazer a comparação entre aquilo que se diz (ou não) com aquilo que se faz.

Coutinho (2014) distingue duas dimensões da observação: estruturada e não estruturada. A autora refere que a primeira obedece a um protocolo definido previamente dependendo daquilo que o investigador pretende observar. Já na observação não estruturada, a autora refere que o investigador leva para o terreno apenas uma folha de papel onde realiza os registos daquilo que observa de forma natural.

Nas observações, o investigador pode assumir dois papeis, um em que tem uma posição exterior e outro em que tem uma posição ativa e interveniente (Vale, 2004). De acordo com a mesma autora, neste último papel, o investigador tem uma observação participante, na qual o observador faz parte da situação a ser observada. Bogdan e Biklen (1994) referem que nos primeiros dias de observação participante, o investigador fica, por norma, numa posição exterior, na expectativa de que o observem e aceitem, sendo que, com o desenrolar do tempo, vai participando e desenvolvendo relações. Vale (2004), de acordo com o que referem alguns autores, concluiu que a observação participante não constitui por si só uma técnica de recolha de informação, mas é tida como uma metodologia de investigação adequada para estudar aspetos relacionados com o participante.

> Esta metodologia permite ao investigador envolver-se nos acontecimentos conseguindo uma grande proximidade em relação às pessoas. Assim, estabelecem-se entre o investigador e os participantes conversas casuais ou entrevistas informais, permitindo criar, pelo investigador, situações que forneçam dados complementares em relação aos

> que resultam da observação naturalista, assim como uma grande dose de confiança que estimule aquelas conversas. (Vale, 2004, p. 180)

De destacar que existem diversas situações que poderão tornar-se inconvenientes para o investigador. Dessas podem destacar-se: a falta de tempo para registos das situações que pode surgir pelo desempenho simultâneo do papel simultâneo de investigador e observador; a subjetividade proveniente de sentimentos; a própria perspetiva que pode deixar influencia no estudo e a perda da capacidade critica por se identificar com o grupo (Vale, 2004; Aires, 2015). Contudo, de acordo com Vale (2004), se o investigador organizar de forma cuidadosa e sistemática as observações, poderá prevenir esses problemas.

Segundo Olabuenaga (1996, citado por Aires, 2015) é importante que se tenha em consideração o facto de que nem tudo num estudo é possível de ser analisado através da observação. Para além disso, torna-se importante que, aliadas à observação, surjam algumas notas sobre, por exemplo, acontecimentos e conversas. Estas notas, designadas por notas de campo, são, segundo Bogdan e Biklen (1994), relatos escritos do investigador relativamente àquilo que ouve, vê, experiencia e pensa ao longo da recolha.

Posto isto, no presente estudo, iria optar-se por efetuar observações participantes e não estruturadas, não deixando de ter presente a finalidade do estudo, de modo a recolher informações a nível do desempenho e comportamento da turma, nomeadamente nos momentos de resolução dos problemas, onde se verificariam e registariam algumas evidências que seriam pertinentes para o estudo em causa e outros para a orientação do trabalho.

Questionários

Os questionários consistem numa técnica de recolha de dados em que os participantes são inquiridos/ questionados relativamente a atitudes, sentimentos, valores ou opiniões, dependendo do objetivo (Coutinho, 2014). De acordo com a mesma autora, os questionários surgem para questionar um grande número de pessoas de modo a caracterizar um grupo, sendo, segundo Vale (2004) dos instrumentos mais utilizados em investigação pois são fáceis de aplicar, e, como proporcionam respostas diretas sobre informações, quer de factos quer de atitudes, permitem uma análise das respostas rápida e sem grande esforço.

De referir que os questionários são todos estruturados e que podem conter questões de resposta aberta ou fechada (Vale, 2004). As questões abertas encorajam o participante a responder livremente sobre determinado assunto, enquanto que nas questões fechadas o participante tem de responder dentro de um conjunto de respostas pré-definidas. É, ainda, de referir que podem ser em papel ou em formato online, através do computador (Coutinho, 2014).

Para este estudo, iriam ser aplicados dois questionários em papel, um antes da intervenção didática e outro depois da mesma. A opção pelo questionário em papel iria prender-se ao facto de que, dessa forma, poderia acompanhar-se os alunos no seu preenchimento, verificando se todas as questões eram respondidas e se respondiam, efetivamente, às questões colocadas. O questionário inicial (Anexo 2) teria como objetivo compreender a relação dos alunos face à matemática, aos números racionais e à resolução de problemas. O questionário final (Anexo 3) teria como objetivo compreender a reação dos alunos face à resolução dos problemas propostos, incluindo as estratégias de resolução e as conexões. Realça-se o facto de que os questionários foram adaptados de outros já previamente validados em anos anteriores.

Entrevistas

As entrevistas são consideradas como uma poderosa, eficaz e importante técnica de recolha de dados (Bogdan & Biklen, 1994; Vale, 2004; Coutinho, 2014; Aires, 2015; Amado, 2017).

Uma entrevista consiste numa conversa intencional entre duas ou mais pessoas, dirigida por uma delas e tem como objetivo obter informações (Morgan, 1988, citado por Bogdan & Biklen, 1994). Esta técnica é semelhante ao questionário, na medida em que se realiza um inquérito, contudo, diferem pelo facto de se poder aprofundar as questões colocadas, pedindo esclarecimentos adicionais ao entrevistado, havendo sempre possibilidade de ir colocando questões de acordo com as respostas dos participantes (Vale, 2004; Coutinho, 2014). Segundo Vale (2004), as entrevistas, quando utilizadas em conjunto com os questionários e tarefas permitem, a validação das respostas e dão a possibilidade ao investigador de esclarecer determinados aspetos ligados com o participante que sabe o que fez ou respondeu.

As entrevistas variam quanto ao grau de estruturação, podendo ser classificadas em estruturadas, não estruturadas e semiestruturadas. As entrevistas estruturadas seguem um guião com um conjunto de perguntas previamente estabelecidas e as respostas vão, por norma, ao encontro de um conjunto de categorias pré-estabelecidas (Vale, 2004; Aires, 2015; Amado, 2017). As entrevistas não estruturadas ou abertas são aquelas em que as questões surgem no decorrer dos acontecimentos, não sendo preparado nenhum guião (Coutinho, 2014; Aires, 2015; Amado, 2017). Entre estes dois tipos de entrevista, surge a entrevista semiestruturada, que, embora seja realizada a partir de um plano prévio, dá liberdade de resposta ao entrevistado mediante a interação num contexto de conversa informal (Bogdan & Biklen, 1994; Amado, 2017).

Neste estudo não iriam realizar-se entrevistas propriamente ditas, mas sim conversas baseadas no questionamento dirigido para o desempenho dos alunos nos momentos de resolução dos problemas como nos momentos de discussão coletiva, com o objetivo principal de perceber as dificuldades sentidas na resolução dos problemas e de compreender quais as estratégias e representações privilegiadas pelos alunos, tendo como base a produção dos alunos ao longo das tarefas propostas.

Documentos

Os documentos constituem uma outra forma de recolha de dados, incluindo-se "relatórios, trabalhos de arte, fotografias, "memos", registos, transcrições, jornais, brochuras, agendas, notas, gravações em vídeo ou audio, notas dos alunos, discursos, etc." (Vale, 2004, p. 180). Segundo a mesma autora, os dados obtidos desta forma utilizam-se da mesma forma que os dados recolhidos através de outras técnicas.

Vale (2004) menciona que, ao longo do trabalho, o investigador necessita de tomar algumas notas que podem ser observacionais, teóricas e metodológicas. As primeiras, têm por base o que o investigador observa e ouve e "focam-se mais na descrição do que na interpretação e devem ser feitas com tanta precisão quanto possível" (Vale, 2004, pp. 180-

181). As segundas são baseadas, segundo Vale (2004), nas interpretações, inferências, hipóteses e conjeturas acerca das notas observacionais do investigador. As terceiras, as notas metodológicas, de acordo com Vale (2004), dizem respeito à descrição dos procedimentos, métodos e operações, constituindo afirmações acerca das ações do próprio investigador ao longo do estudo, instruções para ele mesmo, lembranças, críticas, entre outros.

Neste estudo, nas primeiras sessões de observação, as Professoras Orientadoras Cooperantes forneceram um documento com a identificação dos alunos e, antes disso, já tinha sido fornecido o horário da turma. Para além disso, ainda no período de observação, foi possível recolher algumas notas observacionais que permitiram a caracterização da turma.

Para além de todos os documentos resultantes das observações, entrevistas, notas, os mais relevantes seriam as resoluções dos dez problemas (Anexo 4) que iriam ser propostos no âmbito dos números racionais. Pretendia-se perceber o desempenho dos alunos na resolução das tarefas, identificando as estratégias de resolução privilegiadas pela turma, assim como as principais dificuldades manifestadas. Assim, estas serão descritas no capítulo IV.

Iria, também, realizar-se registos audiovisuais, nomeadamente gravações áudio nos momentos de resolução de problemas (em que se realizaria o questionamento) nos momentos de discussão coletiva. Estes registos iriam apoiar as observações e auxiliar as notas de campo que posteriormente seriam objeto de análise.

4. Análise de dados

A análise dos dados constitui um processo de procura e organização das informações recolhidas, sendo, por um lado, um aspeto fundamental do processo de investigação e, por outro, um aspeto problemático (Bogdan & Biklen, 1994; Aires, 2015). A problemática pode surgir, segundo Coutinho (2014), ou pelas formas diversificadas que os dados podem tomar ou pela difícil tarefa de distinguir a fase de recolha de dados com a fase de análise.

Wolcott (1994, citado por Vale, 2004) distingue três componentes da análise de dados, sendo elas: descrição, análise e interpretação. A primeira consiste em "escrever longos excertos das notas de campo ou repetir as palavras dos informantes como se estes parecessem contar histórias" (Vale, 2004, p. 181). A análise consiste na organização e relato dos dados, identificando-se aspetos essenciais e descrevendo-se as relações entre eles. A interpretação consiste em compreender os significados e contextos (Vale, 2004). Ainda de acordo com a mesma autora, o investigador poderá dar mais ênfase a uma determinada componente tendo em conta a finalidade do estudo, sendo que os estudos interpretativos têm sido mais privilegiados pela comunidade educativa matemática.

De salientar que, pelo seu caráter aberto e flexível nas investigações qualitativas, a análise dos dados é um processo que pode passar por diferentes etapas, como se descreve de seguida, segundo Miles e Huberman (1994, citados por Vale, 2004; Aires, 2015). Em primeiro lugar, os dados têm de ser reduzidos, isto é, têm de ser selecionados, focalizados e transformados em informação que permita formular hipóteses e conclusões (Vale, 2004; Aires, 2015). De seguida, os dados têm de ser apresentados/ expostos, isto é, têm de estar organizados e condensados, normalmente em matrizes, gráficos e tabelas, de modo a que seja possível tirar conclusões (Vale, 2004; Aires, 2015). Por último, retiram-se as conclusões e faz-se a verificação dos dados, ou seja, identifica-se, argumentando, o significado dos dados, as regularidades e os padrões de modo a chegar a conclusões (Vale, 2004). De acordo com Miles e Huberman (1994, citados por Vale, 2004; Aires, 2015), o processo descrito é cíclico e interativo, como se apresenta na figura abaixo.

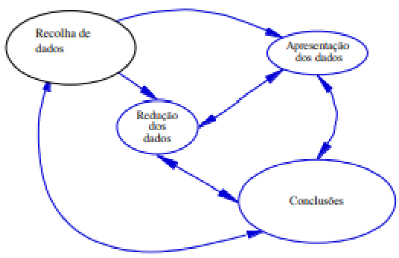


Figura 3: Análise dos dados - modelo interativo

De acordo com Janesick (1994, citado por Vale, 2004) o investigador deve utilizar o sistema de análise de dados que seja mais conveniente para a sua investigação, de forma a que o leitor compreenda o estudo efetuado.

Segundo Vale (2004), o investigador qualitativo utiliza uma análise indutiva sobre os dados recolhidos surgindo as categorias, temas e padrões. Para a construção de categorias, Lincoln e Guba (1985, citados por Vale, 2004) sugerem algumas recomendações.

> Para chegar às categorias deve começar-se por procurar padrões e ver se as coisas fazem sentido e se encaixam; descobrir pistas para fazer agrupamentos; recorrer a metáforas; fazer contrastes e comparações; notar relações entre as variáveis; construir uma rede lógica de evidência; localizar, dentro das experiências pessoais, frases-chave e afirmações que falem directamente do fenómeno em questão; descobrir coerência conceptual e teórica através da comparação com a literatura; e contar. (p. 184).

A contagem surge aqui pelo facto de se ter de verificar o número de vezes em que certo tema ou padrão se repete, permitindo ver a tendência dos dados (Vale, 2004). Há, ainda, outros autores que defendem a codificação como forma de categorizar os dados, considerando-a como uma forma antecipada de análise que atua através de ciclos iterativos de indução e dedução tornando a análise mais rápida e eficaz (Vale, 2004).

Um outro aspeto a ter em conta é a qualidade do estudo, que, segundo Miles e Huberman (1994, citados por Vale, 2004) pode ser garantida através de cinco critérios que serão descritos em seguida, de forma sucinta. O primeiro é *confirmabilidade* que se relaciona com o facto de as conclusões dependerem dos participantes e das condições do estudo apenas. O segundo é *fidedignidade* que apura a consistência e razoabilidade através do tempo, dos investigadores e dos métodos, por outras palavras, apura o estudo de modo a revelar confiança. O terceiro é *credibilidade* que pretende saber se os dados fazem sentido, verificando se certa explicação se adequa com a descrição dada. Ainda neste critério, existem estratégias que permitem assegurá-lo, sendo elas o envolvimento prolongado, a observação persistente, os materiais adequados, a revisão pelos pares, a confirmação pelos participantes, o jornal reflexivo e a triangulação. O quarto critério é *transferibilidade* que diz respeito à extensão das conclusões a outros contextos. O quinto é *aplicabilidade* que pretende "saber o que é que o estudo fornece aos seus participantes, quer aos investigadores e investigados quer aos seus "consumidores"." (p. 189)

A partir do que foi referido, e, atendendo aos critérios de qualidade mencionados, como a investigação iria desenvolver-se no contexto de estágio, o envolvimento seria contínuo e seria, assim, garantida uma análise criteriosa e aprofundada das situações. Isto iria contribuir para a confirmabilidade e credibilidade do estudo, sendo esta última assegurada maioritariamente pela triangulação que decorreria da combinação de diversos métodos de recolha de dados e por estes serem realizados ao longo do tempo.

Importa referir que, como foi já mencionado, a análise de dados, decorreria da análise de todos os que iriam ser recolhidos através dos instrumentos já mencionados, sobre os quais seriam feitas leituras sucessivas que permitissem reduzi-los de modo a identificar padrões que seriam organizados mediante algumas categorias para a sua interpretação e análise. As categorias tiveram por base as questões orientadoras do estudo e a revisão da literatura efetuada tendo em conta o contexto das tarefas e as conexões que privilegiam dentro e fora da matemática. Assim, a partir do que já foi referido, a análise dos dados organizar-se-ia atendendo ao desempenho dos alunos nas tarefas propostas, às estratégias de resolução de problemas e às dificuldades manifestadas, de acordo com a tabela 2 que se apresenta de seguida.

