INSTITUTO POLITÉCNICO
DE VIANA DO CASTELO

RECURSOS EDUCATIVOS DIGITAIS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Alberto Carlos Pereira Alves Rodrigues Codeço

Escola Superior de Educação

2023

INSTITUTO POLITÉCNICO
DE VIANA DO CASTELO

Alberto Carlos Pereira Alves Rodrigues Codeço

Recursos Educativos Digitais no Ensino e Aprendizagem das Funções Exponencial e Logarítmica

Mestrado em Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação

Trabalho efetuado sob a orientação do(a):
Doutora Isabel Maria Torres Magalhães Vieira de Araújo
Doutor Pedro Miguel Teixeira Faria

Novembro de 2023

AGRADECIMENTOS

Durante a elaboração deste estudo recebi o apoio, direto e indireto, de um conjunto de pessoas a quem não posso deixar agora de mencionar e agradecer:

À Ana, esposa e parceira de muitos anos, pela constante compreensão e apoio incansável;

Aos meus supervisores, Professora Doutora Isabel Araújo e Professor Doutor Pedro Faria, que sempre me orientaram com assertividade, rigor e acerto, pela paciência manifestada e pela partilha de experiências. Sem o seu estímulo e exigência não seria de todo possível concluir esta investigação;

Aos alunos da turma, com quem partilhei dois anos de aulas, pela disponibilidade, recetividade ao projeto e, acima de tudo, pelo que me ensinaram;

Aos meus colegas mestrandos, pela partilha de conhecimento, amizade, diversidade e pelo infindável bom senso que revelaram nos momentos mais difíceis;

À Professora Doutora Elisabete Cunha, coordenadora do curso, pelos bons conselhos e pela serenidade;

Ao Luís e à Matilde, pelo tempo que cederam ao pai, com a esperança que entendam a necessidade, nem que seja pelo exemplo, de aprender ao longo da vida;

Aos meus pais.

RESUMO

As funções exponenciais e logarítmicas são conteúdos que sempre integraram os *curricula* escolares do ensino secundário em Portugal, na área da matemática. São temas em que os alunos manifestam muitas dificuldades, ao nível da compreensão e da aplicação das suas propriedades. Diversos autores defendem a necessidade de melhorar a forma como se ensinam estas funções, mudando o foco da simples execução de procedimentos de cálculo para a sua compreensão.

É reconhecido na literatura que uma das áreas de conhecimento que pode beneficiar com o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação é a da matemática. Neste contexto, construíram-se recursos educativos digitais (RED), aproveitando as funcionalidades do *software* de geometria dinâmica GeoGebra relativas ao estudo de funções. Assim, a presente investigação tem como objetivo compreender de que modo os alunos superam as suas dificuldades, trabalhando colaborativamente em pequenos grupos e realizando atividades com tarefas de exploração, suportadas no uso do GeoGebra, na aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas.

O estudo decorreu numa turma do 12.º ano de escolaridade, de uma escola secundária, situada na região norte de Portugal. Neste estudo privilegiou-se o uso de uma metodologia de natureza qualitativa de caráter interpretativo. Para tal, foram utilizadas as técnicas de recolha de dados: inquirição, observação e análise documental. A análise dos dados aponta para uma evolução consistente do desempenho dos alunos desde o início da investigação.

O uso do GeoGebra, enquanto estratégia pedagógica inserida numa sequência didática envolvendo o estudo de funções exponenciais e logarítmicas, contribuiu para a aprendizagem dos alunos. Deste modo, o estudo realizado leva-nos a concluir que o uso deste RED poderá ser um elemento facilitador da aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas. É ainda de salientar deste estudo a vontade expressa, pela maioria dos inquiridos, de usar as tecnologias digitais no estudo de outros conteúdos matemáticos.

Palavras-chave: Função exponencial; Função logarítmica; GeoGebra; Recursos educativos digitais; Tecnologias.

ABSTRACT

Exponential and logarithmic functions have always been part of secondary school maths *curricula* in Portugal. They are subjects in which students experience many difficulties, in understanding and applying their properties. Several authors argue that there is a need to improve the way these functions are taught, shifting the focus from simply performing calculation procedures to understanding them.

It is recognised in the literature that one of the areas of knowledge that can benefit from the use of Information and Communication Technologies is mathematics. In this context, digital educational resources (DER) have been developed, taking advantage of the functionalities of the GeoGebra dynamic geometry software relating to the study of functions. Therefore, the aim of this research is to understand how students overcome their difficulties by working collaboratively in small groups and carrying out activities with exploration tasks, supported by the use of GeoGebra, in the learning of exponential and logarithmic functions.

The study took place in a 12^{th} grade class at a school located in the north of Portugal. This study favoured the use of a qualitative, interpretative methodology. To this end, the following data collection techniques were used: enquiry, observation and document analysis. Data analysis points out to a consistent evolution in the students' performance since the beginning of this research.

The use of GeoGebra as a teaching strategy within a didactic sequence involving the study of exponential and logarithmic functions contributed to the students' learning. In this way, the study leads us to conclude that the use of this DER can be an element that facilitates the learning of exponential and logarithmic functions. Also noteworthy in this study is the desire expressed by the majority of respondents to use digital technologies in the study of other mathematical content.

Keywords: Exponential function; Logarithmic function; GeoGebra; Digital educational resources; Technologies.

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE QUADROS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

ÍNDICE DE ANEXOS

1 INTRODUÇÃO

Vivemos numa era em que as transformações em nosso entorno são cada vez mais evidentes, sobretudo no que se refere a alterações climáticas, infraestruturas e avanços tecnológicos que contribuem para o desenvolvimento científico em geral. A educação não é de todo alheia a estas mudanças. As novas Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) têm transformado a própria sociedade, o modo como vivemos, como comunicamos, e, consequentemente, como ensinamos, fomentando novas formas de ensino e aprendizagem que complementam o ensino tradicional. Segundo Unser (2017), "o uso de tecnologia na sala de aula é uma influência positiva para os estudantes, na sua vivência académica e no seu sucesso" (p. 47).

A nossa sociedade entende, e bem, a educação como uma forma de elevador social. De acordo com Decreto-Lei n.º 176/2012, "O cumprimento da escolaridade de 12 anos é relevante para o progresso social, económico e cultural de todos os portugueses. Este processo deve ser seguro, contínuo e coerente, garantindo a promoção da qualidade e da exigência no ensino e o desenvolvimento de todos os alunos." (p. 4068). Por esta via, o ensino em Portugal tornou-se obrigatório até ao 12.º ano de escolaridade ou até os alunos perfazerem 18 anos, procurando dotá-los da necessária autonomia que os torne capazes de enfrentarem e resolverem problemas.

No entanto, os níveis de aprovação obtidos pelos alunos, nomeadamente em matemática, ainda não são os esperados. A média nacional da prova final de Matemática de 3.º ciclo realizada em 2023, na 1.ª fase, foi de 43% e a percentagem de alunos que não atingiram classificação positiva nessa prova foi de 58%, segundo os dados revelados pelo Ministério da Educação. Já no 12.º ano, a média nacional do exame na 1.ª fase de Matemática A foi de 11 valores, descendo 0,9 valores em relação à média obtida pelos alunos na mesma fase do ano anterior.

Não obstante, a contínua escassez de recursos financeiros constitui um entrave para o sistema educativo português, com o qual se pretende assegurar um ensino universal de qualidade. Essas dificuldades podem ser esbatidas, em particular, no ensino da matemática, recorrendo a bons recursos educativos (Fonseca, 2013), alguns dos quais podem ser construídos ou editados pelos próprios professores.

A utilização das TIC em matemática iniciou-se nos anos 60 do século passado. Apesar de disponíveis para todas as áreas de conhecimento, a matemática foi a primeira disciplina em que se usaram em educação, em particular a partir do final da década de 80 (Cunha et al., 2010). Os programas de matemática desde há muito que incentivam e estimulam a utilização, de uma forma ponderada, das novas tecnologias de forma a proporcionar novas oportunidades aos alunos na melhoria das suas aprendizagens.

Dado o insucesso escolar que infelizmente continua associado a esta disciplina (Lourenço et al., 2019; Masola & Allevato, 2019; Pacheco & Andreis, 2018; Serrão et al., 2021) muitos estudos foram desenvolvidos, sendo reconhecido na literatura que uma das áreas de conhecimento que pode beneficiar com o uso de recursos educativos digitais (RED) de qualidade é a matemática (Araújo, 2014; Borba & Penteado, 2003; Cunha et al., 2010; Fonseca et al., 2019; Ponte & Canavarro, 1997).

Neste sentido vários recursos foram desenvolvidos nas últimas décadas. Contudo, não se pode abordar a utilização de recursos educativos digitais na disciplina de matemática sem referir os ambientes de geometria dinâmica (AGD), cuja aplicação nas aulas tem incrementado. Quando se democratizaram, no final do século passado, o seu uso cingia-se à construção e manipulação de objetos geométricos. A constante evolução desta tecnologia, incluindo aquela que suporta esta investigação, o *software* GeoGebra, alargou o seu uso a outros ramos matemáticos. As últimas versões deste *software* comportam novas funcionalidades que a tornam atrativa para abordar outros conteúdos curriculares, entre os quais se conta a análise matemática, designadamente o estudo de funções. Para Bairral e Barreira (2017) estes AGD permitem que os seus utilizadores confirmem ou infirmem as suas ideias e conjeturas de uma maneira dinâmica, envolvendo-se mais na exploração e na descoberta autónoma de suas observações.

No entanto, o uso dos RED em contexto educativo no ensino da matemática ainda não é uma prática comum.

1.1 Problema e pertinência do estudo

O conceito de função é um dos mais importantes em toda a matemática, surgindo apenas no século XVII, nos primórdios do cálculo infinitesimal, sendo Gottfried Leibniz (1646-1716) o primeiro matemático a usar tal termo (Ponte, 1990, p. 3). Tornaram-se essenciais na resolução de problemas da vida real (Ponte, 1990; Sawalha, 2018).

O ensino de funções é um dos assuntos que acompanha a trajetória dos estudantes desde o início do terceiro ciclo de escolaridade, no 7.º ano, em que estes devem começar por reconhecer as diferentes formas de representar uma função, até ao final do ensino secundário, onde o estudo é ampliado e complexificado. Mesmo no ensino superior a temática das funções é o cerne de diversos cursos universitários.

No que respeita a funções exponenciais e logarítmicas, sabe-se que fazem parte dos *curricula* do ensino liceal e secundário desde a revolução liberal de 1822 (Marques, 2013), sendo um dos poucos conteúdos que sempre os integraram. Se centrarmos a nossa análise no período posterior ao 25 de abril de 1974, verifica-se que este tema sempre foi lecionado no último ano do curso complementar, depois no denominado ano propedêutico e, mais tarde, no ano final do ensino secundário. A designação de 12.º ano de escolaridade só surge oficialmente em 1981 e mantém-se vigente até hoje. A esta realidade histórica acrescem as lacunas que os alunos habitualmente manifestaram na compreensão destas funções transcendentes e propriedades algébricas a elas associadas.

Da revisão da literatura, constata-se a existência de um número reduzido de teses, dissertações e artigos científicos que versem sobre o assunto específico, recorrendo a novas tecnologias. Ora, isso constituiu, simultaneamente, um défice e um desafio a ultrapassar. Mais ainda, se em Portugal filtrarmos a pesquisa a uma sequência didática em que se estuda os tópicos e subtópicos da função exponencial e da função logarítmica com recurso integral ao GeoGebra, verifica-se a inexistência de estudos nesse sentido. Considerando, em concomitância, que as *(Novas) Aprendizagens Essenciais de Matemática A* mantém para este tópico objetivos de aprendizagem similares ao do anterior programa – embora difiram substancialmente nas ações estratégicas de ensino do professor – considerou-se pertinente encetar esta empreitada.

Foi neste sentido que se trilhou a presente investigação. Em concreto, usaram-se as novas tecnologias, concretizadas no *software* de geometria dinâmica GeoGebra, para disponibilizar aos alunos um conjunto de tarefas cujo objetivo era fomentar as aprendizagens relativas às funções exponenciais e logarítmicas.