Tabela 2: Categorias

Categorias	Subcategorias	Indicadores
Desempenho	Bom	- Resolve o problema corretamente
	Razoável	- Resolve o problema parcialmente
	Insuficiente	- Não resolve o problema ou resolve incorretamente
Estratégias	Visuais	- Recorre a representações visuais para resolver o problema
	Não visuais	- Recorre aos cálculos para resolver o problema
Dificuldades	Apresenta	- Ao nível das representações - Ao nível dos significados das frações - Ao nível dos cálculos - Ao nível do enunciado - Ao nível das explicações - Ao nível das conexões

	Não apresenta	- Resolve o problema sem apresentar dificuldades

A primeira categoria está relacionada com o desempenho dos alunos na resolução dos problemas. A formulação dos indicadores teve por base alguns trabalhos (e.g. Sá, 2020; Barreto, 2019; Esteves, 2018; Vieira, 2018), tendo-se verificado que os alunos resolvem os problemas corretamente, parcialmente ou não resolvem. A resolução é considerada parcial se os alunos não apresentam todos os cálculos efetuados ou revelam alguns erros.

A segunda categoria está relacionada com as estratégias utilizadas na resolução de problemas, na qual se pretendia perceber quais eram as privilegiadas pelos alunos de entre as visuais e não visuais ou analíticas. Recorda-se que uma resolução é considerada visual se privilegia o uso de esquemas pictórico-visuais, como desenhos, esquemas, modelo da barra ou outras representações e as não visuais prendem-se com abordagens logico-verbais, como sejam a linguagem natural ou matemática, isto é, recorrendo a palavras e expressões matemáticas (Vale & Barbosa, 2020a). Um outro indicador que poderia considerar-se são as resoluções mistas, aquelas onde se recorre aos dois tipos de estratégias referidas anteriormente, onde não se privilegia nenhuma, mas coexistem. Não se irá considerar esta 3ª opção, optando-se apenas por considerar as resoluções visuais e não visuais onde se identifica a abordagem privilegiada.

A terceira categoria relaciona-se com as dificuldades que os alunos apresentam na resolução de problemas. Tendo por base alguns trabalhos (e.g. Sá, 2020; Barreto, 2019; Esteves, 2018; Vieira, 2018; Ventura, 2013), percebe-se que, na resolução de diferentes tarefas, os alunos apresentam dificuldades ao nível das diferentes representações dos números racionais, nomeadamente na conversão de uma forma de representação para outra. Também ao nível dos significados de fração apresentam algumas dúvidas. Além disso, em todos os trabalhos, são apresentadas dificuldades ao nível dos cálculos, onde os alunos apresentam erros, ao nível da interpretação dos enunciados e ao nível das justificações por escrito, que não se tornam reveladoras dos raciocínios. Neste trabalho em específico, os alunos poderiam apresentar, também, dificuldades no estabelecimento de conexões em particular dentro da própria matemática, sobretudo entre as diferentes representações de um número racional ou entre os números racionais e outros conteúdos (p.e. áreas).

CAPÍTULO IV – INTERVENÇÃO DIDÁTICA

Neste capítulo apresenta-se uma caracterização dos problemas ao nível dos objetivos, processos de resolução e expectativas de resolução pelos alunos, começando-se por uma breve caracterização da dinâmica das aulas.

1. Dinâmica das aulas

A intervenção didática iria incidir, como já foi referido anteriormente, numa turma do 6º ano de escolaridade, ao longo das quatro semanas do mês de maio de 2020, perfazendo um total de doze aulas de regência (oito de 90 minutos e quatro de 45 minutos). Como também já foi referido, o conteúdo programático que iria ser abordado era o dos números racionais, sendo que, neste nível de escolaridade, incidem sobre os números racionais negativos. Apesar disso, os problemas propostos à turma relacionavam-se com os números racionais positivos de forma a que utilizassem conhecimentos adquiridos em anos anteriores, para consolidar os conhecimentos que envolvem operações com números racionais, em particular de frações e seus significados.

Relativamente às aulas que foram planeadas, iria ser seguido um ensino de natureza exploratória (Canavarro, 2011; Canavarro, Oliveira & Menezes, 2014), onde se iria tentar criar oportunidades para que a aprendizagem fosse com compreensão, onde os alunos tivessem uma participação ativa na construção do conhecimento através do trabalho com tarefas desafiantes, da partilha de ideias e da discussão coletiva (Rodrigues, Menezes & Ponte, 2014). De facto, ao longo das aulas iriam ser privilegiadas as ideias prévias dos alunos relativamente aos assuntos abordados e iriam privilegiar-se tarefas e exemplos relacionados com as experiências e o quotidiano dos alunos, de forma a que o envolvimento dos alunos fosse maior, tanto nas tarefas como nas discussões coletivas. As tarefas iriam ser propostas tendo em conta o objetivo/ finalidade da mesma. De uma forma geral, para a exploração e compreensão de novos conceitos e para a aplicação de conhecimentos com utilização de diferentes estratégias, iriam ser propostas tarefas com um grau de desafio mais elevado, enquanto que, para a consolidação de conhecimentos iriam ser propostas tarefas com grau de desafio mais reduzido (Ponte, 2005).

De um modo geral, a prática iria assentar sobre o *Modelo das 5 Práticas* sugerido por Stein, Engle, Smith e Hughes (2008, citado por Rodrigues et al., 2014). Segundo os autores, seguindo este modelo, o professor deve "antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões entre as respostas dos alunos" (p. 66). Para os autores, a primeira prática é referente ao trabalho prévio do professor, no qual antecipa possíveis resoluções e dificuldades dos alunos na resolução da tarefa; a segunda, já em sala de aula, é referente ao trabalho do professor de acompanhar os alunos no trabalho autónomo, tendo em atenção as estratégias de resolução apresentadas e as ideias matemáticas envolvidas nas resoluções; a terceira, é referente à seleção das ideias a serem partilhadas em grande grupo, de forma a garantir a discussão de ideias matemáticas importantes; a quarta prática diz respeito à sequenciação das ideias de modo a ajudar os alunos a desenvolverem as suas ideias relativamente à ideia inicial, tendo em vista o objetivo da aula; por último, na quinta prática, "o professor leva os alunos a estabelecerem conexões entre as ideias que estão a ser apresentadas, pedindo justificações, levando-os a comparar resoluções próximas e distantes, incentivando-os a formular questões aos colegas e a argumentar sobre as ideias apresentadas." (p. 67).

Posto isto, os dez problemas que iriam ser propostos para a investigação foram previamente selecionados tendo em consideração o facto de promoverem o desenvolvimento das capacidades transversais, de estabelecerem conexões e de conseguirem ser resolvidos recorrendo a diferentes estratégias. Relativamente ao último ponto, foram previamente esboçadas as possíveis resoluções e foram, também, pensadas as possíveis dificuldades que pudessem surgir. Posteriormente, já no momento de implementação, os problemas iam ser apresentados aos alunos, depois, iria ser realizada a leitura do mesmo e, por fim, iria haver esclarecimento de dúvidas (caso houvesse). Após a apresentação, os alunos iriam começar a resolução da tarefa utilizando a estratégia que considerassem mais adequada e, ao mesmo tempo, esse trabalho iria ser acompanhado, levantando algumas questões sobre a forma como estavam a pensar. Posteriormente, iriam ser selecionadas algumas estratégias, de modo a que pudessem ser discutidas em grande grupo. Posto isto, eram apresentadas essas mesmas resoluções, onde se pretendia que se discutissem as estratégias, as representações, os significados, as conexões e os raciocínios. Nesta discussão, era esperado que os alunos tivessem um papel ativo, levantando questões pertinentes aos colegas relativamente ao que estava a ser apresentado. Por fim, em forma de síntese, iria ser feito o estabelecimento de conexões entre as várias ideias apresentadas e o tema em estudo.

Logo na primeira aula, onde seriam realizadas revisões de conceitos relativos ao conteúdo dos números racionais positivos, iriam ser propostas aos alunos algumas tarefas, das quais dois problemas onde iriam ser exploradas em grande grupo as resoluções. Com a proposta destes problemas, iria conseguir compreender quais as estratégias de resolução que os alunos colocavam em prática e, caso não surgissem resoluções visuais, iriam ser exploradas, nomeadamente o modelo da barra, de modo a mostrar as potencialidades das resoluções visuais na compreensão dos conceitos e da sua utilidade na resolução de muitos problemas que envolvem frações. Depois de uma abordagem explícita às resoluções visuais e ao modelo da barra, foram propostos dez problemas ao logo das semanas de regência, nos quais os alunos poderiam utilizar diferentes estratégias, consoante a sua preferência.

De uma forma geral, esperava-se que toda a turma estivesse envolvida no trabalho e surgissem diferentes ideias de modo a enriquecer as discussões coletivas.

2. Caracterização dos problemas

Em primeiro lugar, importa salientar que os problemas apresentados (Anexo 4) obedeceram a alguns princípios tendo por base a fundamentação a nível teórico que foi realizada. Tendo em conta que o ensino da matemática deve estar centrado na resolução de problemas, estes devem proporcionar experiências ricas, que integrem diferentes conhecimentos, recursos e estratégias (Vale & Barbosa, 2020). De facto, sabe-se que a aprendizagem dos números racionais é muito importante, apesar de acarretar alguma complexidade que advém das suas diferentes representações (fração, dízima, percentagem e numeral misto) e significados das frações (parte-todo, quociente, operador, medida e razão) (e.g. Pinto, 2011). Tendo isso em conta, na escolha e seleção dos problemas tentou-se escolher aqueles que trabalham essas representações e significados de forma flexível, de modo a integrar os diferentes conhecimentos. Também foi tido em consideração o nível de exigência cognitivo necessário para a resolução dos problemas que, de acordo com Stein e Smith (1998, citado por NCTM, 2017), pode ser baixo ou alto. Outros aspetos que foram tidos em conta na escolha e seleção das tarefas prendem-se com as representações das ideias matemáticas que, segundo Bruner (1962, citado por Boavida et al., 2008) podem ser ativas, icónicas ou simbólicas e com as estratégias de resolução que poderão ser visuais, não visuais ou mistas (Vale & Barbosa, 2020). Neste trabalho serão apenas consideradas as estratégias visuais e não visuais, de acordo com a predominância ou não dos esquemas visuais. Por fim, outros aspetos tidos em conta foram o contexto das tarefas que se prendeu com a realidade e a semi-realidade (Skovsmose, 2000) e as conexões (vida real, arte e matemática) (Boavida et al., 2008). Tendo em conta todos estes princípios (objetivos, representações dos números racionais, significados das frações, níveis de exigência cognitiva, as representações das ideias matemáticas, as estratégias de resolução, os contextos e as conexões), juntou-se toda a informação num quadro síntese (Anexo 5). De uma forma geral, acredita-se que os problemas iriam constituir-se uma mais valia para o desenvolvimento do gosto pela matemática nos alunos, na medida em que as conexões e as experiências que iriam ter através dos problemas iriam fazer-lhes ver a matemática de uma outra forma. Para além disso, também iriam ser trabalhadas outras competências como a comunicação e o raciocínio matemáticos, uma vez que a discussão e a partilha de ideias seria um ponto chave neste trabalho.

Em segundo lugar, importa referir que cada um dos problemas encontra-se identificado com um número, correspondente à ordem com que iria ser proposto ao longo de toda a intervenção didática, tendo em conta o tempo disponível em cada uma das aulas para a sua realização. Assim, apresentam-se os dez problemas que iriam ser propostos e que constituiriam a base do presente estudo, onde se destacam algumas resoluções que seriam esperadas pelos alunos, bem como as suas possíveis dificuldades.

Problema 1- Sala de espetáculos

Sala de espetáculos

A sala de espetáculos de Retorta tem capacidade para 200 lugares sentados. No espetáculo da Inês estavam preenchidos $\frac{4}{5}$ desses lugares. Quantas pessoas estavam a assistir ao espetáculo sentadas?

Noutros espetáculos já tinham notado que a capacidade da sala era insuficiente, por isso decidiram aumentá-la 25%. Quantos lugares sentados passará a ter?

Figura 4: Enunciado do Problema 1 - Sala de espetáculos

Neste problema, os alunos tinham dois desafios: o primeiro era descobrir quantas pessoas estavam sentadas a assistir ao espetáculo da Inês e o segundo era descobrir quantos lugares sentados iria passar a ter a sala, caso aumentassem a capacidade da sala em 25%.

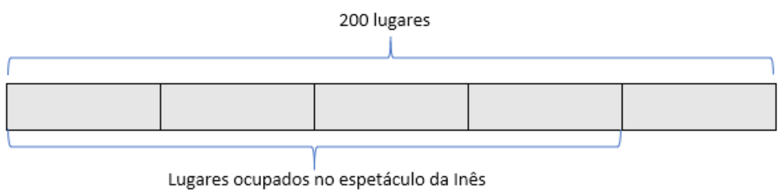
Para a primeira questão, serão apresentadas, de seguida, duas possíveis resoluções. A primeira resolução possível (figura 5) é uma resolução não visual. Nesta, os alunos conseguiriam calcular, através das regras das operações com frações já conhecidas e revistas, o número de lugares ocupados no espetáculo da Inês através da multiplicação de $\frac{4}{5}$, que corresponde ao número de lugares preenchidos no espetáculo por 200, que corresponde ao número máximo de lugares da sala. Depois de efetuarem o cálculo, os alunos obteriam a resposta à questão.

$$\frac{4}{5} \times 200 = \frac{4 \times 200}{5} = \frac{800}{5} = 160$$

R: No espetáculo da Inês estavam 160 pessoas a assistir sentadas.

Figura 5: Resolução não visual da primeira questão do problema 1

Uma segunda resolução possível (figura 6) seria através do modelo da barra. Os alunos poderiam começar por considerar uma barra como o total de lugares disponíveis na sala. Depois, teriam de dividir a barra em 5 partes iguais, das quais iriam considerar 4 ocupadas no espetáculo da Inês. Para descobrirem a quantos lugares corresponde cada uma das partes divididas, os alunos teriam de dividir o número total de lugares (200) pelo número de partes da barra (5), sabendo que cada parte iria corresponder a 40 lugares. Como apenas precisariam de saber a quanto equivale 4 dessas partes, os alunos multiplicariam 4 por 40 e iriam conseguir saber que o número de lugares ocupados no espetáculo da Inês eram 160.



200: 5 = 40, ou seja, cada retângulo irá corresponder a 40 lugares.

4 x 40 = 160

R: No espetáculo da Inês estavam 160 pessoas a assistir sentadas.

Figura 6: Resolução visual da primeira questão do problema 1

Da mesma forma, para a segunda questão do problema serão apresentadas, seguidamente, duas possíveis resoluções. A primeira (figura 7), é uma resolução não visual. Os alunos poderiam começar por transformar os 25% numa fração, obtendo $\frac{25}{100}$ e estabelecer uma proporção para determinar quantos lugares correspondiam à capacidade da sala que é de 200 lugares. Efetuando os cálculos, iriam saber que 25% da capacidade da sala corresponde a 50 lugares. Ou então calcular diretamente os 25% pelo número de lugares, ou, ainda, transformar a percentagem para a representação decimal que é mais comum. Então, se adicionarem esses lugares à capacidade da sala, esta iria ficar com capacidade para 250 lugares sentados.

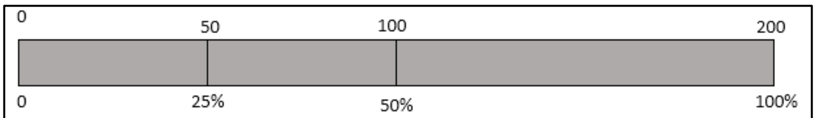
$\frac{25}{100} = \frac{n}{200} \Leftrightarrow n = \frac{25 \times 200}{100} \Leftrightarrow n = 50$ ou $25\% \times 200 = 50$ ou $0{,}25 \times 200 = 50$

200 + 50 = 250

R: Se a sala for aumentada em 25%, irá passar a ter 250 lugares sentados.

Figura 7: Resolução não visual da segunda questão do problema 1

A segunda resolução possível (figura 8) seria, como aconteceu anteriormente, através do modelo da barra. Contudo, para quem já domina o conceito de percentagem, a resolução não visual será mais eficaz. Sabendo que a barra corresponde a 200 lugares, ou seja, a 100% da lotação da sala, se for dividida ao meio, sabe-se que 50% da lotação da sala irá corresponder a 100 lugares. Como se pretendia saber o número de lugares a que corresponde 25% da lotação da sala, bastava dividir esta última parte da barra em duas partes. Efetuando os cálculos para a parte de cima e a parte de baixo da barra, os alunos iriam perceber que os 25% iriam corresponder a 50 lugares. Por fim, adicionando esse valor aos 200 lugares, obteriam 250, que corresponderia ao número de lugares que a sala iria passar a ter caso fosse aumentada em 25%.



200 : 2 = 100

100 : 2 = 50

Desta forma percebe-se que os 25% irão corresponder 50 lugares.

200 + 50 = 250

R: Se a sala for aumentada em 25%, irá passar a ter 250 lugares sentados.

Figura 8: Resolução visual da segunda questão do problema 1

Neste problema não era esperado que surgissem grandes dúvidas. Para a resolução do mesmo, os alunos poderiam utilizar uma estratégia da sua preferência, não sendo esperado que surgissem muitas resoluções visuais. Em todo o caso, iriam ser exploradas e discutidas todas as estratégias que pudessem surgir e, caso não surgisse nenhuma estratégia visual, iria ser apresentada uma proposta para ser analisada e discutida em grande grupo, para a consolidar e dar significado aos cálculos e expressões.

Problema 2 – O aniversário

O aniversário

No seu aniversário a Inês foi ao cinema com as amigas e levou o dinheiro que recebeu da avó. Quando chegou a casa tinha 24€, pois gastou $\frac{2}{5}$ do dinheiro no bilhete para o cinema, pipocas, chocolate e bebida.

- Quanto dinheiro gastou?

- Que quantia lhe deu a avó?

Figura 9: Enunciado do problema 2 - O aniversário

Neste problema, os alunos tinham de ser capazes de responder a duas questões sendo que, primeiro tinham de descobrir quanto dinheiro gastou a Inês e depois tinham de descobrir quanto dinheiro lhe tinha dado a avó. Para responder às questões, os alunos poderiam utilizar a estratégia que preferissem.

Segue-se, então uma possível resolução de natureza não visual (figura 10). A partir do que é referido no enunciado, e, sabendo que a unidade corresponde a $\frac{5}{5}$, os alunos ficariam a saber que $\frac{2}{5}$ do dinheiro total corresponderiam àquilo que a Inês gatou no cinema e $\frac{3}{5}$ iriam corresponder ao valor que sobrou, que, tal como é dito no enunciado, equivale aos 24€. Tendo isso em conta e, sabendo que os $\frac{3}{5}$ correspondem a $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$, iriam ficar a saber que cada $\frac{1}{5}$ iria corresponder a 8€. Depois, sabendo que o dinheiro que a Inês gastou corresponde a $\frac{2}{5}$, utilizavam a informação anterior e obteriam 16€. Para responder à segunda questão, os alunos poderiam ter em conta que a unidade corresponde a $\frac{5}{5}$ e multiplicavam 5 por 8, obtendo 40€.

Tendo em conta que a unidade corresponde a $\frac{5}{5}$, sabendo que $\frac{2}{5}$ correspondem ao que a Inês gastou no cinema, então $\frac{3}{5}$ irão corresponder ao que sobrou (24€).

$\frac{3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$, ou seja, $\frac{1}{5}$ corresponde a 8€.

Logo, $\frac{2}{5}$ irão corresponder a 16€.

R: A Inês gastou 16€.

Como o todo corresponde a $\frac{5}{5}$, então 5 x 8 = 40.

R: A avó deu-lhe 40€.

Figura 10: Resolução não visual do problema 2

De seguida, apresenta-se uma estratégia visual de resolução, através do modelo da barra (figura 11). Nesta situação, como o todo é desconhecido, torna-se mais simples recorrer ao modelo visual, por exemplo, a barra como identificação de unidade. Os alunos poderiam começar por considerar a barra como o total do dinheiro que foi dado pela avó da Inês. Depois, como referia o enunciado, $\frac{2}{5}$ desse valor foi quanto ela gostou no cinema. Posto isto, os alunos dividiriam a barra em 5 partes iguais, considerando que 2 dessas partes foi quanto ela gastou no cinema e que 3 dessas partes iriam corresponder aos 24€

que tinham sobrado. Sabendo isso, os alunos dividiriam 24 por 3 e ficariam a saber que cada uma das partes correspondia a 8€. Como pretendiam saber quanto dinheiro a Inês tinha gasto no cinema e, como sabiam que esse valor correspondia a 2 dessas partes, adicionavam 8 + 8 e, ficariam, assim, a saber a resposta à primeira questão. Depois, adicionando esse valor (16€) aos 24€, obteriam a quantia total que a avó da Inês lhe deu.

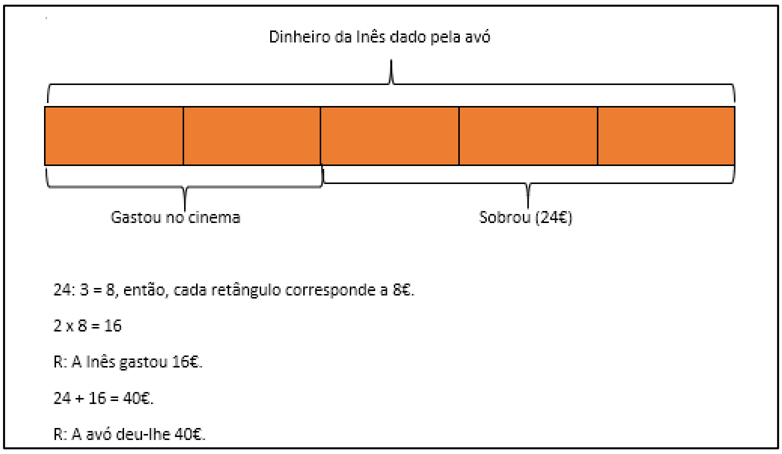


Figura 11: Resolução visual do problema 2

Neste problema, tal como aconteceu no anterior, não era esperado que surgissem grandes dúvidas. Como os alunos já teriam tido contacto e discutido anteriormente a resolução de natureza visual, era esperado que, na resolução deste problema já fossem surgindo mais resoluções deste tipo entre os alunos, sendo esperado que a resolução através do modelo da barra fosse cada vez mais intuitiva por parte dos alunos.

Problema 3 – Linces Ibéricos

Linces-Ibéricos

Num centro de reprodução de linces-ibéricos registou-se o número total de crias nascidas em três anos consecutivos. No primeiro ano nasceram $\frac{2}{5}$ das crias, no segundo ano nasceu $\frac{1}{3}$ e no terceiro ano nasceram 8 crias.

Qual foi o número de crias nascidas no primeiro ano?

Figura 12: Enunciado do problema 3 - Linces Ibéricos

Neste problema os alunos teriam de descobrir qual o número de crias nascidas no primeiro ano em que o centro de reprodução de linces-ibéricos começou a efetuar o registo de nascimentos. Para isso, poderiam resolver o problema com uma resolução da sua preferência.

Seguidamente, apresenta-se uma proposta de resolução visual através do modelo da barra (figura 13). Como as frações que constam no enunciado não têm o mesmo denominador, os alunos teriam de descobrir as frações equivalentes com o mesmo denominador para saberem em quantas partes teriam de dividir a barra. Depois disso, os alunos, iriam, então, dividir a barra em 15 partes iguais e assinalar 6 dessas partes como correspondentes ao primeiro ano, 5 como correspondentes ao segundo ano e 4 como correspondentes ao terceiro ano. Como no enunciado refere que no terceiro ano nasceram 8 crias, os alunos iriam compreender que teriam de dividir essas mesmas crias pelas 4 partes que correspondiam a esse ano (8:4=2). Dessa forma, iriam perceber que a cada uma das partes iriam corresponder 2 crias. Com esta informação, os alunos já conseguiriam dar resposta ao problema, uma vez que, no início da resolução já haviam verificado que o primeiro ano corresponde a 6 partes. Então, multiplicando 6 por 2, os alunos iriam verificar que, no primeiro ano nasceram 12 crias.

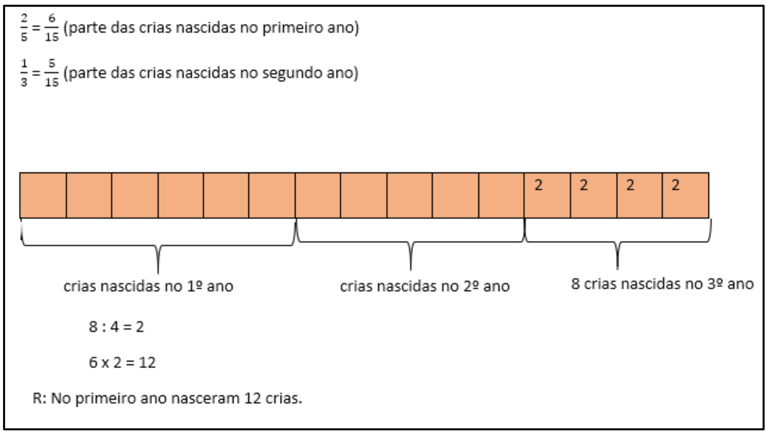


Figura 13: Resolução visual do problema 3

De seguida, apresenta-se uma proposta de resolução não visual (figura 14). Para esta resolução, os alunos teriam de começar por verificar a que parte do total correspondiam as crias nascidas nos dois primeiros anos e as crias nascidas no terceiro ano. Adicionando as frações do enunciado e reduzindo ao mesmo denominador, verificariam que as crias nascidas nos dois primeiros anos correspondiam a $\frac{11}{15}$ e que as 8 crias nascidas no terceiro ano correspondiam à fração $\frac{4}{15}$. Tendo isso em conta e, sabendo que os $\frac{4}{15}$ correspondem a $\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}$, iriam ficar a saber que cada $\frac{1}{15}$ iria corresponder a 2 crias. Depois, sabendo no primeiro ano nasceram $\frac{2}{5}$ das crias que corresponde à fração equivalente $\frac{6}{15}$, os alunos iriam multiplicar 6 por $\frac{1}{5}$ que já sabiam que equivalia a 2 crias, obtendo um total de 12 crias nascidas no primeiro ano.

$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=\frac{11}{15}$ (fração que representa a parte das crias nascidas nos dois primeiros anos)

$1-\frac{11}{15}=\frac{15}{15}-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}$ (fração que representa a parte das crias nascidas no terceiro ano)

$\frac{4}{15}$ do número total de crias são 8 crias.

$\frac{4}{15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}$, ou seja, $\frac{1}{15}$ corresponde a 2 crias.

$\frac{2}{5}=\frac{6}{15}=6\times\frac{1}{15}$

$6 \times 2 = 12$

R: No primeiro ano nasceram 12 crias.

Figura 14: Resolução não visual do problema 3

Na resolução deste problema poderiam surgir algumas dúvidas, nomeadamente pelo facto de as frações que aparecem no enunciado não terem o mesmo denominador e pelo facto de o número de crias do terceiro ano não aparecer na forma de fração também. Como os alunos já iam estar um pouco mais familiarizados com a estratégia visual, pensa-se que, para a resolução deste problema os alunos, na sua maioria, iriam recorrer ao modelo da barra.

Problema 4 – Telas de pintura

Telas de pintura

Na turma do Luís foi pedido aos alunos que imaginassem ser pintores. Para futuros quadros, encomendaram alguns divididos em partes geometricamente iguais ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$ e $\frac{1}{24}$).

Supõe que és aluno desta turma e, imaginando que o retângulo de fundo representa uma tela, representa as frações $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$ e $\frac{1}{24}$ e pinta cada uma das partes com cores diferentes. Apresenta tantas telas quantas queiras.

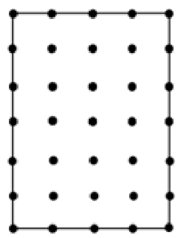


Figura 15: Enunciado do problema 4 - Telas de pintura

Neste problema os alunos eram desafiados a pintar o quadro, tendo de o pintar de acordo com as regras da encomenda, ou seja, de forma a que no quadro ficassem representadas as frações indicadas com cores diferentes. Para a resolução deste problema, os alunos poderiam de começar por descobrir as frações equivalentes com o mesmo denominador. Depois, teriam de proceder à sua pintura utilizando diferentes cores.

De seguida são apresentadas algumas propostas de resolução do problema (figura 16).

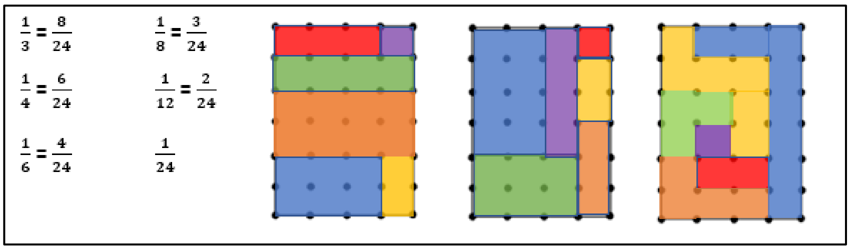


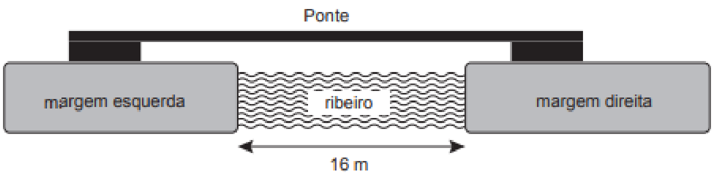
Figura 16: Propostas de resolução do problema 4

Na resolução deste problema, pensa-se que os alunos iriam apresentar diferentes soluções, não iriam sentir grandes dificuldades e que todos iriam estar entusiasmados no momento final de discussão/ partilha.

Problema 5 – Ponte

Ponte

Na terra da Leopolda existe uma ponte que está construída sobre um ribeiro numa zona onde a largura do ribeiro é de 16m (como está na figura).



Do comprimento total da ponte, sabe-se que $\frac{7}{20}$ estão sobre a margem esquerda e $\frac{1}{4}$ está sobre a margem direita do rio. Qual o comprimento total da ponte, em metros?

Figura 17: Enunciado do problema 5 – Ponte

Neste problema, os alunos seriam desafiados a descobrir o comprimento total da ponte, tendo em consideração as informações do enunciado. Tal como aconteceria nos outros problemas, os alunos poderiam, também neste, resolver da forma que considerassem mais adequada.

Seguidamente, apresenta-se uma proposta de resolução visual, com recurso ao modelo da barra (figura 18). Nesta resolução, os alunos teriam de começar por verificar qual a parte que fica sobre o ribeiro. Para isso, ao comprimento total da ponte, que corresponde à unidade, os alunos poderiam retirar a parte que se encontra sobre as margens e iriam verificar que sobravam $\frac{2}{5}$, sendo essa a parte correspondente ao comprimento da ponte que se encontra sobre o ribeiro. Como já sabiam pela informação dada no enunciado, que a parte que fica sobre o ribeiro ocupa 16m, os alunos poderiam dividir os 16 por 2, percebendo que cada parte da barra corresponde a 8m. Posto isto, bastava multiplicar o número de partes (5) por 8 e obteriam o comprimento total da ponte.