Um aspeto importante a que o National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1994) alude é que "ao selecionar, adaptar e criar atividades matemáticas, os professores devem basear as suas decisões em três áreas de preocupação: o conteúdo matemático, os alunos e as suas formas de aprendizagem da matemática" (p. 28). No mesmo documento refere-se que as tarefas matemáticas bem construídas desafiam os alunos, desenvolvem as suas compreensões e aptidões matemáticas, estimulam-nos a estabelecer conexões e a desenvolver um enquadramento coerente para as ideias matemáticas, desenvolvem o raciocínio matemático e promovem a comunicação matemática (NCTM, 1994).

De acordo com Canavarro e Santos (2012) uma das suas principais funções do professor é selecionar criteriosamente as tarefas que pretende levar para a sua sala de aula, consoante o propósito pedagógico a que se destina. As tarefas devem contribuir para dar cumprimento às exigências curriculares atualmente defendidas e também ajudar o aluno a compreender matemática.

Outros fatores que também contribuíram para a seleção do tema das funções exponenciais e logarítmicas, incluindo o de o investigador ser docente de uma escola secundária em que a continuidade pedagógica dos docentes nas turmas é política estabelecida, perspetivando-se a possibilidade real de integrar o conselho de duas turmas do 12.º ano de escolaridade, foram: i) o gosto pessoal pelo estudo de funções e pela sua aprendizagem, ii) a consideração cronológica, já que se afigurou que o trabalho de campo deveria ser conduzido durante o segundo período letivo, trimestre em que é habitual a lecionação de exponenciais e logaritmos.

1.2 Tema, objetivos e questões de investigação

A familiaridade dos atuais alunos com as TIC no dia a dia é uma realidade, apesar de não o ser em contexto ou para fins educativos. A totalidade dos nossos alunos possuem um telemóvel e/ou já acederam a um computador.

No documento *(Novas) Aprendizagens Essenciais de* Matemática *A (12.º ano)*, aprovado pelo Despacho n.º 702/2023 do gabinete do Ministro da Educação, a 13 de janeiro de 2023, Silva et al. (2023) pretendem que "a aprendizagem [de conteúdos matemáticos] não se reduza à memorização de regras, ao treino de procedimentos ou à sua execução sem compreensão" (p. 5). Os mesmos autores defendem que

> A integração da tecnologia é considerada como indispensável nesse processo, pelas possibilidades que oferece de experimentação, visualização, representação, simulação, interatividade, bem como, evidentemente, de cálculo numérico e simbólico. O recurso a ambientes de geometria dinâmica (AGD), à folha de cálculo e a aplicativos digitais, explorados em computadores, *smartphones* ou calculadora gráfica, deve ser feito de forma sistemática. (Silva et al., 2023, p. 6)

De acordo com o NCTM (2008), a tecnologia não deve ser usada para substituir a compreensão e intuição elementar. Ao invés, deve ser usada adequadamente para estimular essa compreensão e intuição. Utilizar as tecnologias apenas como ferramentas para transmitir informações, adaptando-as às abordagens tradicionais de ensino é redutor. Estas devem, pelo contrário, ser apropriadas como ferramentas cognitivas que fomentam a interação, a colaboração entre alunos, a pesquisa e o pensamento crítico, habilidades necessárias para a sociedade do conhecimento em que vivemos e que os alunos, enquanto nativos digitais, gostam de usar em contexto de ensino e aprendizagem (Lopes, 2018).

No ensino secundário, as funções exponenciais e logarítmicas são conceitos matemáticos chave. São, também, conceitos em que os estudantes manifestam muitas dificuldades em assimilar. Devido a isso, muitos investigadores defendem a necessidade de melhorar a forma como se ensinam estas funções, mudando o foco para a sua compreensão (Sawalha, 2018; Weber, 2002).

Assim sendo, o investigador propôs-se investigar, integrado no conteúdo das funções, o subtema da função logarítmica e da função exponencial, onde tradicionalmente os estudantes obtêm pior desempenho. É de salvaguardar que num estudo desenvolvido por Castanheira (2017), o qual versou sobre a compreensão destas funções, foi assinalado um défice dos alunos nas competências de procedimento (cálculo), resolução de problemas, utilização da calculadora, comunicação matemática e raciocínio demonstrativo; no domínio dos conceitos, regras e propriedades os resultados obtidos já foram satisfatórios.

Contudo, conscientes da motivação dos alunos para o uso de tecnologias na sala de aula e da importância do estudo das funções e das dificuldades que a maioria deles apresenta neste domínio, considera-se pertinente investigar se o recurso ao ambiente de geometria dinâmica GeoGebra no ensino destas funções é promotor das suas aprendizagens.

Neste contexto construiu-se um conjunto de aplicativos em GeoGebra, integrados nas tarefas propostas aos participantes durante o estudo empírico, com o objetivo de contribuir para o incremento do sucesso escolar na disciplina de matemática, de uma forma inovadora e de acordo com os atuais preceitos pedagógicos. Procurou-se, assim, compreender como é que os alunos de uma turma do 12.º ano de escolaridade, trabalhando colaborativamente em pequenos grupos e realizando atividades com tarefas de exploração suportadas no uso do GeoGebra, superam as suas dificuldades na aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas.

Para concretizar este objetivo, pretende-se responder às seguintes questões de investigação:

(i) De que forma pode o *software* de geometria dinâmica GeoGebra contribuir para o ensino das funções exponenciais e logarítmicas?

(ii) Qual a visão dos alunos relativamente às aulas de Matemática A, em que usaram as Tecnologias de Informação e Comunicação para promover a sua compreensão sobre funções exponenciais e logarítmicas?

(iii) Qual o impacto do uso das tecnologias na aprendizagem dos alunos no estudo da função exponencial e logarítmica?

1.3 Opções e procedimentos metodológicos

Tendo em consideração as questões de investigação e o objetivo geral desta investigação optou-se por um estudo que contemple a utilização do GeoGebra por parte dos alunos em contexto real. Daí que, querendo estudar um fenómeno educativo no ambiente em que este vai ocorrer, elegeu-se uma metodologia de natureza predominantemente qualitativa pois, de acordo com Bogdan e Biklen (1994) e Creswell (2003), a investigação qualitativa envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos através do contacto direto do investigador com o fenómeno no seu contexto natural. Mais ainda, optou-se pela investigação interpretativa, uma vez que esta valoriza a compreensão e a explicação, objetivando desenvolver e aprofundar o conhecimento de um fenómeno num contexto (Bogdan & Biklen, 1994). Neste sentido, dá-se mais importância ao processo do que ao produto, o que permite melhor responder às questões de investigação levantadas. O investigador interpretativo revê-se na possibilidade de particularizar (Amado, 2014).

A presente investigação foi desenvolvida no ensino secundário, numa turma do 12.º ano de escolaridade, no ano letivo 2022/2023, numa escola secundária situada na região norte de Portugal. O estudo abrangeu o domínio das funções, em particular das funções exponenciais e logarítmicas, lecionadas no ano final do ensino secundário. Procurou-se perceber se os AGD contribuem para a aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas, privilegiando o uso do GeoGebra. Adicionalmente, interpretou-se como os participantes superam as dificuldades na construção do seu conhecimento e se capacitam no domínio da comunicação matemática.

1.4 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos. No Capítulo I, *Introdução*, contextualiza-se o estudo, indicando o tema a abordar e o objetivo a alcançar, justificando a pertinência do estudo e identificando as questões de investigação.

No Capítulo II, *Enquadramento Teórico*, apresenta-se uma revisão da literatura sobre a importância das tecnologias digitais na sociedade atual e sobre o uso das TIC em educação. Explanam-se, em seguida, os prós e contras do recurso às tecnologias no ensino da disciplina de matemática, a aprendizagem das funções exponencial e logarítmica usando RED e faz-se uma referência às características associadas aos ambientes de geometria dinâmica.

O Capítulo III é dedicado à metodologia de investigação. Inicialmente, descrevem-se as opções metodológicas adotadas, fundamentando o uso de uma metodologia de natureza qualitativa, assente no paradigma interpretativo. Em seguida, explicita-se o *design* do estudo, seguido da caracterização dos participantes e da escola onde a investigação foi desenvolvida. Os métodos de recolha de dados e o modo como estes foram analisados concluem o capítulo.

No Capítulo IV, intitulado *Análise e Interpretação dos Dados*, apresentam-se os dados recolhidos na investigação e interpretam-se reflexivamente os principais resultados obtidos.

Por último, no Capítulo V, são apresentadas as principais conclusões sustentadas pelo corpo teórico da investigação e pela análise dos dados recolhidos. Algumas recomendações e as principais limitações vivenciadas durante o estudo são aí identificadas. Por vezes essas recomendações constituem sugestões para futuras investigações (Bogdan & Biklen, 1994, p. 257). Termina-se a dissertação redigindo uma breve reflexão final.

2 ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo descreve-se a importância das Tecnologias de Informação e da Comunicação (TIC). Partindo de um plano mais geral, em que refere a sua importância na sociedade deste século, particulariza-se para a pertinência do seu uso em educação e, mais pormenorizadamente, em matemática. Afunila-se, depois, para o estudo das funções exponencial e logarítmica e para a relevância das tarefas de aprendizagem na implementação do currículo; por fim estabelece-se a conexão entre estas funções e o recurso educativo digital (RED) utilizado: o GeoGebra.

O capítulo encontra-se estruturado em seis subcapítulos principais: no primeiro descreve-se a importância, num plano mais lato, das tecnologias digitais na sociedade atual; no segundo analisa-se o uso das TIC em educação, referindo principais vantagens e constrangimentos; aborda-se, depois, o recurso às tecnologias no ensino estrito da disciplina de matemática nas últimas décadas e as dificuldades sentidas pelos alunos na sua aprendizagem. No quarto, aborda-se a aprendizagem das funções exponencial e logarítmica usando RED e, no quinto, o uso de tarefas de aprendizagem em aula. No último subcapítulo, faz-se referência aos ambientes de geometria dinâmica.

2.1 A importância das tecnologias digitais na sociedade

Ninguém contesta o facto de que as tecnologias digitais se impuseram de forma crescente, sobretudo nas duas últimas décadas, em todos os ramos profissionais. A respeito disto, Rapp (2017) afirma que “a dependência destas tecnologias é cada vez maior e hoje é impossível imaginar o futuro sem elas” (p. 1).

Vários estudos referem a sua relevância, profusamente documentada em inúmeros textos (Coutinho & Lisbôa, 2011; Cunha et al., 2010; Lucas & Moreira, 2018; Meirinhos & Osório, 2014; Pereira, 2019; Ponte & Canavarro, 1997; Ponte et al., 1998; Rapp, 2017; Unser, 2017). Segundo Azevedo (2005), toda a gente tem consciência que a humanidade é hoje afetada pelas transformações provocadas pelas TIC, quer no plano económico, quer no plano económico-social. O seu uso padronizou-se e a evolução contínua das tecnologias promoveu mudanças na sociedade, interferindo com a forma de comunicar, socializar, pensar e compreender o mundo em seu redor. Destacam-se as mudanças decorrentes de uma cada vez maior aproximação entre as pessoas através de interações *online* proporcionadas pelas TIC, que favorecem a troca de informações e colaboração, independentemente do tempo ou lugar onde se encontrem (Coutinho & Lisbôa, 2011). Opinião análoga defendem Meirinhos e Osório (2014) quando argumentam que

> A utilização das TIC em todos os campos da vida pessoal e profissional altera as coordenadas socioculturais, tornando a sociedade mais mediatizada nos processos de comunicação, de interação, de socialização, de trabalho, de aprendizagem e de formação. Este quadro de referência tem evidentes repercussões na adequação dos atuais sistemas educativos e de formação profissional. (p. 5)

As modificações produzidas na sociedade pelas TIC trouxeram, não obstante, novas questões e levantaram novos problemas, de ordem profissional, de cidadania, culturais ou relacionados com o próprio conhecimento. Atualmente estas tecnologias estão de tal forma presentes e envolvidas na sociedade que a utilização das mesmas deixa de ser realizada com a devida moderação, criando-se uma dependência nefasta. O seu uso deixa, também, de ser realizado com as devidas precauções, deitando muitas vezes por terra a importância e a verdadeira dimensão dos impactos que as TIC têm nas sociedades atuais (Pereira, 2019, p. 24). Meirinhos e Osório (2014), por seu lado, alertam para o facto de que, apesar de favorecerem a produção e circulação de informação, também contribuem para que ciclo de vida dos conhecimentos seja cada vez mais curto e, em consequência, conduzem a uma obsolescência mais rápida das qualificações profissionais.

2.2 As TIC em educação

Nas duas últimas décadas a importância das TIC cresceu exponencialmente e os professores encetaram uma utilização cada vez mais frequente das mesmas nas suas instituições educativas. São uma das áreas do saber humano que mais se tem desenvolvido, destacando-se tanto pela profundidade do conhecimento envolvido como pela sua aplicabilidade (Cunha et al., 2010).

Através de recursos educativos digitais, da *internet* e de aplicações que permitem o ensino à distância, professores e alunos estão a descobrir as vantagens no uso das tecnologias na educação. De acordo com Martins et al. (2017)

> O mundo atual coloca desafios novos à educação. O conhecimento científico e tecnológico desenvolve-se a um ritmo de tal forma intenso que somos confrontados diariamente com um crescimento exponencial de informação a uma escala global. (…) É neste contexto que a escola, enquanto ambiente propício à aprendizagem e ao desenvolvimento de competências, onde os alunos adquirem as múltiplas literacias que precisam de mobilizar, tem que se ir reconfigurando para responder às exigências destes tempos de imprevisibilidade e de mudanças aceleradas. (p. 7)

Para Coutinho e Lisbôa (2011) o desafio imposto à escola por esta nova sociedade é imenso. Esta deve ser "capaz de desenvolver nos estudantes competências para participar e interagir num mundo global, altamente competitivo, que valoriza o ser-se flexível, criativo, capaz de encontrar soluções inovadoras para os problemas de amanhã" (p. 5). É forçoso ter a noção de que a aprendizagem é um processo contínuo e sem prazo definido, isto é, é para toda a vida.

Neste sentido concordamos com Sá (2019) quando afirma que o propósito do ensino do séc. XXI é preparar os alunos para que sejam futuros cidadãos capazes de enfrentar os desafios apresentados por uma sociedade em constante mutação. Essa sociedade, porém, é complexa e encerra várias contradições: é globalizada mas respalda-se numa língua comum – o inglês –, caracteriza-se por grandes migrações mas também pelo aumento do nacionalismo que as tenta impedir, tem grande acesso ao conhecimento mas faz uso de modelos educativos que privilegiam a transmissão de conhecimentos pelo professor.

Desenvolver novas competências, inclusive as digitais, que capacitem os docentes, e ao mesmo tempo formar alunos com este perfil é o grande desafio que se lhes coloca. Sabe-se, porém, que a inovação encontra sempre resistência. Alguns professores procuram manter-se na sua zona de conforto, cristalizando formas de ensinar previsíveis que conhecem e controlam bem. Nunca avançam para uma zona de risco (Almeida, 2018; Borba & Penteado, 2003; Rapp, 2017; Unser, 2017; Santos & Moraes, 2009). Hodiernamente, a maioria dos professores sabe que tem de se reinventar e tornar-se um mediador de aprendizagens e produtor de conhecimento em comunhão com a turma. O modelo tradicional em que assume um papel de mero recetáculo do conhecimento transmitido já não motiva os alunos contemporâneos, nativos digitais. No entanto,

> Cuban (1993) sustenta que as inovações tecnológicas nunca foram prioritárias em qualquer movimento reformista das escolas públicas desde há um século e meio. Nem nos anos 1980 e 1990 fizeram parte da retórica da reforma. Assim, depois de tudo que foi dito e feito – foi mais o dito do que o feito. O escasso uso das TIC nas salas de aula é menos devido à falta de dinheiro ou equipamentos, à escassa preparação dos professores ou à indiferença dos diretores do que às conceções culturais dominantes sobre o ensino e aprendizagem e acerca do que é o conhecimento adequado e à forma como as escolas estão organizadas. (Ramos et al., 2011, p. 13)

Na verdade, do ponto de vista de Borba e Penteado (2003), as inovações em educação

> pressupõem mudança na prática docente, não sendo uma exigência exclusiva daquelas que envolvem o uso de tecnologia informática. A docência, independentemente do uso de TI, é uma profissão complexa. Nela estão envolvidas as propostas pedagógicas, os recursos técnicos, as peculiaridades da disciplina que se ensina, as leis que estruturam o funcionamento da escola, os alunos, seus pais, a direção, a supervisão, os educadores de professores, os colegas professores, os pesquisadores, entre outros. (p. 56)

Mais ainda, segundo Coan et al. (2016), "a integração das TIC no processo de ensino e aprendizagem faz com que haja uma verdadeira transformação que vai para além da simples incorporação de um novo recurso na sala de aula" (p. 18). Além das infraestruturas, deve-se também formar e capacitar os professores para que as suas práticas pedagógicas incutam nos aprendentes a exigência de constantes adaptações e mudanças. É de referir outra questão, o impacto da tecnologia no método de ensino dos docentes, destacada por Fonseca et al. (2019). Estes autores consideram que “a presença das tecnologias muda o ambiente em que o professor trabalha e o modo como se relaciona com os alunos, e pode gerar um impacto na natureza do seu trabalho e em sua identidade profissional” (p. 185).

Em suma, a educação tecnológica é um processo sistemático de aplicação da moderna tecnologia que visa a melhoria da qualidade da educação. Permite concetualizar de forma organizada a execução e avaliação do processo educativo, com recurso às modernas técnicas de ensino. Integra materiais didáticos, métodos, organização de trabalho e uma mudança de atitude de todos os participantes no processo educativo (Stošić, 2015).

2.2.1 Plano de Transição Digital

Em Portugal, a escola está a fazer um esforço no sentido de apostar na implementação das tecnologias nas salas de aula. Em setembro de 2007 foi implementado, pelo Governo, o Plano Tecnológico da Educação (PTE), considerado, à época, como o maior programa de modernização tecnológica das escolas portuguesas. Tinha como ambição colocar o país entre os cinco países europeus mais avançados em matéria de modernização tecnológica das escolas até 2010. Dotou as escolas básicas e secundárias com redes informáticas, computadores, videoprojetores e quadros interativos e, no que concerne a recursos humanos, promoveu a formação de docentes e não docentes. A continuidade desse investimento foi interrompida pela prolongada crise económica que o país sofreu a partir de 2009, altura em que solicitou assistência financeira internacional.

Em 2020, no contexto da crise pandémica provocada pela doença Covid-19, resultado da disseminação planetária do coronavírus SARS-Cov-2 em finais de 2019, foi necessário implementar e monitorizar, de forma acelerada, o plano de ensino não presencial nas escolas, dada a suspensão das atividades letivas em sala de aula. Numa fase inicial a aquisição de computadores portáteis ocorreu com ajuda das autarquias e de muitas empresas implantadas no seu território.

Esta crise acelerou, por parte do Ministério da Educação, a implementação do Plano de Ação para a Transição Digital (PTD), de 21 de abril de 2020 (Resolução do Conselho de

Ministros n.º 30/2020 de 21 de abril). A capacitação e inclusão digital das pessoas é um dos seus três pilares do plano. Destaca-se, nesse plano, a medida 1 – programa de digitalização para as escolas. Nela está implícito: a disponibilização de equipamento individual ajustado às necessidades de cada nível educativo para utilização em contexto de aprendizagem (contemplada no *kit* de computador do Programa Escola Digital); a garantia de conectividade móvel gratuita de qualidade para alunos e docentes e formadores (o *kit* de conetividade do mesmo Programa); o acesso a recursos educativos digitais de qualidade; o acesso a ferramentas de colaboração em ambientes digitais que promovam a criatividade e a inovação no processo de ensino-aprendizagem. O programa prevê também uma forte aposta na capacitação digital de docentes, na integração de tecnologias digitais nas rotinas das escolas e no desenvolvimento de recursos educativos digitais. O objetivo é integrar o digital nas práticas profissionais e pedagógicas dos docentes, nas práticas de aprendizagem dos alunos e no exercício da cidadania, capacitando-os para o uso seguro e confiante das tecnologias e as infraestruturas digitais.

Inserido na dinâmica do PTD, o Plano de Ação de Desenvolvimento Digital das Escolas (PADDE) pretende ser um instrumento estratégico, cujo objetivo é monitorizar a implementação das tecnologias digitais nos processos de ensino e de aprendizagem que ocorrem nas escolas. Deve servir de apoio às escolas na reflexão e tomadas de decisão estratégicas que permitam a exploração do potencial do digital integrando-o de forma holística na sua organização. O PADDE tem por base o quadro conceptual dos documentos orientadores da Comissão Europeia, nomeadamente o DigCompEdu (Lucas & Moreira, 2018) e o DigCompOrg, assim como os resultados do inquérito Check-In aplicado aos docentes e os resultados do questionário Selfie, aplicado às lideranças, aos docentes e aos alunos.

Tem sido evidente a consciência, por parte da tutela, de que a capacitação digital dos docentes é estruturante. A mesma tem incrementado ações nesse âmbito, apesar dos recursos materiais, sempre dependentes de recursos financeiros, ainda não serem os ideais. A aposta em novas mentalidades e novas tecnologias é visível, mas está numa fase inicial do caminho a trilhar.

2.2.2 Vantagens e ameaças do uso das TIC no ensino

Inúmeros estudos desenvolvidos ao longo dos últimos anos provaram que o uso de tecnologias, tanto por professores como por alunos, melhorou o rendimento académico geral dos últimos (Unser, 2017). Contudo, o uso das TIC no processo de ensino aprendizagem não traz só vantagens (Fonseca et al., 2019; García-Valcárcel et al., 2014; NCTM, 2008; Pereira, 2019; Santos & Moraes, 2009; Unser, 2017). No campo das vantagens podemos destacar com clareza o fomento do trabalho colaborativo, o incremento da multiculturalidade, um maior controlo e autonomia por parte do aluno, uma maior motivação, uma maior criatividade, uma maior flexibilidade no espaço e tempo das aprendizagens e uma maior interação professor-aluno e aluno-recursos educativos (García-Valcárcel et al., 2014; Rapp, 2017; Ribeiro & Vairinhos, 2020; Stošić, 2015; Trindade & Bulegon, 2017). Como se adequa aos interesses dos nativos digitais e os motiva pode ser, se bem aplicada, mais produtora de conhecimento.

Os métodos tradicionais não são flexíveis, uma vez que não permitem, dentro de uma sala de aula, que cada aluno aprenda ao seu ritmo. Nas aulas, temos alunos que têm dificuldade em acompanhar o ritmo médio da turma e isso conduz à desmotivação. Sendo uma situação preocupante para o professor, este muitas vezes opta por um ritmo intermédio que faz com que os estudantes com conhecimentos inferiores se sintam ignorantes e frustrados e os estudantes de patamares superiores se sintam aborrecidos (Stošić, 2015).

A aplicação das tecnologias permite a todos os estudantes aprender ao seu ritmo, repetir exercícios que não estão compreendidos e obter um *feedback* mais imediato das suas aprendizagens. De acordo com Rodrigues (2019), as tecnologias digitais outorgam aos professores a “possibilidade de organizar mais facilmente as aprendizagens em turmas heterogéneas e constituem-se, ainda, como um meio potencial para melhorar o insucesso escolar, podendo os alunos ficar mais motivados quando têm oportunidade de utilizar as tecnologias” (p. 26). Nesse sentido, os recursos educativos digitais trazem vantagens relativamente ao modelo tradicional de ensino.

Com o advento das TIC, vários autores estudaram os benefícios da aplicação das novas tecnologias em sala de aula, relativamente aos modelos mais tradicionais. Muitos investigadores chegaram à conclusão que ambos os modelos são eficientes, dependendo da forma como são aplicados (Clark, 1983; Dynarski et al., 2007; Kulik, 2003; Morrison et al., 2010, citados por Stošić, 2015, p. 112). Por outro lado, Clements e Sarama (2003), Glaubke (2007), NAEYC e Fred Rogers Center (2012), citados por Stošić (2015, p. 112), demonstraram que os computadores são mais apropriados para o desenvolvimento das habilidades individuais dos estudantes, quando comparados com o papel dos próprios professores. Dessa forma, concluem que a tecnologia tem que ser inevitavelmente integrada nos *curricula* e nas salas de aula.

Contudo, se as TIC forem mal interpretadas, o isolamento social dos agentes é uma ameaça a ter em conta. Os custos a elas associados também não devem ser descurados, já que originam maior desigualdade social. Este argumento não é despiciendo, já que "para a maioria da população, o espaço escolar é o único meio que possibilita o acesso aos saberes historicamente acumulados e necessários à constituição da humanidade em cada ser humano" (Santos & Moraes, 2009, pp. 4-5).