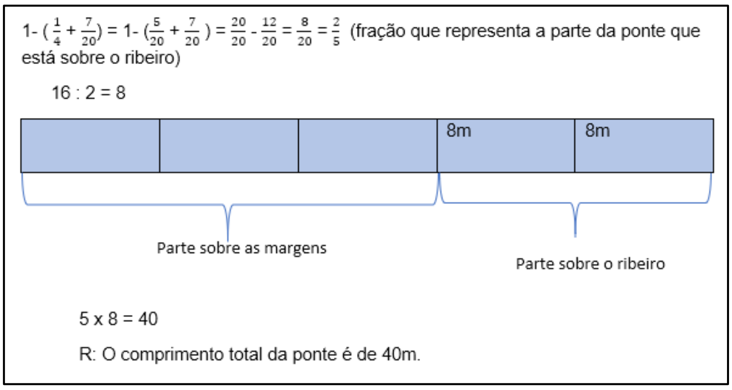


Figura 18: Resolução visual do problema 5

Apresenta-se, também uma proposta de resolução não visual (figura 19). Nesta resolução, os alunos poderiam começar por descobrir a fração que representa a parte da ponte que se encontra sobre as margens a partir dos dados do enunciado. Depois, para descobrirem a fração que representa a parte da ponte que se encontra sobre o ribeiro, os alunos poderiam retirar a fração descoberta anteriormente à unidade. Posto isto, e sabendo através do enunciado que essa parte corresponde a 16m, bastava que dividissem os 16 pela fração que representa a parte da ponte que se encontra sobre o ribeiro ($\frac{2}{5}$) e obteriam o comprimento total da ponte.

$\frac{1}{4} + \frac{7}{20} = \frac{5}{20} + \frac{7}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ (fração que representa a parte da ponte que está sobre as margens)

$1 - \frac{3}{5} = \frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ (fração que representa a parte da ponte que está sobre o ribeiro)

16 metros correspondem a $\frac{2}{5}$ do comprimento total da ponte, logo,

$16 : \frac{2}{5} = 16 \times \frac{5}{2} = 40$

R: O comprimento total da ponte é de 40m.

Figura 19: Resolução não visual do problema 5

Na resolução deste problema poderiam surgir algumas dúvidas, nomeadamente pelo facto de as frações que aparecem no enunciado não terem o mesmo denominador. Pensa-se que, para a resolução deste problema os alunos, na sua maioria, iriam recorrer a uma estratégia visual, nomeadamente ao modelo da barra pelo facto de a imagens do enunciado ajudar nesse sentido.

Problema 6 – Azulejos

Azulejos

O pai da Marlene vai forrar uma parede do seu jardim com azulejos quadrados cujo lado mede $\frac{1}{5}$ do metro. Consegues indicar a área de cada azulejo?

Sabendo que a parede tem 12 m^2 de área e $1\frac{1}{2}$ m de altura, consegues calcular o seu comprimento?

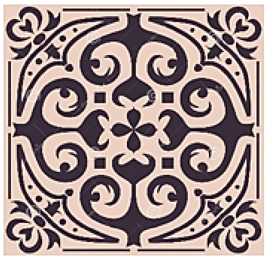


Figura 20: Enunciado do problema 6

Neste problema os alunos tinham de descobrir a área de cada azulejo, sendo que, para isso, teriam de colocar à prova os seus conhecimentos relativamente a conteúdos matemáticos abordados em anos anteriores. Para além disso, teriam, também, de calcular o comprimento da parede, tendo em conta a área e a altura indicadas no enunciado.

Este é um problema típico de áreas em que alguns dados recorrem a representações sob a forma de fração e numeral misto e que suscita uma resolução não visual.

Para dar resposta à primeira questão, os alunos utilizariam a fórmula da área do quadrado, como se apresenta em baixo (figura 21), uma vez que no enunciado tem a indicação de que é essa a forma do azulejo. Além dessa indicação, também é dada a medida do lado, assim, os alunos teriam de efetuar os cálculos e verificariam que cada azulejo tem de área $\frac{1}{25}m^2$.

$A_{quadrado}$= lado x lado $\Leftrightarrow A_{quadrado}= \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \Leftrightarrow A_{quadrado}= \frac{1}{25}$

R: A área de cada azulejo é $\frac{1}{25}$ m^2

Figura 21: Resolução não visual da primeira questão do problema 6

Na segunda questão do problema, o enunciado fornece duas informações, sendo uma relativamente à área da parede e outra relativamente à altura. Apresenta-se, de seguida, a resolução não visual para responder à questão (figura 22). Como a altura aparece na forma de numeral misto, os alunos poderiam começar por convertê-lo, uma vez que facilitaria os cálculos estando este valor na forma de fração. Posto isto, e, como se pretendia saber o comprimento da parede, os alunos teriam de utilizar a fórmula da área do retângulo (A = b x h). Contudo, como já sabiam o valor da área e da altura, teriam de descobrir o valor do comprimento da parede. Desta forma, e efetuando os cálculos necessários, os alunos iriam ficar a saber que a parede tem de comprimento 8m.

$A_{parede} = 12\ m^2$

Altura (h) = $1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

A = b x h, mas pretende-se descobrir o valor de b, então:

$b = A : h \Leftrightarrow b = 12 : \frac{3}{2} \Leftrightarrow b = 12 \times \frac{2}{3} \Leftrightarrow b = \frac{24}{3} \Leftrightarrow b = 8$

R: A parede terá 8m de comprimento.

Figura 22: Resolução não visual da segunda questão do problema 6

Na resolução deste problema poderiam surgir algumas dúvidas, nomeadamente pelo facto de aparecer um numeral misto com o qual teriam de efetuar alguns cálculos. Pensa-se que os alunos iriam estar recordados das fórmulas, tanto da área do quadrado como a do retângulo.

Problema 7 – Quadrados coloridos

Quadros coloridos

Para a exposição de arte da escola da Mariana foi proposto aos alunos da sua turma que cobrissem uma folha quadriculada com post-its de várias cores criando um quadro colorido (usando folhas post-it inteiras). Depois de expostos, os alunos teriam de escolher um quadro (sem ser o seu), analisando-o, indicando o número de post-its de cada cor utilizados, a fração que representa essa cor na totalidade do quadro, bem como a sua representação na forma decimal e de percentagem.

Supõe que és aluno desta turma e pinta a tua folha quadriculada, utilizando os lápis de cor ou post-its. No final, troca com o teu colega e ele terá de identificar qual a percentagem de cada uma das cores presentes no quadro, apresentando, também, essa relação na forma de fração e decimal (número com vírgula).

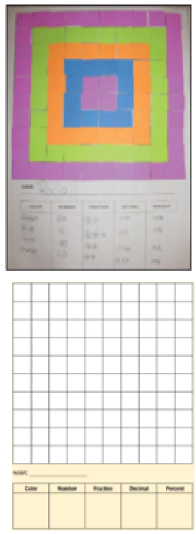


Figura 23: Enunciado do problema 7

Neste problema, os alunos eram desafiados a desenvolver um trabalho diferente dos anteriores, tendo que, em primeiro lugar, dar asas à sua criatividade e colorir o quadro de uma forma original. Depois, teriam de trocar o seu trabalho com um colega de modo a que este pudesse indicar as cores utlizadas no quadro, a fração que representa cada uma das cores na totalidade do quadro, bem como essa representação na forma decimal e de percentagem. Para desenvolver este trabalho, os alunos teriam à sua disposição a folha que se segue (figura 24).

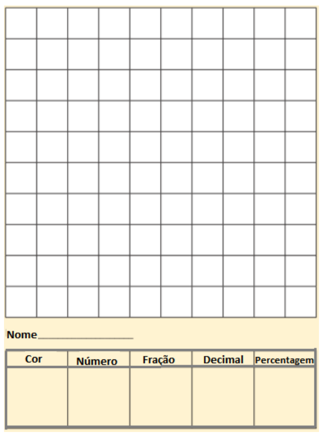


Figura 24: Folha para a resolução do problema 7

Este problema não possui uma solução apenas, pelo facto de depender daquilo que os alunos iriam criar. É um problema aberto ou uma investigação (e.g. Ponte, 2005). Assim, depois do quadro estar completo e o colega completar a grelha com as informações, os alunos iriam ser desafiados a discutir os trabalhos de forma a analisar em conjunto aquilo que foi feito. A título de exemplo apresentam-se algumas propostas de solução que aparecem na revista de onde foi adaptada a tarefa (*Mathematics Teaching In The Middle School*) (figura 25).

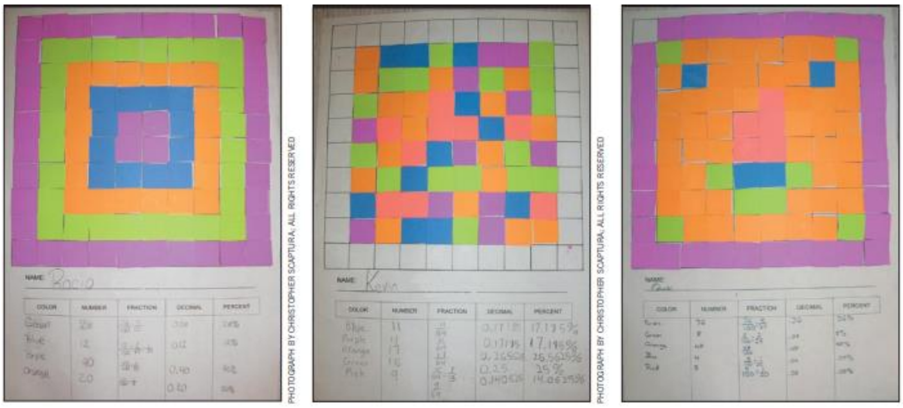
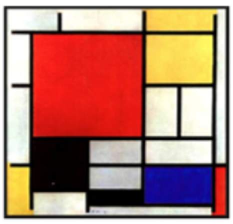


Figura 25: Propostas de solução da tarefa 7

Na resolução deste problema, pensa-se que os alunos não iriam sentir grandes dificuldades. Pensa-se que este problema iria suscitar um grande entusiasmo nos alunos, tanto pela liberdade de criarem um quadro a seu gosto como pela parte de analisar o trabalho dos colegas. Este problema torna-se importante, também, por estabelecer conexões entre as diferentes representações do número racional.

Problema 8 – O quadro de Mondrian

O quadro de Mondrian



Numa exposição de arte, uma professora de matemática deparou-se com o quadro de Mondrian da figura e ficou a admirá-lo. Pensou em algumas questões que lhe surgiram e propôs a sua resolução aos alunos.

Imagina que és aluno desta turma e tenta dar resposta aos seguintes desafios:

1. Que relações identificas entre as retas?
2. Que tipo de quadriláteros identificas?
3. Corta todas as peças que compõem o quadro. Descobre que peças são 1/4 do quadrado vermelho. Que parte do quadrado preto é um dos retângulos cinza? Descobre que peças são o dobro do retângulo preto. Que peças são 1/8 do quadrado vermelho? Que peças são 1/2 do quadrado amarelo?
4. O quadro tem aproximadamente 95 cm de lado. Faz uma estimativa da área do quadrado vermelho. Faz uma estimativa do perímetro do quadrado preto.
5. Agora és tu o artista. Imagina que és Mondrian, usa a sua técnica para fazeres a tua obra de arte.

Figura 26: Enunciado do problema 8

Previamente, a docente faria uma breve introdução ao pintor Mondrian, perguntando primeiramente se alguém já tinha ouvido falar deste pintor ou se conhecia a sua obra.

Neste problema, os alunos iriam ser confrontados com algumas questões relativamente ao quadro de Mondrian que é apresentado. Para resolver esta tarefa, os alunos iriam ter de mobilizar vários conhecimentos para além dos números racionais, de forma a responder a todas as questões.

Na primeira questão, os alunos teriam de indicar as relações entre as retas presentes no quadro. Esperava-se que mencionassem retas paralelas e concorrentes – perpendiculares, recordando conteúdos de anos anteriores.

Na segunda questão, teriam de referir os quadriláteros presentes no quadro, sendo que se esperava que referissem os quadrados e os retângulos. Perguntar-se-ia se poderiam encontrar outro tipo de quadriláteros. Esperava-se que os alunos referissem que não, uma vez que só há retas perpendiculares e paralelas, logo, os ângulos são sempre retos e os únicos quadriláteros seriam os quadrados e os retângulos.

Depois, na terceira questão, os alunos teriam de estabelecer algumas comparações, sendo que, para isso, poderiam recortar as peças que compõem o quadro. Assim, esperava-se que indicassem que o quadrado preto é $\frac{1}{4}$ do quadrado vermelho; um dos retângulos cinza é $\frac{1}{2}$ do quadrado preto; os retângulos brancos que ficam à direta do quadrado vermelho e por baixo do retângulo amarelo são o dobro do retângulo preto; os retângulos brancos do canto superior esquerdo, o retângulo amarelo e o branco do canto inferior esquerdo e os retângulos cinzentos são o $\frac{1}{8}$ do quadrado vermelho; o retângulo azul é $\frac{1}{2}$ do quadrado amarelo.

Já na quarta questão, os alunos teriam de fazer uma estimativa da área do quadrado vermelho e uma estimativa do perímetro do quadrado preto, sabendo que o quadro tem, aproximadamente, 95 cm de lado. Abaixo apresenta-se uma proposta de resolução (figura 27), onde os alunos poderiam começar por verificar qual a área do quadro, uma vez que a medida do lado era indicada no enunciado. Depois, através das peças que recortaram, poderiam verificar que o quadrado vermelho corresponde a $\frac{1}{4}$ do quadro. Assim, poderiam calcular $\frac{1}{4}$ da área do quadro para conseguirem obter a área aproximada do quadrado vermelho e dar resposta à primeira parte da questão. Depois, através do que já tinham verificado anteriormente, os alunos poderiam pensar que, como o quadrado preto é $\frac{1}{4}$ do quadrado vermelho e, por sua vez, o quadrado vermelho é $\frac{1}{4}$ do quadro, poderiam, primeiro, verificar a medida do lado do quadrado vermelho para depois saberem a medida do lado do quadrado preto. Desta forma, e, efetuando os cálculos, iriam perceber que o quadrado vermelho mede, de lado, aproximadamente 23,75 cm e o quadrado preto 5,94 cm. Depois, mobilizando os conhecimentos sobre o perímetro, os alunos iriam verificar que o perímetro do quadrado preto iria ser, aproximadamente, 23,6cm. Esta tarefa seria adequada para utilização da calculadora como instrumento auxiliar do cálculo.

$A = 95 \times 95 \Leftrightarrow A = 9\,025\ cm^2$

Considerando o quadrado vermelho como $\frac{1}{4}$ do quadro, temos:

$A_{quadrado\ vermelho} = \frac{1}{4} \times 9025 \Leftrightarrow A_{quadrado\ vermelho} = 2\,256{,}25\ cm^2$

R: O quadrado vermelho tem de área, aproximadamente, 2 256 cm^2

Como o quadrado vermelho é $\frac{1}{4}$ do quadro e, por sua vez, o quadrado preto é $\frac{1}{4}$ do quadrado vermelho, teremos de descobrir o lado do quadrado vermelho e, depois, ficamos a saber o lado do quadrado preto, por ser $\frac{1}{4}$ do lado deste. Então:

Lado do quadrado vermelho = $\frac{1}{4} \times 95 = 23,\ 75$. Ou seja, o lado do quadrado vermelho será, aproximadamente 23,75 cm.