O acesso generalizado à *internet* traz alguns desafios, designadamente no que concerne à recolha de informação pertinente. Entre tanta informação, pode ser difícil a sua seleção e validação. A facilidade com que se carregam dados na rede pode também ser vista como uma fragilidade, já que informação lá contida é volátil, isto é, uma página *web* pode não estar acessível ao cabo de algum tempo.

Outro aspeto a destacar é que, quando usadas por adolescentes, são distratoras, provocando, por isso, muita desconfiança nos docentes. O uso excessivo de computadores, em particular no caso dos jovens, pode criar dependência. Em casos extremos, um adolescente poderá ficar viciado em videojogos e descurar a escola. Em 2018, a Organização Mundial de Saúde (OMS) incluiu o vício dos videojogos na lista de perturbações mentais. Por fim, e não menos relevante, a falta de privacidade e o *ciberbullying* também fazem parte do conjunto de desvantagens a problematizar.

2.2.3 Professores digitalmente competentes

Em qualquer atividade operar mudanças não se afigura simples. Como já referimos, no caso do ensino, a presença de computadores, por si só, não significa mudança (Borba & Penteado, 2003; Ponte & Canavarro, 1997; Ramos et al., 2011).

Segundo Miranda (2007)

> O problema reside em que alguns professores têm uma concepção romântica sobre os processos que determinam a aprendizagem e a construção de conhecimento e concomitantemente do uso das tecnologias no acto de ensinar e aprender. Pensam que é suficiente colocar os computadores com algum *software* ligados à i*nternet* nas salas de aula que os alunos vão aprender e as práticas se vão alterar. Sabemos que não é assim. (p. 44, grafia original)

Nos dias de hoje, o papel do professor deixou de ser o de transmissor de informação, para ser o de facilitador do processo de aprendizagem. Por sua vez, o aluno deixou de ser passivo para ser um aprendiz ativo, construtor do seu conhecimento (Fonseca et al., 2019). Enquanto promotor de aprendizagens, “o professor precisa saber como usar os recursos tecnológicos e reconhecer suas potencialidades e restrições, a partir dos objetivos pedagógicos” (Fonseca et al., 2019, p. 185). Convém ressalvar que é natural que o professor continue a utilizar livros didáticos, materiais manipuláveis e outros recursos não tecnológicos. O uso de REDs é importante, mas deve ser feito com o devido critério. Na opinião de Coutinho e Lisbôa (2011), “não basta ao professor ter competências tecnológicas, … mas sobretudo, possuir competência pedagógica para que possa fazer uma leitura crítica das informações que se apresentam desorganizadas e difusas na rede” (p. 10). É que “muito embora a utilização das tecnologias digitais seja uma prática instalada nas aulas e bem aceite pelos professores, os dados indicam que o seu papel é mais relevante a nível do ensino, que continua centrado no professor, e menos na aprendizagem e no aluno” (Almeida, 2018, p. 18).

Sendo assim, a integração das tecnologias nas escolas é cada vez mais imprescindível (Stošić, 2015) e só se consegue realizar com professores digitalmente competentes (Lucas & Moreira, 2018) e motivados para os desafios que as tecnologias colocam em sala de aula. A um docente digitalmente competente são exigidas mudanças que se refletam no sistema. Já não se pede que apenas ensine, deve sobretudo assumir novos papéis como mediador e condutor das aprendizagens, gestor da informação disponível, facilitador e construtor do saber, entre outras (Coutinho & Lisbôa, 2011; NCTM, 2008; Rapp, 2017; Fonseca et al., 2019). Claro está que este processo apresenta dificuldades próprias, para além das inerentes aos recursos humanos e materiais. Para a produção, seleção e uso de recursos educativos digitais de qualidade o professor deve possuir conhecimentos a três níveis: conhecimento dos conteúdos curriculares, dos métodos pedagógicos e ainda conhecimento tecnológico (Lucas & Moreira, 2018). A validação desses conhecimentos e competências digitais é um ponto de partida para alavancar um processo cujo fim deve impactar na melhoria dos resultados de aprendizagens dos aprendentes.

2.2.3.1 Desafios (dos professores) na integração das TIC em contexto educativo

A integração das TIC em contexto escolar apresenta desafios. Coutinho e Lisbôa (2011) sublinham que

> o primeiro deles é tentar garantir a democratização do acesso às mais variadas formas, meios e fontes por onde circula a informação para que possamos construir uma sociedade mais equitativa. Por outro lado, devemos desenvolver competências e habilidades para transformar essa informação em conhecimento e assim desenvolvermos o gosto por aprender ao longo da vida. (p. 17)

Já para García-Valcárcel et al. (2014) os professores consideram que o uso das TIC nas aprendizagens com recurso ao trabalho colaborativo corresponde a muito esforço, ou seja, requer muito planeamento e tempo para preparar essas aulas/atividades. Comparando com o modelo de aula tradicional, o uso destas tecnologias, com ou sem recurso a trabalho colaborativo, é muito exigente e nem sempre compensador. A ênfase no trabalho colaborativo é crucial. O professor não pode fechar-se no seu castelo pois, como sustentam Santos e Moraes (2009), “a inserção das tecnologias na organização do trabalho pedagógico pressupõe planejamento [sic] e decisões coletivas. A escolha e forma de utilização refletem a concepção [sic] de ensino e educação do professor e ou assumida pela comunidade escolar” (p. 7).

Na opinião de Fonseca et al. (2019), “os professores encontram dificuldades para utilizar as TIC na prática do quotidiano escolar, uma vez que necessitam compreender as potencialidades desses recursos para empregá-los de forma integrada aos conteúdos curriculares” (p. 184). Também Borba e Penteado (2003) referem que o computador pode ser mais um problema na já atribulada vida dos professores, sobretudo para aqueles que não fazem tenção de o usar em sala de aula. Acresce que, muitas vezes, a falta de infraestruturas tecnológicas e de suporte técnico são circunstâncias negativas a considerar (Fonseca et al., 2019).

De acordo com YunJeong, Chang e Hannafin (2015), citados por Unser (2017), os professores não incorporam a tecnologias nas lições já preparadas há muitos anos; muitas vezes limitam-se a usar de forma superficial as tecnologias onde são capazes. Para estes autores os professores não fazem muito esforço para recriar as lições já planeadas e aplicadas no passado.

Unser (2017) sintetiza estes aspetos quando refere que a tecnologia dá trabalho e torna mais difícil a vida dos professores, em especial para aqueles que não se inclinam para o uso das TIC em aula. A falta de formação nesta área tem como consequência que muitos profissionais não se sintam confortáveis a usá-las. Alguns vão ao limite de afirmar que sentem que as tecnologias lhes minam a sua autoridade e, por isso, continuam a investir no ensino tradicional (Unser, 2017). Na verdade, nos dias de hoje, os alunos têm um domínio da tecnologia que, na maioria dos casos, supera a dos professores.

Após a crise pandémica, pode afirmar-se que os professores se tornaram mais cientes da importância do uso dos computadores. É certo que, em muitos casos, foram forçados a isso. Moreira et al. (2020) afirmam que “a suspensão das atividades letivas presenciais, por todo o mundo, gerou a obrigatoriedade dos professores e estudantes migrarem para a realidade *online*, transferindo e transpondo metodologias e práticas pedagógicas típicas dos territórios físicos de aprendizagem” (p. 352). É injusto, porém, não sublinhar que o uso das tecnologias já estava a fazer o seu caminho na comunidade educativa (Rapp, 2017). As dificuldades manifestadas pelos professores nos anos em que foi necessário implementar o ensino à distância, por falta de formação na área da informática, foram atenuadas através de um efetivo trabalho de colaboração *inter pares*.

2.2.4 Avaliação de RED

Atendendo ao número de RED e dado que o uso da tecnologia tem aumentado nas salas de aula, há também necessidade de incrementar a avaliação do seu uso (El Mhouti et al., 2013; Unser, 2017). Nem sempre a quantidade é diretamente proporcional à qualidade. Os métodos de avaliação da qualidade inerente a estes recursos digitais têm sido objeto de várias investigações (El Mhouti et al., 2013; Junior et al., 2021), que procuram destacar as dimensões ou critérios a seguir para se atingir uma avaliação, ao mesmo tempo justa e objetiva, dos mesmos. São eles: (i) a dimensão científica; (ii) a dimensão pedagógica; (iii) a usabilidade e (iv) a dimensão técnica.

El Mhouti et al. (2013) defendem que na dimensão científica o objetivo é avaliar a qualidade científica da informação apresentada no recurso. Essa qualidade é essencial na aquisição de conteúdos pelos aprendentes. Os autores sustentam que nesta dimensão se devem analisar dois critérios fundamentais: a fiabilidade da informação e a sua relevância, critérios altamente interdependentes. Para Costa (1999) "a quase ausência de padrões de qualidade pedagógica, são de facto alguns dos aspetos que parecem caracterizar a situação atual nomeadamente no cenário europeu e constituem por isso razão suficiente para o desenvolvimento de investigação nesta área" (p. 2). Considera, por isso, imprescindível concentrar a atenção nos professores, não só como meros utilizadores, mas sobretudo como usuários informados, críticos e com maior exigência na dimensão pedagógica de avaliação de RED. O enfoque na efetiva preparação dos professores para a análise crítica, avaliação pedagógica e utilização de *software* multimédia educativo constitui uma necessidade cada vez mais premente.

A usabilidade de um produto de *software* pode definir-se como uma medida que permite aferir se um produto é fácil de usar, agradável e prático, sem que surjam problemas com a *interface* durante a sua utilização. Na opinião de Silva (2003) "um produto de *software* de qualidade é aquele que satisfaz as necessidades de seus usuários" (p. 111). Um dos aspetos a que os engenheiros de *software* têm prestado cada vez mais atenção é a qualidade da interação entre os utilizadores e os programas de computador. Uma boa comunicação entre os utilizadores e as aplicações informáticas tornou-se tão importante quanto a programação em si (Silva, 2003). Carvalho e Gomes (2019) sustentam ainda que os testes de usabilidade são cruciais na melhoria dos RED durante a sua fase de desenvolvimento. A dimensão técnica relaciona-se com a qualidade técnica do recurso. Não é aceitável que um aluno não atinja os objetivos de aprendizagem propostos devido a erros técnicos (El Mhouti et al., 2013). Costa (1999) esclarece que nesta dimensão se deve avaliar o *hardware* e o *software* necessário a um bom desempenho do recurso, a viabilidade da sua execução e instalação com o equipamento disponível e o seu custo de aquisição.

A existência de falhas numa destas dimensões pode comprometer o uso do recurso educacional e, consequentemente, o seu propósito enquanto ferramenta educativa (Junior et al., 2021). A avaliação de um RED é, por isso, uma etapa crucial no desenvolvimento do mesmo. Uma avaliação externa bem feita no âmbito das dimensões de qualidade atrás redigidas permite um olhar distanciado que o criador do recurso não atinge. Os avaliadores tornam-se, por isso, personagens ativos e fundamentais na criação de um recurso de qualidade, permitindo à engenharia de *software* a correção de erros. O objetivo é fornecer aos agentes educativos um produto de qualidade que atenda às suas necessidades pedagógicas, que seja fácil de usar e que funcione sem falhas no seu ambiente educacional.

A integração das TIC em contexto educativo necessita, portanto, de professores motivados, persistentes e muito conscientes de que os resultados não serão fáceis de alcançar a curto prazo. Esta mudança de paradigma levará anos a produzir frutos. Pretende-se, em consequência, docentes não resistentes à mudança, possuidores de conhecimentos pedagógicos e digitalmente competentes, equilibrados na dosagem correta das TIC nas aulas, já que esta não é panaceia para todos os males.

2.3 Dificuldades dos alunos na aprendizagem da Matemática

Ponte et al. (1998) atribuem ao ensino da matemática três funções essenciais: (i) uma função de qualificação geral, ajudando os alunos a tornarem-se competentes e capacitados para resolver problemas do seu quotidiano; (ii) uma função de preparação profissional e (iii) uma função cultural, em que se procura explicar o papel da matemática na sociedade, a sua relação com a ciência e com a tecnologia (p. 315).

Para os mesmos autores "a ideia mais difundida é que, como disciplina escolar, ela é considerada como uma das mais difíceis" (Ponte et al., 1998, p. 201). De facto, em Portugal, os alunos do ensino básico ainda apresentam um nível de proficiência baixo em matemática. No ano letivo 2020/21 foram aplicadas provas de aferição nacional nas disciplinas de matemática e inglês, por amostragem, a alunos do oitavo ano de escolaridade. O relatório produzido pelo Instituto de Avaliação Educativa, I.P. (IAVE) – Estudo de Aferição Amostral do Ensino Básico 2021 – indica que "no que diz respeito à comparação dos resultados com a prova de Matemática de 2018, último ano em que se realizou, observa-se uma descida generalizada nas percentagens de sucesso dos desempenhos dos alunos" (Serrão et al., 2021, p. 14).

Dificuldades similares estão descritas no último relatório PISA (Programme for International Student Assessment) da OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico), em 2018 (Lourenço et al., 2019). O PISA é um estudo trienal que avalia as literacias de alunos de 15 anos de idade em leitura, ciências e matemática. Portugal tem registado uma evolução consistente desde o primeiro relatório do ano 2000, estando já próximo da média dos países integrantes do estudo. Aliás, é um dos poucos países que apresenta uma trajetória de melhoria nos três domínios. No domínio da literacia científica, contudo, fazendo a leitura comparada com os resultados de ciclos anteriores, observou-se um decréscimo da pontuação média relativamente ao ciclo de 2015 (uma diferença significativa de menos 9 pontos). Este resultado acompanha a tendência decrescente da pontuação média da OCDE na avaliação das ciências que já em 2015 apresentou uma quebra de quatro pontos em relação a 2006 (Lourenço et al., 2019, p. 67).

As dificuldades na aprendizagem de Matemática revelam-se nas crianças desde o início do seu percurso académico e, apesar de todos os esforços dos agentes do ensino, persiste uma significativa percentagem de insucesso. Os conteúdos abordados em certos domínios são difíceis e exigentes, os alunos não estão motivados para aprender, há desinteresse pela maioria dos conteúdos ministrado, as estratégias metodológicas tradicionais são ineficazes, os alunos têm dificuldade em associar conteúdos matemáticos a outras disciplinas e a problemas do dia a dia (Masola & Allevato, 2019). Em todos as disciplinas é muito importante que os alunos compreendam os conteúdos lecionados. No caso da Matemática, a importância dessa compreensão acentua-se. Desafortunadamente, “a aprendizagem sem essa compreensão tem sido um resultado bastante comum no ensino da matemática (…) desde, pelo menos, a década de 30” (NCTM, 2008, p. 21). Toda esta combinação de fatores é nociva à consolidação de conhecimento matemático duradouro por parte dos estudantes.

Por outro lado, a atual geração de estudantes cresceu com os jogos digitais e privilegia a comunicação instantânea através das redes sociais. Os recursos educativos digitais que hoje estão acessíveis aos jovens estudantes possuem elevadas potencialidades para o desenvolvimento de aprendizagens na escola, embora muitas destas delas não estejam a ser devidamente aproveitadas. Na realidade, os jovens de hoje utilizam predominantemente as tecnologias digitais para comunicarem entre si, para se divertirem ou procurarem alguma informação útil, mas revelam menor capacidade para tirar partido destes recursos digitais na aprendizagem escolar, em particular, no tratamento de questões matemáticas (Figueiredo et al., 2015).

Conjugando as dificuldades suprarreferidas e a natural apetência dos nativos digitais pelas novas tecnologias, percebe-se a necessidade de diversificar as metodologias de ensino, devendo apostar-se na utilização destes recursos em contextos educativos. A utilização das novas tecnologias em Matemática pode ajudar os alunos a desenvolverem capacidades intelectuais de ordem mais elevada (Ponte & Canavarro, 1997). Para estes autores pode contribuir também, no caso de alunos com dificuldades no cálculo numérico ou algébrico, para a tornar mais acessível (p. 98).

Deste modo, é urgente promover novas formas de aprendizagem e um acesso ao conhecimento mais sintonizado com os hábitos desta nova geração. O sistema educativo no qual estes alunos estão inseridos foi pensado para uma geração sem tecnologias digitais em rede, sendo, por isso, imperioso alterar essa situação.

2.3.1 Matemática e novas tecnologias

A utilização das TIC em Matemática iniciou-se, de forma incipiente, nos anos 60 do século XX, com os computadores daquela época, volumosos, fixos, e nada práticos. Apesar de disponíveis para todas as áreas de conhecimento, a Matemática foi a primeira disciplina em que se usaram. Foi, todavia, no final dos anos 80 que os computadores começaram a ser mais usados no ensino da Matemática (Cunha et al., 2010), já que se tornaram economicamente mais comportáveis para o público e, em particular, para as escolas. A calculadora e o computador aportaram novas possibilidades ao ensino da Matemática, já que permitiram realizar tarefas de forma mais rápida ou desenvolver atividades que dantes não se podiam executar (Ponte & Canavarro, 1997).

Em Portugal, a integração das TIC no currículo de Matemática do ensino secundário ocorre, em grande medida, após a reforma curricular de 1986. No ensino da Matemática, segundo Ponte e Canavarro (1997), as novas tecnologias fazem com que:

- na aprendizagem se contacte com uma matemática mais viva, onde há lugar para interrogações, conjecturas, provas e refutações, isto é, muito mais próxima do espírito investigativo que verdadeiramente caracteriza a actividade dos matemáticos;
- o aluno passe a desempenhar um papel muito mais ativo e autónomo, definindo e aprofundando os seus domínios de interesse, e usando com desembaraço e espírito crítico uma variedade de ferramentas para o seu estudo;
- o professor veja reconhecido e valorizado o papel fundamental que só ele pode desempenhar na criação, condução e contínuo aperfeiçoamento de situações de aprendizagem. (p. 33, grafia original)

A este respeito, podemos considerar que "a utilização das novas tecnologias de informação no ensino da Matemática contribui para tornar esta disciplina mais acessível aos alunos, constituindo também uma oportunidade para que muitos alunos possam ter mais sucesso na aprendizagem da matemática" (Cunha et al., 2010, pp. 24-25). Outro aspeto a considerar é que o recurso às tecnologias em matemática influenciam a forma como esta é ensinada e aprendida, já que os alunos poderão agora explorar e resolver problemas mais complexos (NCTM, 2008, p. 28).

O recurso ao computador em sala de aula é, atualmente, um fator que beneficia as práticas pedagógicas, potenciando de forma significativa o processo de ensino e aprendizagem, constituindo um fator motivador para discentes e docentes. Trindade e Bulegon (2017) sustentam que "para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos, entende-se que o uso da tecnologia, especificamente o computador, é uma forte tendência no ensino da Matemática e abre espaço para facilitar os conhecimentos da disciplina em questão, propiciando um valioso trabalho e uma aprendizagem significativa e de qualidade" (p. 143). As calculadoras e os computadores proporcionam imagens visuais das ideias matemáticas, realizam cálculos exatos com eficácia e facilitam o trabalho de análise e organização de dados (NCTM, 2008). Nesse sentido, os aprendentes têm a hipótese de analisar mais exemplos ou formas de representação, quando comparado com o trabalho manual. "A capacidade de cálculo das ferramentas tecnológicas alarga o tipo de problemas acessíveis aos alunos e permite-lhes executar procedimentos rotineiros de forma rápida e precisa, o que deixa mais tempo para o desenvolvimento de conceitos e a modelação" (NCTM, 2008, p.27).

Na opinião de Ponte e Canavarro (1997) a integração destas novas tecnologias em ambientes de aprendizagem inovadores parecem favorecer:

- a vivência de uma atividade matemática mais significativa, na qual há lugar à resolução de problemas, à investigação e experimentação, à formulação e testagem de conjecturas, à produção de conhecimento matemático por parte dos alunos;
- uma abordagem conceptual compreensiva, possibilitando o aprofundamento de conceitos e ideias matemáticas de outra forma inacessíveis aos alunos;

- uma maior ênfase no desenvolvimento de capacidades de nível cognitivo elevado, como a resolução de problemas;
- a melhoria geral das atitudes face à Matemática. (p. 129, grafia original)

A utilização das novas tecnologias no contexto da disciplina de matemática é justificada pelas características que se lhes associam: a rápida capacidade computacional, a rápida visualização gráfica, a execução de cálculos algébricos, a capacidade de verificação de propriedades e de modelar problemas ou a facilidade no tratamento de dados estatísticos. Estas potencialidades ganham relevo se forem orientadas para desenvolver situações de aprendizagem significativas que envolvam ativamente os alunos no processo de construção do seu conhecimento.

2.3.2 A importância do uso de recursos educativos digitais em Matemática

"Vivemos em tempos de mudança rápida e acentuada. Novos conhecimentos, ferramentas e formas de procedimento e comunicação da matemática continuam a emergir e a evoluir" (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2008, p. 4). De acordo com Ponte e Canavarro (1997) "considera-se hoje fundamental na aprendizagem da Matemática todo um leque de conhecimentos, competências, atitudes e valores que vão muito para além daquilo que se pode aprender por simples leitura, memorização e prática repetitiva" (pp. 26-27). O (bom) uso do computador e das novas tecnologias pode ser um auxiliar imprescindível no ensino de conteúdos matemáticos. Para Ponte et al. (1998) as tecnologias têm uma estreita ligação com a Matemática. Por um lado, a Matemática enquanto ciência teve um papel crucial na criação e desenvolvimento das ciências da computação; por outro lado, os computadores trouxeram novas oportunidades à Matemática. Estes autores sustentam ainda que as tecnologias digitais têm um grande potencial no apoio de todo o tipo de trabalho matemático, nomeadamente no que respeita ao ensino. Por isso, "nos programas de ensino da matemática, a tecnologia deve ser largamente utilizada, com responsabilidade, com o intuito de enriquecer a aprendizagem matemática dos alunos" (NCTM, 2008, p. 26). Sem essa responsabilidade e "sem a existência de planos de implementação coerentes e acessíveis, é previsível que a incorporação de novas tecnologias não contribua para o aperfeiçoamento do ensino e da aprendizagem da matemática” (NCTM, 2008, p. 436).

2.3.3 Aprendizagens essenciais de Matemática

O Despacho n.º 702/2023, de 13 de janeiro, emanado do gabinete do Ministro da Educação da República Portuguesa homologa as (Novas) Aprendizagens Essenciais (AE) da componente de currículo/disciplina de Matemática do Ensino Secundário, enquadrando-as com o PASEO (Martins et al., 2017). De acordo com a sua redação o despacho produz efeitos a partir do ano letivo 2024/2025, 2025/2026 e 2026/2027 no que respeita ao 10.º, 11.º e 12.º ano de escolaridade, respetivamente (Despacho n.º 702/2023, 2023). No seu preâmbulo assume-se que a formação de indivíduos matematicamente competentes é um propósito fundamental do currículo de Matemática. A sociedade e o mundo contemporâneos, marcados pela globalização, crescente digitalização, conectividade e automatização, e por uma aceleração do desenvolvimento tecnológico, enfrentam desafios nos quais o conhecimento matemático adquire um papel essencial, proporcionando conceitos, métodos, modelos e formas de pensar (Despacho n.º 702/2023, 2023, p. 90).

Como ideia inovadora do currículo apresentado nestas AE sobressai o pensamento computacional. Aspetos comuns entre o pensamento matemático e o pensamento computacional devem ser aplicados na resolução de problemas. Tenciona-se promover “práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, bem como a aquisição de hábitos de depuração e otimização dos processos envolvidos na atividade matemática” (Silva et al., 2023, p. 3).

Uma das ideias chave destas novas AE é o apelo ao recurso sistemático à tecnologia, integrando-a como alavanca para a compreensão e resolução de problemas**.** As tecnologias favorecem a experimentação, visualização, representação, simulação, interatividade, bem como o cálculo numérico e simbólico. Silva et al. (2023) defendem que o recurso a ambientes de geometria dinâmica (AGD), à folha de cálculo e a aplicativos digitais, explorados em computadores, *smartphones* ou calculadora gráfica, deve ser feito de forma sistemática. Para Silva et al. (2023) as AE preconizam a realização de atividades de programação, sobretudo em linguagem *Python*, a partir de algoritmos desenvolvidos em linguagem natural. Consideram-nas relevantes para o desenvolvimento de um pensamento estruturado e do raciocínio lógico.