Lado do quadrado preto = $\frac{1}{4} \times 23{,}75 = 5{,}9375$. Ou seja, o lado do quadrado preto será, aproximadamente, 5,9 cm.

Então, o perímetro do quadrado preto será igual a 4 vezes o seu lado:

$P = 4 \times 5{,}9 \leftrightarrow P = 23{,}6$.

R: O perímetro do quadrado preto será, aproximadamente, 23,6 cm.

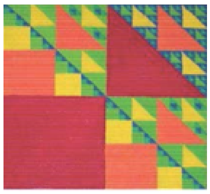
Figura 27: Resolução não visual da quarta questão do problema 8

Por fim, na quinta questão/ desafio deste problema, os alunos tinham de utilizar a técnica do Mondrian para criar um quadro, onde se pretende que utilizem os seus conhecimentos matemáticos para criar uma obra no âmbito da pintura.

Pensa-se que na resolução deste problema poderiam surgir algumas dificuldades nomeadamente nas questões onde tinham de estimar os valores da área do quadrado vermelho e do perímetro do quadrado preto, uma vez que poderia não ser imediato para os alunos o facto de terem de estabelecer comparações entre as medidas. Através deste problema os alunos poderiam verificar que conexões entre diferentes conteúdos matemáticos e entre a arte. Mais uma vez, os alunos iriam ter a oportunidade de dar asas à sua criatividade e criar um quadro mediante a técnica de Mondrian.

Problema 9 – O tapete

O tapete



A Carolina tem em sua casa o tapete apresentado. Um dia pôs-se a olhar atentamente para ele e descobriu o modo como foi desenhado, identificando todos os polígonos presentes.

Coloca-te no lugar da Carolina e:

1. Classifica todos os polígonos presentes.

2. Foca-te apenas nos quadrados amarelos. Que parte da tapeçaria representam?

3. Foca-te nos triângulos. Qual a amplitude dos ângulos de um dos triângulos? E dos outros? Que relação existe entre o triângulo amarelo e o triângulo laranja? Que parte da tapeçaria representam esses triângulos laranja?

4. Observa atentamente a parte pintada a vermelho. Que parte da tapeçaria representa?

5. Atenta no quadrado vermelho. Qual a razão entre a área do quadrado vermelho e o quadrado original?

6. Indica área do quadrado vermelho tomando por unidade de área o quadrado original.

Utiliza a imagem da forma mais conveniente de forma a conseguires responder a todas as questões.

Figura 28: Enunciado do problema 9

Tal como aconteceria no problema anterior, neste problema, os alunos iriam ser confrontados com algumas questões relativamente ao tapete que é apresentado na imagem. Da mesma forma, os alunos iriam ter de mobilizar alguns conhecimentos de forma a responder a todas as questões.

Assim, na primeira questão, os alunos teriam de classificar os polígonos presentes no tapete, sendo esperado que mencionassem triângulos (retângulos e isósceles) e quadriláteros (quadrados).

Na segunda questão, os alunos teriam de indicar que parte da tapeçaria representam os quadrados amarelos. Para responder a esta questão, os alunos necessitariam de estabelecer algumas relações que surgem visualmente, como se apresenta a seguir (figura 29). Assim, depois de verificarem as relações entre o quadrado amarelo, o laranja, o vermelho e o total do tapete, os alunos iriam verificar que um quadrado amarelo representa $\frac{1}{64}$ do tapete. Como existem 4 quadrados amarelos, os alunos iriam concluir que os quadrados amarelos representam $\frac{4}{64} = \frac{1}{16}$da tapeçaria.

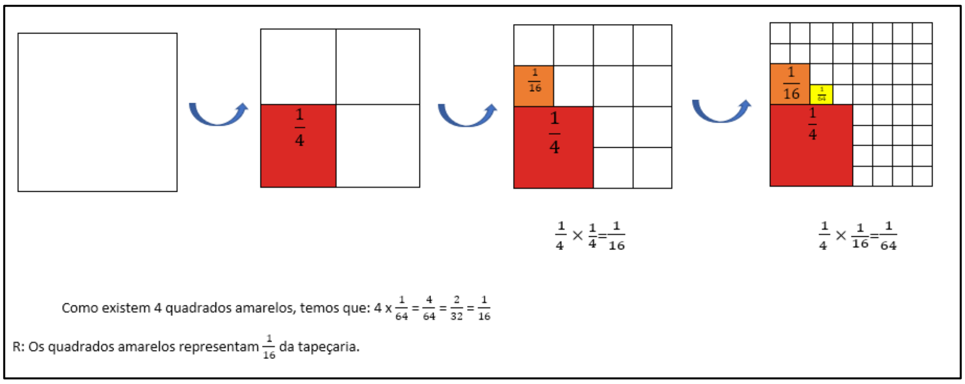


Figura 29: Resolução visual da segunda questão do problema 9

A seguir apresenta-se uma resolução analítica (figura 30).

Um quadrado amarelo é $\frac{1}{4}$ do quadrado laranja, que, por sua vez, é $\frac{1}{4}$ do quadrado vermelho, ou seja, um quadrado amarelo é $\frac{1}{16}$ do quadrado vermelho. Na tapeçaria, este quadrado vermelho representa $\frac{1}{4}$, então, um quadrado amarelo será $\frac{1}{16}$ de $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$, então, um quadrado amarelo é $\frac{1}{64}$ do tapete.

Como existem 4 quadrados amarelos, temos que: 4 x $\frac{1}{64} = \frac{4}{64} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$

R: Os quadrados amarelos representam $\frac{1}{16}$ da tapeçaria.

Figura 30: Resolução analítica da segunda questão do problema 9

Na terceira questão, os alunos teriam de indicar a amplitude dos ângulos dos triângulos, indicar a relação existente entre o triângulo amarelo e o laranja e, ainda, indicar que parte da tapeçaria representam os triângulos laranja. Para responder a esta questão, os alunos poderiam estabelecer uma relação entre o triângulo vermelho e o quadrado vermelho, verificando que o triângulo vermelho é metade do quadrado vermelho. Assim, mobilizando alguns conhecimentos, os alunos iriam verificar que um dos ângulos é de 90º e os outros dois são de 45º, por ser metade do ângulo reto (relativamente ao quadrado). Relativamente à relação entre o triângulo amarelo e laranja, os alunos poderiam verificar, através da imagem, que no espaço ocupado por um triângulo laranja, caberiam 4 triângulos amarelos, logo, a relação entre eles é de $\frac{1}{4}$. Para verificar que parte da tapeçaria representam os triângulos laranja, tal como na questão anterior, os alunos teriam de estabelecer algumas relações que surgem visualmente, como se apresenta abaixo (figura 31). Como o triângulo vermelho é metade do quadrado da mesma cor (que representa $\frac{1}{4}$ da tapeçaria), os alunos verificariam que esse triângulo representa $\frac{1}{8}$ da tapeçaria. Como o triângulo laranja é um meio do vermelho, tem-se $\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{32}$. Como existem 3 triângulos laranja, os alunos iriam verificar que esses triângulos representam $\frac{3}{32}$ da tapeçaria.

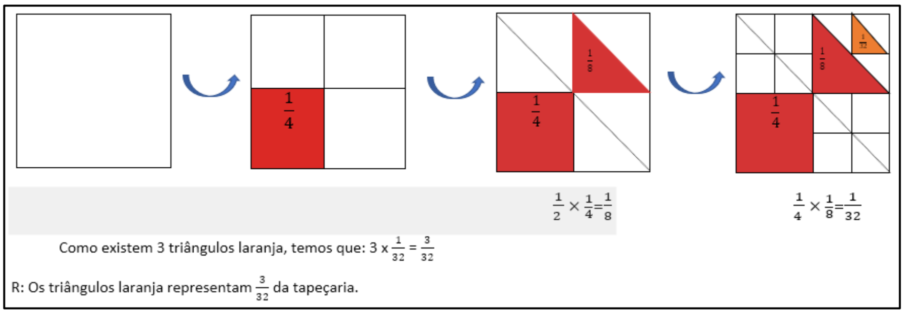


Figura 31: Resolução visual da terceira questão do problema 9

Na quarta questão, os alunos teriam de verificar que parte da tapeçaria representa a parte a vermelho. Como já teriam verificado em questões anteriores, o quadrado vermelho corresponde a $\frac{1}{4}$ da tapeçaria e o triângulo corresponde a $\frac{1}{8}$ da tapeçaria. Posto isto, os alunos poderiam somar estas duas frações e a soma daria $\frac{3}{8}$, sendo que, deste modo, os alunos concluiriam que a parte vermelha da tapeçaria corresponde a $\frac{3}{8}$.

Já na quinta questão, os alunos teriam de identificar a razão entre a área do quadrado vermelho e a área do quadrado original ocupado pela tapeçaria. Para responder a esta questão, os alunos poderiam apenas referir que, como o quadrado vermelho é $\frac{1}{4}$ do quadrado original, então a razão entre as áreas também será $\frac{1}{4}$.

Por fim, na sexta questão, os alunos teriam de indicar a área do quadrado vermelho tomando por unidade de área o quadrado original. Os alunos poderiam começar por calcular a área do quadrado original ($A_{\text{Quadrado original}} = l \times l = 1 \times 1 = 1$), verificando que é 1 unidade de área (u.a.). Depois, como já tinham verificado anteriormente, a área do quadrado vermelho é $\frac{1}{4}$ da área do quadrado original, assim, $\frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4} = 0{,}25$). Desta forma, os alunos concluiriam que a área ocupada pelo quadrado vermelho é de $\frac{1}{4}$ ou 0,25 u.a..

Na resolução deste problema poderiam surgir algumas dificuldades, uma vez que seria necessária a visualização e identificação de certas relações entre as peças da tapeçaria. Para além disso, os alunos precisariam de mobilizar alguns conhecimentos como classificação de polígonos, áreas e ângulos, e, sobretudo usar o conhecimento das frações: a relação parte-todo; o sentido de fração como operador; operações com frações e, eventualmente, potências com frações. Como aconteceria no problema anterior, através deste, os alunos poderiam verificar conexões entre diferentes conteúdos matemáticos e entre um objeto do seu quotidiano - tapete -, que não deixa também de ser uma obra artística.

Problema 10 – Concurso

Concurso

O professor Ricardo distribuiu folha A4 de diferentes cores para que os alunos as dividissem em partes geometricamente iguais, de diferentes modos. Os alunos recortaram cada uma das folhas coloridas pelas partes obtidas. De seguida, propôs aos alunos que criassem um quadro cobrindo uma folha branca A4 com diferentes partes coloridas obtidas. Após terem coberto a folha, os alunos escreveram a expressão numérica a que corresponde o todo dividido nas diferentes partes.

Supõe que és aluno desta turma, cobre a tua folha branca.

1. *Identifica a que parte da unidade corresponde cada uma das folhas coloridas que utilizaste.*
2. *Escreve a expressão que te dá a área da figura construída, ou seja, a unidade.*

Sê criativo porque, no final, o melhor "quadro" ganhará o concurso!

Figura 32: Enunciado do problema 10

Neste problema os alunos iriam ser desafiados a criar um quadro através da divisão de folhas coloridas em partes geometricamente iguais, combinando-as de uma forma criativa. Depois de terminarem os seus quadros, os alunos teriam de identificar a que parte da unidade corresponde cada uma das folhas coloridas utilizadas. Por fim, os trabalhos iriam ser partilhados com a turma e iriam eleger o melhor quadro, sendo esse o vencedor do concurso.

Apresenta-se, abaixo, um exemplo de um quadro que poderia surgir (figura 33). Neste, dividiu-se uma folha vermelha em 4 partes geometricamente iguais e utilizou-se apenas uma delas; dividiu-se uma folha azul em 8 partes geometricamente iguais e utilizou-se duas delas; por último, dividiu-se uma folha bege em 2 partes geometricamente iguais e utilizou-se apenas uma delas. Por fim, identificou-se a que parte da unidade corresponde cada uma das folhas coloridas utilizadas. A área da folha será dada pela área de cada uma das folhas utilizadas. Neste caso, seria $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}$, ou seja $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4} = \frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8} = \frac{8}{8}$ = 1 u.a..

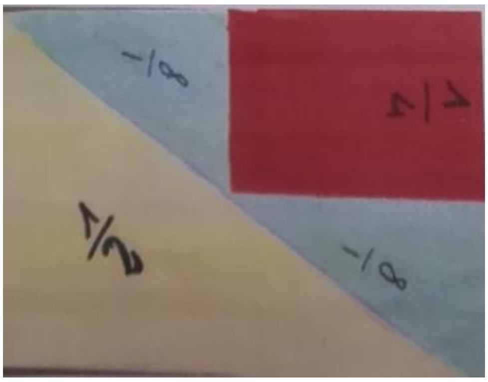


Figura 33: Exemplo de resolução do problema 10

Este problema não possui uma resolução apenas, pelo facto de depender daquilo que os alunos iriam criar. Realça-se, também, que os alunos iriam ser desafiados a discutir os trabalhos dos colegas forma a analisar em conjunto aquilo que foi feito.

Na resolução deste problema, pensa-se que os alunos não iriam sentir grandes dificuldades. Pensa-se que este problema iria suscitar um grande entusiasmo nos alunos, tanto pela liberdade de criarem um quadro a seu gosto como pela eleição do melhor trabalho da turma. Mais uma vez, está presente uma criação artística, suscitando o sentido estético dos alunos. Permite, por outo lado, trabalhar a adição de frações com e sem o mesmo denominador.

Em jeito de síntese, em todos os problemas é possível identificar como tema base para o trabalho com os problemas os números racionais. Ao longo de todos eles verifica-se a sua presença nas suas variadas representações (numeral misto, fração, decimal e percentagem). A representação na forma de fração é comum a todos, sendo que, em certos problemas é possível verificar a coexistência de outras formas de representação. De facto, só por esta razão se verifica o estabelecimento de conexões nos problemas.

Tendo em conta toda a importância das conexões já mencionadas anteriormente, e, à parte das conexões entre as diferentes representações do número racional, verifica-se a existência de outro tipo de conexões, sendo elas com a arte, com vida real e com a própria matemática. De uma forma geral, 4 dos problemas estabeleciam conexões com a arte, quer através da criação artística dos alunos, quer com peças de arte conhecidas (quadro de Mondrian). Depois, 6 dos problemas estabeleciam conexões com a vida real / quotidiano, ora por retratar situações do dia a dia conhecidas pelos alunos (ida ao cinema ou ao teatro, por exemplo), ora pela utilização de objetos/imagens também presentes no quotidiano das crianças (como é o caso dos azulejos ou do tapete). Por último, 4 dos problemas estabeleciam conexões dentro da própria matemática, abrangendo diversos temas, como por exemplo, dinheiro, áreas/ perímetros, classificação de polígonos, identificação de quadriláteros, relações entre as retas, entre outros.

A partir de tudo aquilo que já foi mencionado, acredita-se que os problemas iriam constituir-se uma mais valia para o desenvolvimento do gosto pela matemática nos alunos, na medida em que as conexões e as experiências que iriam ter através dos problemas iriam fazer-lhes ver a matemática de uma outra forma. Para além disso, também iria ser trabalhadas outras competências como a comunicação e o raciocínio matemáticos, uma vez que a discussão e a partilha de ideias seria um ponto chave neste trabalho, contribuindo para uma melhor compreensão dos problemas e para a ampliação do reportório de estratégias dos alunos.

CAPÍTULO V – CONCLUSÕES

No presente capítulo apresentam-se uma análise do trabalho de investigação desenvolvido, sendo mencionadas as possíveis conclusões do estudo, as principais limitações que poderiam encontrar-se e as perspetivas para futuros estudos.

1. Principais conclusões do estudo

Tal como já foi mencionado, o estudo realizar-se-ia ao longo da PES II durante a intervenção didática na área disciplinar de matemática numa turma do 6º ano de escolaridade. Com ele pretendia compreender-se o desempenho dos alunos na resolução de problemas com números racionais positivos sob a forma de fração onde se privilegiam as representações visuais e onde os contextos das diferentes tarefas privilegiam as conexões dentro e fora da matemática. Para isso, foram definidas três questões orientadoras, às quais se pretendia dar resposta: Q1) Como se pode caracterizar o desempenho dos alunos na resolução de problemas que envolvem números racionais positivos sob a forma de fração pelos diferentes contextos apresentados e conexões que suscitam? Q2) Que estratégias de resolução de problemas são privilegiadas pelos alunos na resolução dos problemas propostos? Q3) Como se podem caracterizar as principais dificuldades dos alunos na resolução dos problemas propostos?

Se o estudo decorresse consoante aquilo que foi planeado, existiria um capítulo anterior a este no qual se analisariam os dados de modo a que, neste mesmo capítulo se retirassem algumas conclusões. Desta forma, os dados que seriam recolhidos através dos diferentes instrumentos e métodos utilizados (questionários, registos escritos dos alunos na resolução dos problemas, observações e entrevistas não estruturadas (conversas) nos momentos de resolução e de discussão dos problemas) seriam fundamentais para se compreender o desempenho dos alunos na resolução dos problemas, as estratégias utilizadas e as dificuldades apresentadas. Contudo, pelas razões já mencionadas anteriormente não foi possível essa recolha de dados, pelo que as conclusões que se apresentam de seguida irão ser baseadas na literatura, em estudos empíricos realizados no mesmo âmbito e em expectativas pessoais tendo em conta as características da turma.

Q1) Como se pode caracterizar o desempenho dos alunos na resolução de problemas que envolvem números racionais positivos sob a forma de fração pelos diferentes contextos apresentados e conexões que suscitam?

Como já foi referido, “os números racionais constituem um dos temas matemáticos mais complexos e mais importantes com que os alunos se deparam ao longo do ensino básico (Behr et al., 1983, citado por Guerreiro & Serrazina, 2017). Vale e Barbosa (2020a) destacam a ideia de que a aprendizagem dos números racionais é difícil para os alunos. Aliado a isso, a resolução de problemas também se tem considerado um tema de bastante complexidade e importância (Vale et al., 2015). Assim sendo, acredita-se que, numa fase inicial, os alunos poderiam demonstrar-se pouco entusiasmados, podendo até apontar que não gostavam do tema dos números racionais nem de resolver problemas (através do questionário inicial).

No seguimento da intervenção didática e da resolução dos problemas propostos, esperava-se que os alunos fossem ganhando o gosto pelo tema e pela resolução de problemas, tanto pela exploração de estratégias mais visuais como pelas conexões estabelecidas. Desta forma, esperava-se que o desempenho dos alunos fosse cada vez melhor à medida que iam resolvendo os problemas.

Através da análise de estudos já realizados no mesmo âmbito (e.g. Vieira (2018), Barreto (2019) e Sá (2020)) percebe-se que, neste nível de ensino, os alunos demonstravam pouco contacto com tarefas semelhantes às que iriam ser propostas, mas que uma prática onde se privilegia este tipo de tarefas e o modo das explorar tem permitido identificar que o desempenho dos alunos, à medida em que se iam familiarizando com elas e com as diferentes estratégias de resolução, melhora.

Q2) Que estratégias de resolução de problemas são privilegiadas pelos alunos na resolução dos problemas propostos?

Atendendo ao facto de que as representações visuais podem ter vantagens sobre outras representações, de modo a facilitar a resolução de problemas, e de que a visualização é uma ferramenta cada vez mais poderosa nas práticas de sala de aula (Vale, 2017), neste estudo, ao longo da resolução dos problemas, iriam ser discutidas com a turma as diferentes estratégias de resolução, de modo que os alunos se familiarizassem cada vez mais com as estratégias visuais. Como aconteceu noutros estudos onde se privilegiavam estratégias visuais de resolução de problemas (e.g. Vieira (2018), Barreto (2019) e Sá (2020)), os alunos começavam pela utilização de estratégias analíticas apenas, sendo que, mais tarde, começavam a apropriar-se das estratégias visuais. Esta abordagem também permitiria identificar alunos que se sintam mais confortáveis com este tipo de abordagem. A apropriação por estas estratégias decorreria ao longo do tempo.

Q3) Como se podem caracterizar as principais dificuldades dos alunos na resolução dos problemas propostos?

Como já foi mencionado em capítulos anteriores, os números racionais são um dos temas mais complexos no ensino e aprendizagem da matemática, como tal, algumas dificuldades estão associadas a este mesmo tema, nomeadamente pelas suas diferentes representações e significados. Guerreiro e Serrazina (2017), tendo em conta trabalhos de outros autores (Behr et al., 1983; Lamon, 2006; Monteiro & Pinto, 2005; Vamvakoussi, Doore & Verschaffel, 2012) referem que na aprendizagem dos números racionais os alunos revelam dificuldades na compreensão da rede de conceitos que o estudo do tema envolve. Do mesmo modo, Vale e Barbosa (2020a), considerando estudos de outros autores, apontam que "é demonstrado um fraco desempenho no cálculo e na resolução de problemas com números racionais" (p. 236).

Neste sentido e, através da análise dos resultados obtidos em estudos onde eram propostos aos alunos problemas com números racionais, percebe-se que as dificuldades sentidas eram ao nível da identificação da(s) operação(ões) que permitia(m) resolver a tarefa (Esteves, 2018), da interpretação do significado da fração (Esteves, 2018; Vieira, 2018), da interpretação de enunciados (Vieira, 2018; Barreto, 2019), das justificações por escrito (Barreto, 2019; Sá, 2020) e dos erros de cálculo (Barreto, 2019). De realçar que nem todas as dificuldades apontadas foram detetadas em todos os estudos, nomeadamente por terem sido realizados em turmas diferentes com características e dificuldades diferentes.

De um modo geral, a dinâmica desta investigação permitiu aprofundar os estudos já realizados sobre o tema e os trabalhos de diversos autores. De facto, todo o trabalho de investigação permitiu perceber que este estudo, apesar de possuir um carácter teórico, conseguiria aplicar-se perfeitamente na prática e revelar resultados esclarecedores. Considera-se, também, pelo facto de se introduzirem as conexões neste estudo (em comparação com outros semelhantes) que se revelaria bastante importante na motivação e gosto dos alunos pela disciplina. Os diferentes contextos e as diferentes conexões permitiriam ver a aplicabilidade dos números racionais e dar uma melhor compreensão a algumas das operações matemáticas com números racionais. Desta forma, pretendia-se que, no final, muitas das dificuldades dos alunos na resolução de problemas com números racionais sob a forma de fração fossem possíveis de ultrapassar a partir da proposta realizada.

2. Limitações e recomendações para futuros estudos

Para além da grande limitação que impediu a recolha de dados para a concretização deste estudo, outras limitações poderiam ter surgido ao longo da investigação. Uma delas, apontada em estudos anteriores (e.g. Esteves (2018); Vieira (2018); Barreto (2019) e Sá (2020)) prende-se com o facto de se ter de desempenhar um papel duplo de professora estagiária e investigadora que impossibilita uma boa gestão do tempo. Em todos os estudos mencionados, as investigadoras salientam o facto de que o papel de professora se sobrepôs ao de investigadora, uma vez que existia uma grande preocupação em cumprir com plano da aula e com os conteúdos programados. Referem, ainda, que se tornou uma tarefa bastante difícil o registo de notas/ diálogos que se tornariam fundamenais no momento da análise dos dados, por iriam complementar os restantes. Em contrapartida, algumas investigadoras recorreram a filmagens ou gravações áudio, podendo, assim, na falta de registos escritos, complementar os dados com aquilo que captaram através desses métodos.

Para futuros estudos sugere-se que se analisem os estudos anteriores relacionados com o tema, uma vez que já existem alguns em Portugal, de modo a que se percebam as limitações existentes. Desta forma, o investigador irá mais preparado para algumas situações, nomeadamente para alguns constrangimentos que possam surgir na recolha dos dados. Tendo em conta o sucedido, espera-se poder, no futuro, realizar estas tarefas com uma turma do 2ºCEB, podendo-se até propor problemas que estabeleçam conexões com outras áreas do currículo dos alunos.

PARTE III – REFLEXÃO GLOBAL DA PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA

A terceira parte do presente relatório destina-se à reflexão global da PES, tanto no contexto do 1º CEB como no contexto do 2º CEB. Além disso, apresenta-se, também, uma reflexão sobre os contributos das experiências vividas para a formação profissional e pessoal.

1. REFLEXÃO GLOBAL

Antes da reflexão da PES, será importante refletir, também, acerca de alguns momentos anteriores, de modo que se perceba a caminhada realizada.

Ao longo de todo o ensino básico e secundário, foram-se cruzando vários professores no meu percurso, contudo, só alguns é que tiveram a grande capacidade de me marcar, recordando-os, ainda hoje, com grande carinho e admiração. Foi com essa inspiração que decidi ingressar num curso de educação, com o real objetivo de ser uma profissional capaz de despertar a curiosidade e a vontade de aprender nos alunos.

Neste sentido, e, anteriormente ao mestrado, conclui a licenciatura em Educação Básica. De facto, foi ao longo da licenciatura que o gosto pelo ensino foi ficando cada vez maior, apesar das inseguranças que surgiam pelo facto de se tratar de um futuro de grande responsabilidade. Ao longo desses três anos de licenciatura, tive a oportunidade de contactar com diferentes contextos, sendo que, as experiências vividas contribuíram para a minha decisão acerca da escolha do mestrado no qual iria ingressar.

Assim, a minha opção recaiu para o mestrado em ensino do 1º CEB e de Matemática e Ciências Naturais no 2º CEB, onde se desenvolveram, no primeiro ano, várias ferramentas que seriam essenciais para a prática. Prática esta que aconteceu no segundo ano de mestrado e que foi, para mim, a prova mais exigente até então, nomeadamente pelo ritmo acelerado de trabalho.

A intervenção educativa ocorreu em dois momentos, o primeiro numa turma do 4º ano de escolaridade e o segundo numa turma do 6º ano de escolaridade. Em ambos se desenvolveu a observação da turma, para que, posteriormente, se pudesse planear, implementar e refletir. Realça-se o facto de que estas fases ocorreram de forma cíclica, intervalando a implementação com o par pedagógico. A fase de observação tornou-se fundamental para conhecer as turmas, tanto a nível comportamental como a nível procedimental, nomeadamente ao nível das rotinas e das preferências dos alunos.

Na intervenção educativa no 1º CEB, para a fase de planeamento, o Professor Cooperante sempre nos deu liberdade para o modo como ocorreria a lecionação dos conteúdos. Assim, o planeamento tornava-se um momento de criação e discussão entre o par pedagógico de modo a que fosse possível proporcionar aos alunos aulas mais atrativas e desafiantes. De realçar que se planeavam as aulas mediante os conteúdos propostos pelo Professor Cooperante. Já na fase de implementação, o desafio era colocar em prática aquilo que foi planeado previamente, tendo em atenção as reações dos alunos para que a ação produzisse os melhores efeitos possíveis. Por último, a fase de reflexão tornou-se fundamental para o melhoramento e crescimento, tanto pessoal como profissional, na medida em que as diferentes opiniões sobre a prática possibilitaram repensar determinadas ações, de modo a que algumas menos boas não fossem repetidas. Recordando os momentos vividos, no início senti-me muito apreensiva tendo em conta o desafio que iria enfrentar, contudo, ao longo do tempo fui-me sentindo cada vez mais à vontade e preparada, nomeadamente pelos laços que se foram criando. De um modo geral, o contacto com a turma e toda a comunidade educativa superaram as minhas expectativas, tornando-se uma experiência muito enriquecedora, não só a nível profissional, mas principalmente a nível pessoal e afetivo.

Já na intervenção educativa no 2º CEB, tudo seguia conforme o que estava planeado, tendo-se completado a fase de observação da turma do 6º ano de escolaridade, até que, pela pandemia de COVID-19 que se instalou, as escolas tiveram de ser encerradas em todo o território nacional. Ora, com este encerramento por tempo indefinido, o nosso trabalho teve de ficar suspenso até ao momento em que se percebeu que as escolas não voltariam a abrir nesse ano letivo. Desta forma, o trabalho de planeamento foi retomado para que, se conseguisse implementar uma aula virtualmente de cada área (Matemática e Ciências Naturais), de forma a sermos avaliados.

Inicialmente, quando fomos para a escola onde se desenvolveria a intervenção educativa no 2º CEB, senti, desde logo, uma grande mudança, uma vez que a relação com toda a comunidade educativa que se vivia no contexto do 1º CEB era totalmente diferente. Apesar disso, as Professoras Cooperantes sempre se dispuseram a ajudar e o contacto com os alunos fez-me perceber que estariam dispostos a colaborar e a trabalhar.

Ao longo das observações, percebeu-se que a turma era bastante boa, com alunos muito empenhados, curiosos e participativos e com outros um pouco distraídos. Assim, no planeamento das aulas, foram tidas essas características em atenção e tentou-se criar aulas em que os alunos tivessem voz, ou seja, que tivessem de dialogar e expor os seus raciocínios, tentando sempre que se sentissem motivados e interessados. A curiosidade dos alunos, nomeadamente na área de Ciências Naturais, fazia-os levantar muitas questões, o que me fez perceber que teria de ir muito bem preparada para as aulas, até mesmo com assuntos que se afastassem um pouco do assunto tratado. Este aspeto deixava-me um pouco inquieta, nomeadamente por ter receio de não estar à altura do desafio, contudo, por outro lado, constituía-se uma motivação extra para fazer mais e melhor.

Todavia, como já foi referido, a fase de observação terminou e, antes do início da fase de implementação as escolas encerraram. Neste momento, já tinham sido realizadas as planificações para 4 semanas de regência na área das Ciências Naturais, já tinham sido vistas pela Professora Cooperante e estavam a ser vistas pela Professora Supervisora. Mais tarde, no momento em que se ficou a saber a decisão de que não iriam reabrir as escolas, as Professoras Supervisoras comunicaram-nos que iriamos ter de implementar uma das aulas à nossa escolha através da plataforma Zoom e que teríamos de continuar o trabalho de planificação para a outra área. Esta pareceu-me uma boa alternativa, contudo, os planos deixados a meio entristeceram-me, nomeadamente pelo facto de que não iria ser possível realizar o trabalho de investigação para o relatório com a participação os alunos. Relativamente às vídeo-regências através do Zoom, fizeram-me perceber que é possível criar dinâmicas como em sala de aula, é possível diversificar tarefas e é possível utilizar diferentes recursos. Também o facto de ser realizada uma reflexão relativamente à regência por parte dos colegas e das Professoras Supervisoras fizeram com que repensasse algumas ações e melhorasse/ evoluísse a nível profissional e pessoal. De um modo geral, apesar de ter sido uma experiência diferente, considero que foi uma experiência que me enriqueceu bastante, que me fez abrir os horizontes e que proporcionou momentos de grande partilha, aprendizagem e superação.