2.4 Função exponencial e logarítmica

De seguida aborda-se a relevância do uso das tecnologias no estudo de funções reais de variável real que vão ser alvo de análise na presente investigação. Começamos por referir que hodiernamente a noção de função se tornou imprescindível nos mais diversos ramos da matemática. Conforme refere Michelsen (2006), "o conceito de função tornou-se uma das ideias fundamentais da matemática moderna, trespassando virtualmente todas as áreas da disciplina" (p. 270). No entanto, esta noção abstrata apenas surgiu nos finais do século XVII, nos primórdios do cálculo infinitesimal, na sequência dos trabalhos independentes de Isaac Newton (1642-1727) e de Gottfried Leibniz (1646-1716). Leibniz foi, aliás, o primeiro matemático a usar o termo "função" e os termos "constante", "variável" e "parâmetro", ainda hoje assumidos na terminologia (Ponte, 1990, p. 3). A definição de função evoluiu ao longo dos últimos séculos, sobretudo com o contributo dos trabalhos de Johann Bernoulli (1667-1748), do seu discípulo Leonhard Euler (1707-1783) e de Jean-Baptiste Fourier (1768-1830). A definição atualmente lecionada em vários países, no ensino secundário, é introduzida como a correspondência entre dois conjuntos de números reais, tal que para cada elemento do domínio (conjunto de partida) há um e um só elemento do contradomínio (coincidente, ou não, com o conjunto de chegada) (Michelsen, 2006; Ponte, 1990). É sustentada e muito aproximada à que Johann Dirichlet (1805-1859) aperfeiçoou e apresentou em 1837, considerada a moderna definição formal de função.

Ao referir a complexidade deste conceito e as dificuldades que os estudantes experienciam na sua aprendizagem, Michelsen (2006) destaca a falta de interdisciplinaridade entre a matemática e outras ciências, que o autor denomina como o problema do isolamento. Do seu ponto de vista, na abordagem inicial ao estudo das funções é dada tradicionalmente preferência às funções lineares. A excessiva atenção dada às relações lineares conduz que os alunos tendam a aplicar o modelo linear erradamente em todas as situações (Dooren et al., 2004). Mas, para que os estudantes do ensino secundário desenvolvam a compreensão da noção de variável e entendam as mudanças que provocam numa função ou num modelo, Michelsen (2006) julga que as funções trigonométricas e as exponenciais são mais adequadas.

Desse modo, é expectável que um aluno, no final do ensino secundário, no que respeita ao estudo de funções, seja capaz de:

- analisar funções de uma variável, investigando taxas de variação, interseções, zeros, assíntotas e comportamento local e geral;
- compreender e efetuar transformações, como a combinação aritmética, a composição e a inversão de funções usando a tecnologia nas operações com expressões simbólicas mais complexas;
- compreender e comparar as propriedades de classes de funções, como as exponenciais, polinomiais, racionais, logarítmicas e periódicas. (NCTM, 2008, p. 352)

Ao referir a importância das novas tecnologias no ensino e aprendizagem do conceito de função, Ponte e Canavarro (1997) aludem ao desenvolvimento do *software* de manipulação simbólica – capaz de efetuar cálculos complexos com mais rapidez e correção do que os humanos – e às crescentes capacidades gráficas dos dispositivos digitais como fatores fundamentais. A rápida visualização de gráficos de funções e o cálculo imediato do valor de imagens em funções mais complexas permite abordar os aspetos informais referentes ao estudo das funções de maneira mais agradável, viabilizando mudanças na sua abordagem, com destaque para as transformações geométricas que se podem associar (Rosa, 2018). O subsequente processo de formalização torna-se, de igual modo, mais fácil de transmitir. Por isso, os alunos precisam de valorizar o uso das tecnologias e aprender a interpretar as representações que estas lhes proporcionam (NCTM, 2008).

As funções exponenciais e logarítmicas são conceitos chave no estudo da matemática, tanto no ensino secundário como no ensino superior. Infelizmente, são também conceitos em que os estudantes manifestam muitas dificuldades em assimilar (Kenney & Kastberg, 2013, p. 12), designadamente quanto à notação, enquanto função inversa da exponencial e na aplicação das suas propriedades. Devido a isso, muitos investigadores defendem a necessidade de melhorar a forma como estas funções são ensinadas (Weber, 2002). Para este autor, as suas investigações revelaram que a compreensão de exponenciais e logaritmos por parte dos estudantes é muito limitada, sendo que a maioria dos estudantes são incapazes de entender as exponenciais e os logaritmos enquanto processos. Também Sawalha (2018) sustenta que os alunos revelam muitas dificuldades em perceber as propriedades inerentes a estas funções. Em muitos níveis de escolaridade o foco está no procedimento e não na compreensão da(s) função(ções). Isto é tanto mais preocupante pois, para esta autora, as "funções são essenciais na representação e resolução de situações da vida real. Para os estudantes usarem tal ferramenta devem perceber os seus benefícios e experienciar o seu uso." (p. 34). Koştur e Yilmaz (2017), por sua vez, defendem que os estudantes manifestam dificuldades na compreensão do logaritmo como função devido à notação utilizada, diferente da habitual $f(x)$, à qual os alunos estão mais familiarizados.

Na aprendizagem, o estudo dos logaritmos é diversificado. Os logaritmos enquanto funções (e.g. $\log(2x-3)$) são diferentes dos logaritmos enquanto números (e.g. $\log_2 32$) ou enquanto operadores, para simplificar expressões algébricas, aplicar propriedades e resolver equações (Smith & Confrey, 1994, citados por Weber, 2017). Para tornar o estudo dos logaritmos enquanto números ou operadores mais compreensível, Weber (2017), considerando diversos aspetos do seu desenvolvimento histórico desde John Napier e Joost Bürgi, no século XVII, identifica quatro modelos:

- *Logaritmos como medida multiplicativa*. O logaritmo de base a do número b indica quantas vezes a cabe em b. Por exemplo, $\log_2 16$ é 4 porque $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.
- *Logaritmos como contadores do número de algarismos de um número*. O logaritmo decimal do número b indica o número de dígitos de b, menos 1. Por exemplo, o número 2^{2000} tem 603 algarismos pois $\log 2^{2000} \approx 602{,}06$.
- *Logaritmos como simplificadores de expressões*. O logaritmo de potências ou radicais reduz-se, em termos de complexidade de cálculo, para multiplicações e

divisões. Transformam, por sua vez, multiplicações e divisões em adições e subtrações.

- *Logaritmos como inversos de exponenciais*. O logaritmo de base a de um número ou expressão corresponde ao expoente da potência de base a desse número ou expressão.

Acresce referir que, de acordo com a literatura, o estudo das funções exponencial e logarítmica torna-se mais apelativo se, recorrendo às TIC, encetarmos por uma abordagem gráfica das mesmas (DeBay, 2013, p. 86, citado por Sawalha, 2018). No mesmo sentido, Weber (2017) afirma que a "representação gráfica pode ser vista como uma parte vital no entendimento de funções" (p. 540). Os conceitos a elas associados devem ser formalizados após essa fase. Segundo Ponte et al. (2003) uma possível estratégia a seguir para a implementação dessa nova abordagem está no uso de atividades investigativas. É o que se pretende seguir neste estudo empírico, ressalvando que, em linha com os investigadores supracitados, se procuram respostas a problemas simples de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. "Investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento" (Ponte et al., 2003, p. 9).

No que tange ao ensino das funções exponencial e logarítmica, as novas AE, para além do estudo analítico tradicional, apostam, como estratégia de ensino, na resolução gráfica de equações envolvendo este tipo de funções transcendentes, se possível em contexto de resolução de problemas. Enfatiza-se o caso particular da função logarítmica, em que o aluno deve estudar intuitivamente, com recurso à tecnologia, o comportamento destas funções.

As AE reforçam a utilização de ferramentas tecnológicas para representar estas funções e respetivas derivadas, usando funções específicas do *software* para cálculo da função derivada, ou outros *softwares* de caracter mais geométrico, desenhando retas tangentes ao gráfico da função, por exemplo, que complementam o seu estudo. Outro aspeto, referido por Silva et al. (2023), é que se deve "incentivar o estudo das funções, combinando as ferramentas analíticas com a tecnologia gráfica, identificando na representação gráfica obtida as características resultantes de processos analíticos" (p. 29). Estas estratégias foram tidas em consideração em muitas das tarefas aplicadas no âmbito desta investigação.

2.5 Tarefas e recursos educativos

Um dos grandes desafios com que os professores se deparam é que os seus alunos adquiram as competências definidas pelo Ministério da Educação para as suas disciplinas. Esses desafios são acrescidos por um cronograma apertado, já que em períodos curtos se procura ensinar alunos com caraterísticas diferenciadas, sem excluir ninguém. Consequentemente, o propósito fundamental do currículo de Matemática – a formação de indivíduos matematicamente competentes – é dificultado.

De acordo com Pires (2001), para a qual o currículo é o conjunto de conhecimentos ou matérias a serem superadas pelos alunos dentro de um determinado ciclo temporal, "o currículo só adquire significado definitivo para os alunos e para os professores nas atividades realizadas" (p. 39). Neste sentido, a autora defende que os efeitos educativos que o currículo provoca dependem das experiências reais que os alunos têm em aula, e estas são fortemente dependentes das tarefas que se realizam. Conhecer a natureza das tarefas torna-se crucial, já que diferentes tarefas alavancam potencialidades diferentes (M. M. Pires, 2001; M. V. Pires, 2011). Assim, é preciso saber distinguir um exercício de um problema e uma atividade de investigação de uma de exploração. Para mais, quando "o que é um problema para um aluno poderá ser um exercício rotineiro para outro e o que é um problema hoje poderá não o ser num estádio posterior" (Pires, 2001, p. 46).

As tarefas matemáticas, conforme a sua tipologia, podem apelar mais a processos rotineiros ou constituir um desafio à exploração ou descoberta, exigir um raciocínio mais reprodutor ou um raciocínio mais criador, no qual se proporcionam experiências matemáticas com mais significado (Pires, 2011).

É por isso fundamental uma seleção adequada das tarefas tal como defendem Canavarro e Santos (2012) sustentando que, no seu trabalho de preparação letiva, a seleção de tarefas para a sala constitui-se como uma das principais funções do professor, trabalho esse muito mais complexo do que aquele que se fazia até há uns anos atrás, já que implica uma atenção cuidada das características dessas tarefas e uma correta sequenciação das que irão propor aos aprendentes ao longo do tempo.

Atualmente, as (Novas) Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Secundário assumem um conjunto de princípios e orientações metodológicas para cada ano de escolaridade e tema matemático, assentes em nove ideias chave, esquematizadas na figura 1.

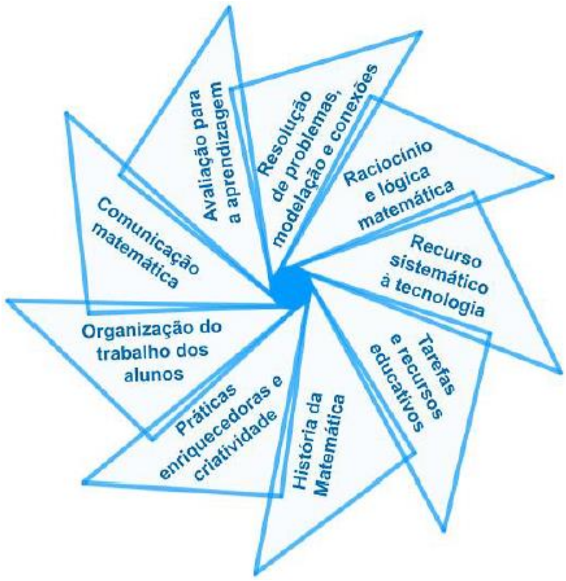


Figura 1 – Ideias chave das Aprendizagens Essenciais (Silva et al., 2023, p. 4).

Relativamente a uma das ideias chave, tarefas e recursos educativos, Silva et al. (2023) defendem que

> A construção de tarefas de aprendizagem constitui uma das ações decisivas do professor. Uma tarefa matemática enriquecedora pode assumir a forma de um problema, uma questão exploratória, um exercício de aplicação, um pequeno projeto ou uma pesquisa de aprofundamento, sempre que observe os seguintes critérios: ser interessante e desafiante, envolver matemática relevante, criar oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, permitir diferentes estratégias, tornar possível monitorizar a compreensão dos alunos e apoiar o seu progresso. As tarefas devem ser, ainda, diversificadas e ajustadas aos objetivos de

> aprendizagem e a sua planificação deve prever diferentes tipos de organização do trabalho dos alunos. A utilização de recursos variados, nomeadamente da tecnologia, (…), deverão merecer especial atenção na construção de tarefas. (p. 6)

Do acima exposto releva-se que, ao longo do tempo, vários estudos trouxeram à colação a importância que o uso criterioso de tarefas de aprendizagem tem tido no ensino da Matemática.