Apesar de ter sido pouco o contacto com a turma do 6º ano de escolaridade, foi o suficiente para ter percebido que iriam exigir muito de mim e que me iriam surpreender muito, assim como aconteceu com a turma do 4º ano. Sinto-me muito grata por ter tido as experiências descritas e considero que sem elas não teria crescido e evoluído, como aconteceu. Reconheço, também, que tenho ainda muita margem para crescer a nível profissional e espero que as experiências futuras sejam tão boas ou melhores que estas.

De um modo geral, a PES é a etapa que mais se aproxima da realidade do professor, é a etapa em que, apesar de estagiários, assumimos a turma como nossa e desenvolvemos um trabalho ativo com ela. Sem dúvida que a PES contribuiu, ainda mais, para o meu gosto pelo ensino e deu-me certezas de que é uma das profissões mais fascinantes e importantes para a sociedade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aires, L. (2015). *Paradigma qualitativo e Práticas de Investigação Educacional.* Universidade Aberta.

Amado, J. (2017). *Manual de Investigação Qualitativa em Educação.* Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra.

Amado, N., Carreira, S. & Canavarro, A. P. (2019). Sobre o tema conexões matemáticas. In N. Amado, A. P. Canavarro, S. Carreira, R. T. Ferreira & I. Vale (Eds.), *Atas do EIEM 2019* (pp. 3-6). Loulé: Escola Profissional Cândido Guerreiro.

Barbosa, A. (2009). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico*. (Dissertação de Doutoramento). Braga: Universidade do Minho.

Barreto, M. (2019). *A Resolução de Problemas de Números Racionais numa turma de 6º ano de escolaridade: o contributo de uma Gallery Walk.* (Relatório Final de Prática de Ensino Supervisionada do Mestrado em Ensino do 1º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2º Ciclo do Ensino Básico). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação – Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.)*, Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Boavida, A. M. R., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico*. Lisboa: ME- DGIDC.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação- Uma Introdução à Teoria e aos Métodos*. Porto: Porto Editora.

Cabrita, I. & Fonseca, L. (2012). Capacidades transversais em Educação Matemática. In Pinto, H., Jacinto, H., Henriques, A., Silvestre, A. & Nunes, C. (Org.), *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 539-544). Lisboa: APM.

Camacho, N. (2011). *A Matemática e as suas conexões com o quotidiano: à descoberta da matemática no dia-a-dia.* (Relatório de Estágio de Mestrado em Ensino da Matemática no 3º CEB e Secundário). Funchal: Universidade da Madeira.

Câmara Municipal de Viana do Castelo (2020). *Viana do Castelo – Apresentação*. Acedido em 05 de fevereiro de 2020 em: http://www.cm-viana-castelo.pt/pt/apresentacao.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino Exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115,* 11-17.

Canavarro, A. P. (2017). O que a investigação nos diz acerca da aprendizagem da matemática com conexões — ideias da teoria ilustradas com exemplos. *Educação e Matemática, 144-145*, 38-42.

Canavarro, A. P., Oliveira, H. & Menezes, L. (2014). Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 217-233). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Canelas, A. (2016). *Resolução de problemas com números racionais – Um estudo com alunos do 5º ano de escolaridade.* (Relatório da componente de investigação do relatório de estágio do Mestrado em Ensino do 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico). Setúbal: Escola Superior de Educação – Instituto Politécnico de Setúbal.

Coutinho, C. (2014). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: teoria e prática.* Coimbra: Edições Almedina.

DGE (2018). *Aprendizagens Essenciais – articulação com o Perfil dos Alunos 6º ano - 2º Ciclo Matemática.* Lisboa: Direção Geral de Educação.

Esteves, A. (2018). *A resolução de tarefas envolvendo números racionais não negativos: um estudo com uma turma do 5º ano de escolaridade.* (Relatório Final de Prática de Ensino Supervisionada do Mestrado em Ensino do 1º e 2º Ciclos do Enino Básico). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação – Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Fernandes, D. (1991). Notas sobre os paradigmas de investigação em educação. *Noesis, 18,* 64–66.

Fernandes, M. F. (2019). *A resolução de tarefas matemáticas em contextos não formais de aprendizagem – um estudo com o 3º ano de escolaridade* (Tese de Doutoramento). Braga: Universidade do Minho.

Ferreira, C. (2012). *Conexões matemáticas em álgebra: um estudo com alunos do 7º ano de escolaridade* (Relatório de Mestrado em Educação). Lisboa: Universidade de Lisboa – Instituto de Educação.

Fonseca, A. (2012). *Potencialidades da atividade lúdica na educação pré-escolar e no ensino básico*. (Relatório de Estágio). Açores: Universidade dos Açores.

Gomes, A (2021*). A influência do contexto na resolução de tarefas com números racionais não negativos numa turma de 6.º ano de escolaridade* (Relatório Final de Prática de Ensino Supervisionada do Mestrado em Ensino do 1º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2º Ciclo do Ensino Básico). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação – Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Greeno, J. & Hall, R. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappa, 78(5),* 361-367.

Guerreiro, H. & Serrazina, M. L. (2017). A Aprendizagem dos Números Racionais com Compreensão Envolvendo um Processo de Modelação Emergente. *Bolema, 31*(57), 181-201.

Guerreiro, H. G., Morais, C., Serrazina, L. & Ponte, J. P. (2018). Múltiplas representações num percurso de aprendizagem dos números racionais. In A. Rodrigues, A. Barbosa, A. Santiago, A. Domingos, C. Carvalho, C. Ventura, …, S. Carreira (Eds), *Atas do EIEM 2018* (pp. 551-561). Coimbra: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Coimbra.

Instituto Nacional de Estatística (2011). *Censos Resultados Definitivos – Região Norte*. Lisboa: INE.

Jacinto, H. & Pires, M. V. (2019). Tarefas e recursos para a promoção de conexões matemáticas. In N. Amado, A. P. Canavarro, S. Carreira, R. T. Ferreira & I. Vale (Eds.), *Atas do EIEM 2019* (pp. 3-6). Loulé: Escola Profissional Cândido Guerreiro.

Laranjeira, A. (2017). *A compreensão da adição/subtração de números racionais (não negativos) representados na forma de fração: um estudo numa turma do 6º ano de escolaridade.* (Relatório Final de Prática de Ensino Supervisionada do Mestrado em Ensino do 1º Ciclo e de Matemática e Ciências da Natureza do 2º Ciclo do Ensino Básico). Lisboa: Escola Superior de Educação de Lisboa - Instituto Politécnico de Lisboa.

Leite, L. (2000). O trabalho laboratorial e a avaliação das aprendizagens dos alunos. In Sequeira, M. *et al.* (Org.), *Trabalho prático e experimental na educação em ciências* (pp. 91 – 108). Braga: Universidade do Minho.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

MEC (2015). *Programa e Metas Curriculares de Português do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

ME (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória.* Lisboa: Ministério da Educação.

Melo, T. (2013). *Conexões Matemáticas: potencialidades e contributos na Educação Pré-Escolar e no 1º Ciclo do Ensino* (Relatório de estágio do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1º Ciclo do Ensino Básico). Açores: Universidade dos Açores – Departamento de Ciências da Educação.

Monteiro, C. & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante,* 14(1), 89-107.

Morais, C., Cerca, R., Quaresma, M. & Ponte, J. P. (2014). Os números racionais no 2ºano: Um estudo diagnóstico. In H. M. Martinho, R. A. Ferreira, A. M. Boavida & L. Menezes (Eds.), *Atas do EIEM 2014* (pp. 91-109). Braga: APM.

Morais, C., Serrazina, L. & Ponte, J. P. (2018). Números racionais no 1.º ciclo: compreensão de grandeza e densidade apoiada pelo uso de modelos. *Quadrante, XXVII*(1), 25-45.

NCTM (2017). *Princípios para a ação: assegurar a todos o sucesso em matemática.* Lisboa: APM.

Oliveira, H. & Borralho, A. (2014). As tarefas e a aprendizagem dos alunos. In Leonor Santos (Ed.), *Investigação em Educação Matemática 2014 – tarefas matemáticas* (pp. 149-156). Setúbal: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Pinto, H. (2011). *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais.* (Tese de Doutoramento). Lisboa: Universidade de Lisboa – Instituto de Educação.

Pinto, H. & Ribeiro, C. M. (2013). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos – o sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas, 3*(1), 80-98.

Ponte, J. P. (2002). O ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade Educativa?. In Conselho Nacional de Educação (Org.), *O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas* (pp. 1-28). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

Ponte, J., P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. & Quaresma, M. (2011). Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: um estudo de desenvolvimento curricular. *Quadrante, XX*(1), 55-81.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2012). O Papel do Contexto nas Tarefas Matemáticas. *Em Interacções, 22*, 196-216.

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J. & Baptista, M. (2015). Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula. *Quadrante XXIV*(2), 111-134.

Quaresma, M. & Ponte, J. P. (2012). Compreensão dos números racionais, comparação e ordenação: o caso de Leonor. *Interacções,* 20, 37-69.

Rodrigues, C., Menezes, L. & Ponte, J. P. (2014). Práticas de discussão matemática no ensino da Álgebra. In M. H. Martinho, R. A. Tomás Ferreira, A. M. Boavida & L. Menezes (Eds.), *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 65–78). Braga: APM.

Sá, S. (2020). *A resolução de problemas com números racionais - representações e estratégias utilizadas por alunos do 6º ano de escolaridade.* (Relatório Final de Prática de Ensino Supervisionada do Mestrado em Ensino do 1º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2º Ciclo do Ensino Básico). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação – Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Scaptura, C., Suh, J. & Mahaffey, G. (2007). Masterpieces to Mathematics: using art to teach fraction, decimal, and percent equivalentes. *Mathematics Teaching In The Middle School, 13(1)*, 24-28.

Serrazina, L. (s.d.). *Resolução de problemas*. Acedido em 2 julho de 2020: http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/COORDENADORES/Materiais%20Coordenad/Textos/Problemas_texto_Coord.pdf

Silva, M. N., Boavida, A. M. & Oliveira, H. (2012). Desenvolvendo o sentido de número racional: Que desafios para o professor? In A. P. Canavarro, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Atas do EIEM 2012* (pp. 201-214). Castelo de Vide: Escola Superior de Educação de Portalegre.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema, 14*, 66-91.

Stein, M. & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para reflexão. *Educação Matemática,* 105, 22-28.

Teixeira, M., T. & Reis, M., F. (2012). A Organização do Espaço em Sala de Aula e as suas Implicações na Aprendizagem Cooperativa: *Meta: Avaliação, 4* (11), 162-187.

Ujiie, N. T., Brum, W. P., Pinheiro, N. A. M., Ciappina, J. R. & Silva, S. C. R. (2017). Os conhecimentos prévios de matemática de estudantes do ensino fundamental: O que é matemática? De onde ela veio? Como seria um mundo sem matemática?: *Alexandria, 10*(1), 57-73.

Vale, I. (2002). *Materiais Manipuláveis.* Viana do Castelo: Laboratório de Educação Matemática – Escola Superior de Educação do IPVC.

Vale, I. (2004). Algumas Notas sobre Investigação Qualitativa em Educação Matemática - O Estudo de Caso. *Revista da Escola Superior de Educação, 5*, 171–200.

Vale, I. (2015). A criatividade nas (re)soluções visuais de problemas. *Educação e Matemática, 135*(9), 9-15.

Vale, I. (2017a). Matemática e Arte: uma Conexão a Explorar no Ensino da Matemática. *Diálogos com a arte – revista de arte, cultura e educação, 7*, 223-242.

Vale, I. (2017b). Resolução de Problema um Tema em Contínua Discussão: vantagens das Resoluções Visuais. In L. de la Rosa Onuchic, L. C. Leal Junior, M. Pironel (Orgs.), *Perspectivas para Resolução de Problemas* (pp. 131-161). São Paulo: Editora Livraria da Física.

Vale, I. & Barbosa, A. (2017). The importance of seeing in mathematics communication. *Journal of the European Teacher Education Network, 12*, 49-63.

Vale, I. & Barbosa, A. (2018). O contributo de uma Gallery Walk para promover a comunicação matemática. *Educação Matemática, 149/150, 2-8.*

Vale, I. & Barbosa, A. (2020a). A resolução de problemas com frações - uma abordagem visual. In E. Mamede, H. Pinto, C. Monteiro (Orgs), *Contributos para o desenvolvimento do sentido de número racional* (pp. 221-245). Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM).

Vale, I. & Barbosa, A. (2020b). Gallery Walk: uma estratégia ativa para resolver problemas com múltiplas soluções. *REMAT, 17*(24), 1-19.

Vale, I., & Pimentel, T. (2004). Resolução de Problemas. In P. Palhares (Ed.), *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico* (pp. 7–51). Lisboa: Lidel.

Vale, I. & Pimentel, T. (2011). Padrões e conexões matemáticas no ensino básico. *Educação Matemática, 110*, 33-38.

Vale, I., & Pimentel, T. (2012). Um novo-velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em Matemática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de Ensino da Matemática* (pp. 347-360). Lisboa: SPIEM.

Vale, I., Pimentel, T. & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante XXIV*(2), 39-60.

Vale, I., Sousa, R. & Pimentel, T. (2007). *Matemática no 2º Ciclo – Propostas para a sala de aula.* Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Vale, I., Fão, A., Alvarenga, D., Geraldes, F., Sousa, R., & Pimentel, T. (2008). *Matemática no 1º e 2º Ciclos – Propostas para a sala de aula.* Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Ventura, H. (2013). *A aprendizagem dos números racionais através das conexões entre as suas representações: uma experiência de ensino no 2º ciclo do ensino básico.* (Tese de Doutoramento). Lisboa: Universidade de Lisboa – Instituto de Educação.

Ventura, H., & Oliveira, H. (2014). Uma abordagem paralela das várias representações dos números racionais através de tarefas que promovem o modelo da barra numérica. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 83-110). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Vieira, J. (2018). *A resolução de tarefas com frações numa turma de 6º ano de escolaridade.* (Relatório Final de Prática de Ensino Supervisionada do Mestrado em Ensino do 1º

Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2º Ciclo do Ensino Básico). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação – Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Zabala, A. (1998). *A prática educativa: como ensinar*. ArtMed: Porto Alegre.

ANEXOS

Anexo 1 – Pedidos de autorização aos Encarregados de Educação

Exmo. Encarregado de Educação,

No âmbito do Mestrado em Ensino do 1º Ciclo do Ensino Básico e de Matemática e Ciências Naturais no 2º Ciclo do Ensino Básico da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo e da nossa prática como Professoras Estagiárias, iremos desenvolver na turma do(a) seu(sua) educando(a) duas investigações na área da Matemática. Como tal, irá ser necessária a recolha de dados em diferentes formatos, como fotografias, vídeos, áudios e registos escritos. Salientamos o facto de que iremos preservar o anonimato de todos os dados recolhidos e de que irão ser apenas utilizados para a investigação.

Assim, vimos por este meio solicitar a Vª Exª autorização para que o(a) seu(sua) educando(a) participe nestes estudos, permitindo a recolha dos dados acima mencionados. Agradecemos desde já a sua disponibilidade e colaboração, solicitando que assine a autorização abaixo.

Viana do Castelo, 12 de março de 2020

As Professoras Estagiárias,

____

____

Eu, ____, encarregado(a) de educação do(a) aluno(a) ____, nº____, do ano/turma **6ºE**, declaro que __________________________ (autorizo/ não autorizo) a participação do meu educando nos estudos acima referidos e a recolha de dados necessária à sua concretização.