2.6 Ambientes de geometria dinâmica

Os ambientes de geometria dinâmica (AGD) tornaram-se populares desde o início da década de 90 do século passado e tem tido um papel cada vez mais preponderante em educação, principalmente na disciplina de Matemática e, muito particularmente, no domínio da geometria. O GeoGebra (https://www.geogebra.org/), apresentado em 2001, de acesso livre e disponível em diferentes plataformas, é atualmente o *software* mais conhecido e utilizado globalmente, neste domínio. Começou por ser desenvolvido para o ensino secundário, mas tem evoluído de forma a ser usado noutros ciclos de ensino, desde o pré-escolar ao ensino universitário (Brunheira & Ponte, 2016).

Ao longo da história a geometria foi estudada através de recursos físicos: o papel, o lápis, a régua e o compasso, entre outros. Com o advento dos computadores e a melhoria das suas capacidades gráficas, tornou-se possível o estudo de geometria de forma interativa, recorrendo a *software* que permite uma manipulação e uma visualização imediata de elementos geométricos e respetivas propriedades.

O termo geometria dinâmica surgiu com o advento de *softwares* que possibilitam fazer construções utilizando relações de dependência entre elementos geométricos. O GeoGebra, o Geometer´s Skecthpad e o Cabri Géomètre são exemplos conhecidos desta tipologia de programas informáticos. Os AGD são uma família de programas informáticos alicerçados numa mesma funcionalidade: fornecem um conjunto de ferramentas de construção (e medição) rigorosas que permitem construir elementos livres (pontos, segmentos de reta, semirretas, retas, ângulos, polígonos), que podem ser movidos ou transformados de forma intuitiva, através de interfaces *user friendly*. A partir destes elementos base é possível, através de uma série de transformações geométricas (em que se incluem isometrias e homotetias), a construção de elementos dependentes destes.

Conforme Bairral e Barreira (2017) descrevem, destacam-se as seguintes contribuições dos AGD para o estudo de vários domínios matemáticos – com destaque evidente para a geometria – na:

- ação de arrastar os objetos e na possibilidade de os explorar;
- construção de figuras geométricas, de gráficos de funções, etc.;
- visualização e nas diferentes formas de representação de elementos no ecrã, com possibilidade de alterações instantâneas dos mesmos;
- validação ou refutação de conjeturas;
- possibilidade de provar ou justificar determinada hipótese ou propriedade matemática, usando estratégias diversas;
- organização e implementação de novos modelos de aula, predominantemente construtivistas;
- aprendizagem mútua dos atores envolvidos, professores e alunos.

Segundo Ponte et al. (2003) um AGD, além de permitir a construção e manipulação de objetos geométricos, facilita a exploração de conjeturas e a investigação de conjeturas que precedem o conhecimento formal (p. 83). Verificando as suas ideias ou conjeturas visualmente de modo ágil, os alunos envolvem-se na exploração e na descoberta de conceitos através do clique e do arrastar de um rato. “Autores que pesquisam o uso de AGD estão cientes de que esses dispositivos possibilitam que os usuários (estudantes ou professores) verifiquem suas ideias, conjeturas, etc. de modo visual, dinâmico, e se envolvam na exploração e na descoberta autónoma de suas observações” (Bairral & Barreira, 2017, p. 48). Em suma, os AGD são essenciais na exploração e validação de propriedades, nas provas, na reflexão e na interpretação de relações (Bairral & Barreira, 2017; Fonseca et al., 2019; Hanna & Sidoli, 2007, citados por Brunheira & Ponte, 2016; Trindade & Bulegon, 2017).

2.6.1 O GeoGebra

O GeoGebra é, universalmente, o mais conhecido e usado *software* de geometria dinâmica. A versão inicial foi criada em 2002 pelo matemático Markus Hohenwarter (Hohenwarter, 2013) como um programa de matemática dinâmica que conjugava geometria, álgebra, gráficos, estatística e cálculo. Constituiu o núcleo da tese de dissertação do autor intitulada *GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen fur den Mathematikunterricht*, desenvolvida na Universidade de Salzburgo, na Áustria.

O sucesso internacional do programa obrigou à sua empresarialização e à criação de uma estrutura profissional que supervisiona o seu desenvolvimento. Markus Hohenwarter é atualmente o diretor da empresa GeoGebra GmbH, com sede em Linz, na Áustria. A política da empresa baseia-se na gratuitidade da sua utilização: os aplicativos GeoGebra, os serviços *online* e os materiais produzidos pelos utilizadores são e continuarão a ser gratuitos para toda a comunidade de utilizadores.

Hoje em dia o GeoGebra tem mais de 100 milhões de utilizadores em 190 países e está traduzido para cerca de cinco dezenas de idiomas. Em todos os continentes e em vários países, entre os quais se encontra Portugal (www.geogebra.org.pt), estão instituídos Institutos GeoGebra, com a finalidade de o divulgar e dar suporte ao seu uso. Como resultado desta expansão, a sua plataforma *online* disponibiliza mais de um milhão de recursos de sala de aula gratuitos.

O programa está organizado em vários ecrãs que permitem uma ligação intuitiva entre as representações geométricas (visuais) e as representações algébricas (analíticas). Inicialmente desenvolvido para trabalhar a duas dimensões evoluiu, a partir de 2014, para o estudo de objetos geométricos a três dimensões. Além disso, possui um banco de construções que podem ser partilhadas e acedidas livremente a partir do endereço https://www.geogebra.org/materials. Este repositório de materiais está em permanente desenvolvimento e é aumentado quotidianamente com o contributo dos milhões de utilizadores do *software*.

Enquanto AGD, o programa permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos, cónicas, etc. Ao longo do seu desenvolvimento, que já contabiliza duas décadas, passou, também, a permitir inserir funções e alterá-las dinamicamente. Ao trabalhar com o GeoGebra, os estudantes são geralmente bem sucedidos na transformação dos gráficos de funções, tanto na representação algébrica como na gráfica (Abar & Almeida, 2018; Anabousy et al., 2014). Estes autores justificam isso com o *interface* do GeoGebra, que contempla ambas as formas de representar funções.

Equações e coordenadas de pontos num referencial bi ou tridimensional podem, de igual forma, ser introduzidas. Desta forma, o GeoGebra é capaz de lidar com variáveis vinculadas a números, pontos, polígonos, listas, matrizes, vetores, funções, entre outros. Derivar e integrar funções, determinar raízes e extremos, determinar pontos de interseção de gráficos de duas funções, desenhar a reta tangente ao gráfico de uma função num ponto e defini-la por equação reduzida, são algumas das operações que o GeoGebra passou a realizar. Com estas valências, o *software* complementa as ferramentas tradicionais de geometria com outras mais adequadas à álgebra e ao cálculo. Assim, tem a vantagem didática de representar, em simultâneo e num ambiente visual que integra as janelas gráfica e algébrica, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto. É por todas estas razões que Abar e Almeida (2018) o consideram "um instrumento privilegiado para se aprender e ensinar matemática em todos os graus de ensino" (p. 138).

Estas características tornam-no um aliado do professor, já que é um facilitador do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, conforme nos esclarecem Fonseca et al. (2019) ao afirmar que "O *software* GeoGebra vem sendo utilizado em várias pesquisas que apontam a sua relevância por propiciar ao estudante manipular e visualizar objetos virtuais, levantar hipóteses, fazer conjecturas [sic] e aplicar propriedades" (pp. 187-188). Através dele os participantes têm acesso a uma abordagem mais dinâmica dos conteúdos trabalhados no ensino secundário, em especial os conteúdos de geometria e de funções.

A escolha da ferramenta a utilizar neste estudo empírico, em que se pretende avaliar o impacto de recursos educativos digitais no ensino e aprendizagem das funções exponenciais e logarítmica, recaiu então sobre o GeoGebra

- devido à existência destas novas potencialidades algébricas e de cálculo;
- por ser gratuito;
- por ser facilmente acessível através de vários dispositivos físicos (*desktops*, *laptops*, *smartphones*, *tablets*);
- por apresentar um interface agradável e intuitivo;
- porque potencia uma interação dinâmica com o utilizador na construção de gráficos;
- pois torna possível a visualização simultânea de representações algébricas, geométricas e gráficas;
- já que promove uma perceção de propriedades de funções;
- porque potencia a busca do conhecimento matemático.

Atualmente, o GeoGebra conta com cinco ferramentas distintas: o GeoGebra Clássico, o GeoGebra Geometria, o Geogebra Calculadora Gráfica, o GeoGebra 3D Calculadora Gráfica e o GeoGebra Augmented Reality. Todos eles podem ser instalados no computador, no *smartphone* ou podem ser acedidos *online*, com exceção da última.

O GeoGebra Calculadora Gráfica foi lançado em 2015, induzindo uma maior facilidade na construção de gráficos de funções e no estudo das operações sobre elas realizadas. No estudo empírico vigente destacamos esta ferramenta possuir um conjunto de funcionalidades adequadas à análise de funções exponenciais e logarítmicas, designadamente:

- a representação rápida de gráficos de funções;
- a resolução de equações;
- a transformação de funções através de seletores;
- o cálculo de pontos notáveis de funções (raízes, mínimos, máximos, pontos de inflexão, interseções com eixos coordenados, interseções de gráficos de funções);
- o cálculo de derivadas de funções.

Segundo Abar e Almeida (2018), "a extensão e a capacidade do GeoGebra de integrar novas funcionalidades matemáticas colocam esse *software* na vanguarda da investigação educacional e, não menos importante, na investigação de novos resultados matemáticos". Tendo em consideração essas funcionalidades pretende-se explorar a utilização deste *software* em contexto educativo no âmbito da temática das funções logarítmica e exponencial.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo descrevem-se as opções metodológicas adotadas, começando por fundamentar a opção por uma metodologia de natureza qualitativa, assente no paradigma interpretativo, uma vez que se pretende compreender se o uso de recursos educativos digitais (RED), em particular o uso de *software* de geometria dinâmica, nomeadamente o GeoGebra, contribui para a aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas, em contexto real, através da realização de tarefas de exploração propostas pelo docente/investigador.

Posteriormente, apresenta-se o *design* do estudo, seguido da caracterização dos participantes, da turma e da escola onde a investigação ocorreu. Segue-se, depois, o processo de recolha de dados, descrevendo-se as técnicas e instrumentos utilizados na recolha dos mesmos. Na penúltima secção faz-se uma descrição da análise de dados usada neste estudo e, na última, expõe-se as técnicas aplicadas no tratamento de dados.

3.1 Opções metodológicas

Numa investigação é necessário definir opções metodológicas que permitam encontrar soluções fiáveis às questões de investigação.

> Investigar em educação não é o mesmo que investigar numa outra área qualquer do social, devido à especificidade do fenómeno educativo, devido ao que os educadores fazem e se propõem como objetivos e, devido ainda, ao que os mesmos precisam de saber e que é, certamente, diferente do que necessitam outras áreas da atividade humana. (Amado, 2014, pp. 19-20)

Para este autor, o investigador não se pode alienar da complexidade deste tipo de investigação. É de realçar que, numa investigação em educação, citando Vale (2004),

> Os processos de observar, registar, analisar, refletir, dialogar e repensar são partes essenciais da investigação que pensamos ser a mais adequada. Esta começa com a identificação de um problema que dê a orientação para o estudo e do "espaço"

onde o problema possa ser investigado. O propósito da investigação é "resolver" o problema, no sentido de acumular suficientes conhecimentos que conduzam à sua compreensão ou explicação. (pp. 175-176)

Neste contexto, identificado o problema, dificuldades na compreensão das funções exponencial e logarítmica, e respetivas propriedades, foram levantadas três questões orientadoras desta investigação:

(i) De que forma pode o *software* de geometria dinâmica GeoGebra contribuir para o ensino das funções exponenciais e logarítmicas?

(ii) Qual a visão dos alunos relativamente às aulas de Matemática A, em que usaram as Tecnologias de Informação e Comunicação para promover a sua compreensão sobre funções exponenciais e logarítmicas?

(iii) Qual o impacto do uso das tecnologias na aprendizagem dos alunos no estudo da função exponencial e logarítmica?