Data: ___/___/____

Assinatura: _______________________________________

Anexo 2- Questionário Inicial

QUESTIONÁRIO INICIAL

Sexo: ☐ Feminino ☐ Masculino **Idade:** _______

1. **Gostas da disciplina de Matemática?**

   ☐ Sim ☐ Não

   Porquê?

   ____

   ____

2. **Achas que a Matemática está presente na tua vida?**

   ☐ Sim ☐ Não

   Se sim, em que situações surge?

   ____

   ____

3. **Recordas-te dos Números Racionais?**

   ☐ Sim ☐ Não

4. **O que sabes sobre o tema?**

   ____

   ____

5. **Em que situações do teu dia-a-dia utilizas ou podes utilizar os números racionais?**

   ____

   ____

6. **Gostas de resolver problemas?**

   ☐ Sim ☐ Não

7. Consideras importante a Resolução de Problemas?

☐ Sim ☐ Não

Porquê?

____

____

8. De 1 a 4, como classificas o teu desempenho na resolução de problemas? Considerando 1 como fraco, 2 como razoável, 3 como bom e 4 como muito bom.

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Porquê?

____

____

9. Qual/ Quais as dificuldades que costumas ter na resolução de problemas?

____

____

10. De que forma(s) costumas resolver problemas?
Seleciona a(s) opção(ões):

☐ Através de cálculos
☐ Através de palavras
☐ Através de esquemas/ desenhos
☐ Outro: ______________________

11. É mais fácil expores as tuas ideias oralmente ou por escrito?

☐ Oralmente ☐ Por escrito

Porquê?

____

____

12. Sabes o que são conexões matemáticas?

Se sim, em que situações surge?

____

____

Obrigada pela participação! 😊

Anexo 3- Questionário final

QUESTIONÁRIO FINAL

Sexo: ☐ Feminino ☐ Masculino **Idade:** ________

1. **O que aprendeste de novo sobre os Números Racionais?**

____

____

2. **As tarefas que resolveste estabeleciam diferentes conexões com a arte, vida real e matemática. Qual(ais) as que te surpreenderam mais? Porquê?**

____

____

3. **Verificaste algumas situações em que se estabeleceram conexões nos problemas com os Números Racionais. Essas conexões alteraram o modo como te relacionavas com o tema?**

   ☐ Sim ☐ Não

   Em que sentido?

____

____

4. **O que achaste dos 10 problemas que foram propostos?**

   ☐ Pouco interessantes

   ☐ Interessantes

   ☐ Muito interessantes

   Porquê?

____

____

5. **Os problemas propostos despertaram em ti o gosto pela Matemática?**

   ☐ Sim ☐ Não

6. **Os problemas propostos despertaram em ti o gosto pela Resolução de Problemas?**

☐ Sim ☐ Não

7. **De 1 a 4, como classificas o teu desempenho na resolução dos 10 problemas? Considerando 1 como fraco, 2 como razoável, 3 como bom e 4 como muito bom.**

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Porquê?

____

____

8. **Qual(ais) as principais dificuldades que sentiste na resolução dos problemas?**

____

____

9. **Depois de contactares com diferentes estratégias de resolução de problemas, qual preferes?**

☐ Visuais ☐ Não visuais

10. **Consideras que as discussões em grande grupo sobre as estratégias de resolução de problemas foram importantes?**

☐ Sim ☐ Não

Porquê?

____

____

11. **Dos 10 problemas, qual foi aquele que mais gostaste de resolver? Porquê?**

____

____

12. **E o que menos gostaste de resolver? Porquê?**

____

____

Obrigada pela participação! 😊

Anexo 4- Os dez problemas propostos

1. **Sala de espetáculos**

A sala de espetáculos de Retorta tem capacidade para 200 lugares sentados. No espetáculo da Inês estavam preenchidos $\frac{4}{5}$ *desses lugares. Quantas pessoas estavam a assistir ao espetáculo sentadas?*

Noutros espetáculos já tinham notado que a capacidade da sala era insuficiente, por isso decidiram aumentá-la 25%. Quantos lugares sentados passará a ter?

(Adaptado de Ventura, H. (2013)).

2. **O aniversário**

No seu aniversário a Inês foi ao cinema com as amigas e levou o dinheiro que recebeu da avó. Quando chegou a casa tinha 24€, pois gastou $\frac{2}{5}$ *do dinheiro no bilhete para o cinema, pipocas, chocolate e bebida.*

- Quanto dinheiro gastou?
- Que quantia lhe deu a avó?

(Adaptado de materiais de apoio da Unidade Curricular de Didática da Matemática lecionada pela Doutora Isabel Vale.)

3. **Linces-Ibéricos**

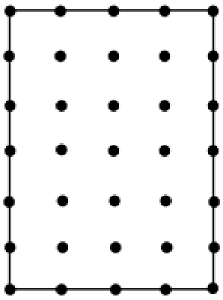
Num centro de reprodução de linces-ibéricos registou-se o número total de crias nascidas em três anos consecutivos. No primeiro ano nasceram $\frac{2}{5}$ *das crias, no segundo ano nasceu* $\frac{1}{3}$ *e no terceiro ano nasceram 8 crias.*

Qual foi o número de crias nascidas no primeiro ano?

(Adaptado de IAVE (2017). Prova de aferição de Matemática e Ciências Naturais.)

4. Telas de pintura

Material: Folhas ponteadas



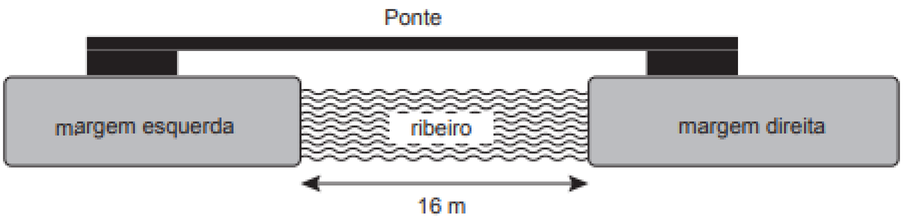
Na turma do Luís foi pedido aos alunos que imaginassem ser pintores. Para futuros quadros, encomendaram alguns divididos em partes geometricamente iguais ($\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}$ *e* $\frac{1}{24}$*).*

Supõe que és aluno desta turma e, imaginando que o retângulo de fundo representa uma tela, representa as frações $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}$ *e* $\frac{1}{24}$ *e pinta cada uma das partes com cores diferentes. Apresenta tantas telas quantas queiras.*

(Adaptado de Vale, I., & Pimentel, T. (2012)).

5. Ponte

Na terra da Leopolda existe uma ponte que está construída sobre um ribeiro numa zona onde a largura do ribeiro é de 16m (como está na figura).



Do comprimento total da ponte, sabe-se que $\frac{7}{20}$ *estão sobre a margem esquerda e* $\frac{1}{4}$ *está sobre a margem direita do rio. Qual o comprimento total da ponte, em metros?*

(Adaptado de IAVE (2016). Prova de aferição de Matemática.)

6. Azulejos

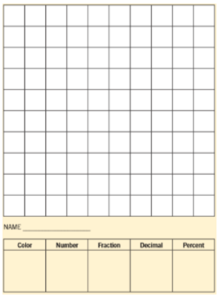
O pai da Marlene vai forrar uma parede do seu jardim com azulejos quadrados cujo lado mede $\frac{1}{5}$ *do metro. Consegues indicar a área de cada azulejo?*

Sabendo que a parede tem 12 m^2 *de área e* $1\frac{1}{2}$ *m de altura, consegues calcular o seu comprimento?*

(Adaptado de Pinto, H. (2011)).

7. **Quadros coloridos**

<u>Material:</u> Folhas quadriculadas
Lápis de cor
Post-it quadrados



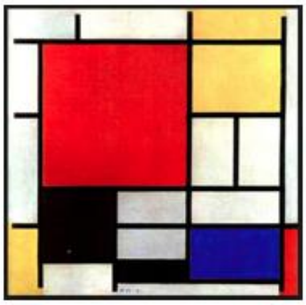
Para a exposição de arte da escola da Mariana foi proposto aos alunos da sua turma que cobrissem uma folha quadriculada com post-its de várias cores criando um quadro colorido (usando folhas post-it inteiras). Depois de expostos, os alunos teriam de escolher um quadro (sem ser o seu), analisando-o, indicando o número de post-its de cada cor utilizados, a fração que representa essa cor na totalidade do quadro, bem como a sua representação na forma decimal e de percentagem.

Supõe que és aluno desta turma e pinta a tua folha quadriculada, utilizando os lápis de cor ou post-its. No final, troca com o teu colega e ele terá de identificar qual a percentagem de cada uma das cores presentes no quadro, apresentando, também, essa relação na forma de fração e decimal (número com vírgula).

(Adaptado de Scaptura, C., Suh, J. & Mahaffey, G. (2007)).

8. **O quadro de Mondrian**

<u>Material:</u> Uma imagem por cada um dos alunos



Numa exposição de arte, uma professora de matemática deparou-se com o quadro de Mondrian da figura e ficou a admirá-lo. Pensou em algumas questões que lhe surgiram e propôs a sua resolução aos alunos.

Imagina que és aluno desta turma e tenta dar resposta aos seguintes desafios:

1. Que relações identificas entre as retas?
2. Que tipo de quadriláteros identificas?
3. Corta todas as peças que compõem o quadro. Descobre que peças que são 1/4 do quadrado vermelho. Que parte do quadrado preto é um dos retângulos cinza? Descobre que peças são o dobro do retângulo preto. Que peças são 1/8 do quadrado vermelho? Que peças são 1/2 do quadrado amarelo?
4. O quadro tem aproximadamente 95 cm de lado. Faz uma estimativa da área do quadrado vermelho. Faz uma estimativa do perímetro do quadrado preto.
5. Agora és tu o artista. Imagina que és Mondrian, usa a sua técnica para fazeres a tua obra de arte.

(Adaptado de Vale, I. (2017a)).

9. O tapete

Material: Uma imagem por cada um dos alunos

A Carolina tem em sua casa o tapete apresentado. Um dia pôs-se a olhar atentamente para ele e descobriu o modo como foi desenhado, identificando todos os polígonos presentes.

Coloca-te no lugar da Carolina e:

1. Classifica todos os polígonos presentes.

2. Foca-te apenas nos quadrados amarelos. Que parte da tapeçaria representam?

3. Foca-te nos triângulos. Qual a amplitude dos ângulos de um dos triângulos? E dos outros? Que relação existe entre o triângulo amarelo e o triângulo laranja? Que parte da tapeçaria representam esses triângulos laranja?

4. Observa atentamente a parte pintada a vermelho. Que parte da tapeçaria representa?

5. Atenta no quadrado vermelho. Qual a razão entre a área do quadrado vermelho e o quadrado original?

6. Indica área do quadrado vermelho tomando por unidade de área o quadrado original.

Utiliza a imagem da forma mais conveniente de forma a conseguires responder a todas as questões.

(Adaptado de Vale, I. & Pimentel, T. (2011)).

10. Concurso

O professor Ricardo distribuiu folha A4 de diferentes cores para que os alunos as dividissem em partes geometricamente iguais, de diferentes modos. Os alunos recortaram cada uma das folhas coloridas pelas partes obtidas. De seguida, propôs aos alunos que criassem um quadro cobrindo uma folha branca A4 com diferentes partes coloridas obtidas. Após terem coberto a folha, os alunos escreveram a expressão numérica a que corresponde o todo dividido nas diferentes partes.

Supõe que és aluno desta turma, cobre a tua folha branca.

1. *Identifica a que parte da unidade corresponde cada uma das folhas coloridas que utilizaste.*

2. *Escreve a expressão que te dá a área da figura construída, ou seja, a unidade.*

Sê criativo porque, no final, o melhor "quadro" ganhará o concurso!

(Adaptado de Vale, I. (2020). Math Day Exhibition 2019)

Anexo 5- Quadro síntese das características dos problemas

	Representações dos números racionais (Pinto, 2011)	**Significados das frações** (Pinto, 2011)	**Nível de exigência cognitivo** (Stein & Smith, 1998)	**Representações das ideias matemáticas** (Bruner, 1962)	**Estratégias de resolução** (Vale & Barbosa, 2020[a])	**Contexto** (Skovsmose, 2000)	**Conexões** (Boavida et al., 2008)
Problema 1	Fração Percentagem	Operador Razão	Alto (procedimentos com conexões)	Simbólica	Visual ou não visual	Semi-realidade	Vida real
objetivos	Resolver problemas de vários passos envolvendo operações com números racionais representados por frações, dízimas, percentagens e numerais mistos. Efetuar operações com números racionais não negativos. Identificar relação numérica entre dois números racionais.						
Problema 2	Fração	Parte-todo	Alto (procedimentos com conexões)	Simbólica	Visual ou não visual	Semi-realidade	Vida real Matemática
objetivos	Resolver problemas de vários passos envolvendo operações com números racionais representados por frações, dízimas, percentagens e numerais mistos. Efetuar operações com números racionais não negativos.						
Problema 3	Fração	Parte-todo	Alto (procedimentos com conexões)	Simbólica	Visual ou não visual	Semi-realidade	Vida real
objetivos	Resolver problemas de vários passos envolvendo operações com números racionais representados por frações, dízimas, percentagens e numerais mistos. Efetuar operações com números racionais não negativos. Identificar frações equivalentes.						
Problema 4	Fração	Parte-todo	Alto (procedimentos com conexões)	Simbólica Icónica	Visual	Semi-realidade	Arte
objetivos	Relacionar o número de partes pedidas e o número total de partes. Identificar frações equivalentes.						
Problema 5	Fração	Parte-todo	Alto (procedimentos com conexões)	Simbólica	Visual ou não visual	Semi-realidade	Vida real Matemática
objetivos	Resolver problemas de vários passos envolvendo operações com números racionais representados por frações, dízimas, percentagens e numerais mistos. Efetuar operações com números racionais não negativos. Identificar frações equivalentes.						
Problema 6	Fração Numeral misto	Parte-todo	Alto (procedimentos com conexões)	Simbólica	Não visual	Semi-realidade	Vida real Matemática

objetivos	Resolver problemas de vários passos envolvendo operações com números racionais representados por frações, dízimas, percentagens e numerais mistos. Efetuar operações com números racionais não negativos mobilizando conhecimentos sobre áreas.						
Problema 7	Fração Número decimal Percentagem	Parte-todo	Alto (fazer matemática)	Simbólica Icónica Ativa	Visual	Realidade	Arte
objetivos	Relacionar o número de partes de cada cor e o número total de partes. Recorrer a diferentes representações dos números racionais. Identificar frações equivalentes.						
Problema 8	Fração	Parte-todo	Alto (procedimentos com conexões)	Simbólica Icónica Ativa	Visual e não visual	Semi-realidade e realidade	Arte Matemática
objetivos	Identificar relações entre as retas. Identificar os diferentes quadriláteros. Relacionar as peças identificando relações entre elas. Fazer estimativas de áreas e perímetros.						
Problema 9	Fração	Parte-todo Operador Razão	Alto (procedimentos com conexões)	Simbólica Icónica Ativa	Visual e não visual	Semi-realidade e realidade	Vida real Matemática
objetivos	Identificar e classificar polígonos. Relacionar as peças identificando relações entre elas. Identificar frações equivalentes. Identificar amplitude de ângulos. Calcular áreas						
Problema 10	Fração	Parte-todo	Alto (fazer matemática)	Simbólica Ativa	Visual	Realidade	Arte
objetivos	Dividir em partes geometricamente iguais. Identificar as diferentes partes.						