A fim de se dar resposta às questões levantadas, considera-se conveniente proceder à investigação em ambiente natural da sala de aula, onde os alunos realizarão as tarefas propostas pelo professor/investigador. Atendendo a que se pretende estudar um fenómeno educativo em contexto real, optou-se por uma metodologia de natureza qualitativa, pois a investigação qualitativa envolve a obtenção de dados descritivos, adquiridos através do contacto direto do investigador com o fenómeno no seu contexto natural (Bogdan & Biklen, 1994; Creswell, 2003), ou seja, uma investigação qualitativa envolve habitualmente trabalho de campo (Merriam, 1998). Amado (2014), corroborando a posição destes autores, afirma que a investigação qualitativa assenta numa visão holística da realidade a investigar, sem a isolar do contexto natural em que ocorre. Tem como fim atingir a sua compreensão através de processos inferenciais e indutivos, isto é, construindo hipóteses durante e depois da análise dos dados. Esta metodologia de investigação é utilizada quando o investigador não pretende modificar uma situação, mas apenas compreendê-la. Neste sentido, para Creswell (2003), numa investigação qualitativa "o investigador procura estabelecer o significado de um fenómeno a partir do ponto de vista dos participantes" (p. 20). Por sua vez, Gómez, em 2021, reitera que "a investigação qualitativa é uma investigação científica sistemática que procura construir uma descrição, em grande parte narrativa, para informar sobre a compreensão de um determinado fenómeno social ou cultural" (p. 10).

Bogdan e Biklen (1994) destacam cinco características que uma investigação qualitativa deve possuir, em maior ou menor grau. São elas: (i) na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; (ii) a investigação qualitativa é descritiva; (iii) os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que pelos resultados ou produtos; (iv) os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva; e (v) o significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Assim, para se dar resposta às questões levantadas, proceder-se-á à análise descritiva dos dados recolhidos em contexto letivo, sendo o investigador participante, valorizando o modo como os alunos interagem com o uso das tecnologias em detrimento dos resultados obtidos, o que vai ao encontro das características referidas por estes autores.

É de salientar que se pretende compreender o processo de aprendizagem dos alunos relativamente aos conteúdos de funções, suportado pelo uso de recursos educativos digitais (RED). Acresce ainda que a investigação existente sobre este tema, em particular, é escassa. A este propósito Creswell (2003) e Merriam (1998) consideram que quando um fenómeno deve ser compreendido porque a investigação sobre o assunto é parca, este merece uma abordagem qualitativa. Mais ainda, a última autora refere, em particular, que numa investigação de tipo qualitativo "um investigador pode estudar como chegam os estudantes à compreensão de conceitos matemáticos" (Merriam, 1998, p. 38).

Assim, a fim de responder às questões de investigação que norteiam esta investigação privilegia-se uma metodologia qualitativa de cariz interpretativo. O paradigma interpretativo valoriza a compreensão e a explicação, tendo em vista desenvolver e aprofundar o conhecimento de um fenómeno ou situação, num dado contexto (Bogdan & Biklen, 1994). Já em 1986 o investigador Frederick Erickson destacava que "a investigação interpretativa expõe a organização particular do ensino e da aprendizagem numa sala de aula e, simultaneamente, a realidade das pressões externas que se exercem sobre essa organização" (p. 138). No contexto do paradigma interpretativo, o objeto de análise é formulado em termos de ação, “sendo a tarefa da investigação interpretativa descobrir os caminhos específicos nos quais as formas de organização social e cultural se relacionam com as atividades de pessoas específicas que fazem escolhas e conduzem a ação social em conjunto” (Erickson, 1986, p. 129).

Daí que, atendendo ao facto das questões de investigação se prenderem, fundamentalmente, com uma melhor compreensão da prática do professor e da reflexão do seu trabalho, a opção recaia pelo paradigma interpretativo. Em concomitância, procurar-se-á proceder a uma reflexão com profundidade acerca da forma como a utilização de RED influem na aprendizagem, por parte dos alunos, da função exponencial e logarítmica.

O paradigma qualitativo (ou interpretativo) procura substituir as noções de explicação, previsão e controlo do paradigma positivista (ou quantitativo) pelas de compreensão, significado e ação. Nas questões educativas, procura penetrar no mundo pessoal dos sujeitos para conhecer as situações e que significados têm para eles (Coutinho, 2011). De qualquer forma, na metodologia qualitativa nunca se pode apreender integralmente a realidade objetiva, procura-se antes uma aproximação dessa realidade, baseada no uso de vários métodos como forma de a perceber e interpretar. Stake (2016) vai mais longe, ao afirmar que a investigação qualitativa é subjetiva (p. 60). É por isso que no estudo a desenvolver não se pretende encontrar evidências que comprovem hipóteses previamente estabelecidas, mas antes interpretar os fenómenos e, se possível, contribuir para a construção de novo conhecimento sobre o assunto a investigar. Não é propósito deste estudo ter controlo sobre os acontecimentos, nem produzir resultados generalizáveis, o que vai ao encontro do defendido por Stake (2010, 2016). Já para Amado (2014), “o principal interesse do investigador interpretativo é a possibilidade de particularizar, mais do que de generalizar” (p. 44).

Há, todavia, cuidados a ter, já que o investigador qualitativo se encontra muito próximo dos participantes durante a investigação. De acordo com Vale (2004) “o caminho faz-se através de “profunda compreensão” no trajeto e intimidade com o participante que estamos a investigar” (p. 177). Investigar implica interpretar ações de quem é intérprete o que, em consequência, conduzirá a interpretação de interpretações (Coutinho, 2011). Para esta autora, estar ciente desta dificuldade leva a que o investigador tenha mais cuidado e maior abertura de espírito ao interpretar as ações educativas, tornando-se mais lúcido. Conseguirá, desta forma, um conhecimento mais objetivo. Mas, "para um professor ser um investigador deve ser antes de tudo um observador competente" (Vale, 2004, p. 179).

3.2 Descrição da implementação do estudo

Qualquer investigação pressupõe "um plano de estudo com o intuito de responder a um problema (questão de investigação) e de atingir os objetivos propostos inerentes à investigação a ser realizada" (Araújo, 2014, p. 86). Opinião análoga expressam S. Gonçalves e J. Gonçalves (2021), quando defendem que "para o desenvolvimento de uma investigação sobre uma determinada temática, o investigador deve definir a aplicação de um método que tenha em consideração as especificidades do assunto em análise e das características dos indivíduos participantes no processo" (p. 52).

Assim, e com o objetivo de compreender se ambientes de geometria dinâmica contribuem para a aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas, a investigação é sustentada na implementação de uma proposta pedagógica que privilegia o uso de RED, em particular o GeoGebra. Complementarmente, vai-se investigar como os alunos, trabalhando individualmente ou em pares, superam as dificuldades na construção do seu conhecimento e desenvolvem a capacidade de comunicação matemática.

Apresenta-se, de seguida, o esquema investigativo do estudo empírico efetuado (figura 2).

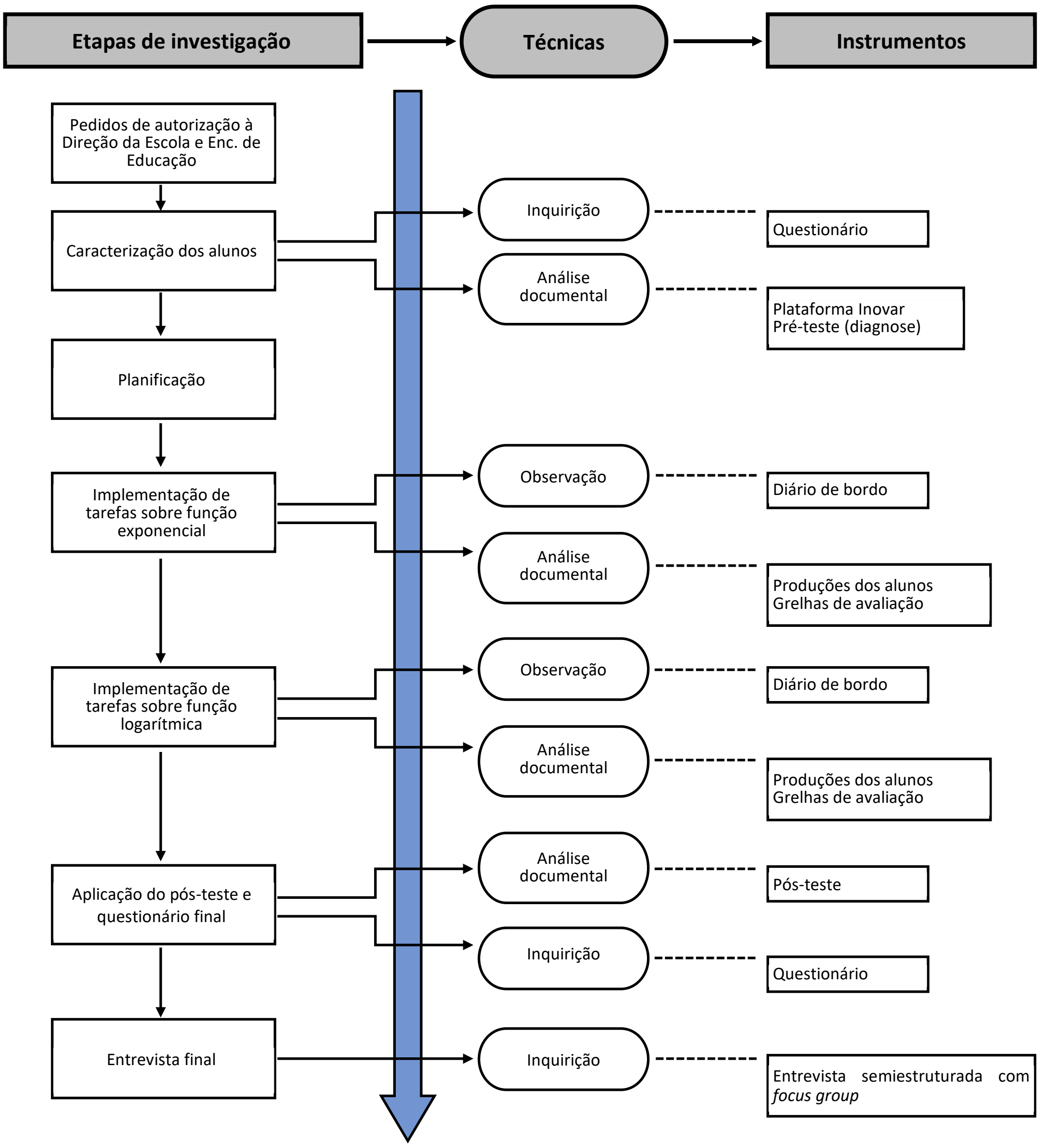


Figura 2 – Esquema investigativo do estudo empírico (adaptado de Araújo, 2014).

Na fase preparatória de implementação do estudo, que decorreu entre novembro e dezembro, o investigador apresentou informalmente à turma a investigação que pretendia desenvolver. Em meados de novembro, por questões legais e éticas, foi pedida autorização à Direção da escola (anexo 1) para a sua realização, o mesmo sucedendo com os encarregados de educação dos alunos da turma (anexo 2), uma vez que os seus educandos eram menores e seriam objeto de recolha de dados.

Após a concretização desses imperativos éticos, que decorreu durante o mês de dezembro, os alunos foram convidados a participar no estudo. Esclareceu-se a turma relativamente ao que dela era esperado durante o período de realização do estudo, informando-a também sobre a confidencialidade dos dados recolhidos.

Procurou-se, com isto, respeitar princípios orientadores da gestão da qualidade de um estudo, segundo Flick (2005). Este autor entende que é preciso:

- definir os objetivos a atingir e as normas a cumprir no projeto, envolvendo todos os participantes;
- definir de que forma os objetivos e as normas podem ser alcançados, garantindo a qualidade do estudo empírico;
- definir claramente as responsabilidades de todos os intervenientes, para garantir a qualidade da pesquisa;
- ser transparente no julgamento e na avaliação da qualidade do processo. (p. 285)

A proteção da identidade dos participantes foi integralmente respeitada, recorrendo-se a nomes fictícios e à omissão de quaisquer dados que permitam a sua identificação. O respeito por estes princípios éticos é fundamental. Do ponto de vista de Erickson (1986) existe uma relação não despicienda entre a validade de uma investigação qualitativa e o respeito por estes princípios. Para este investigador “a responsabilidade ética deve andar a par com a preocupação científica numa investigação conduzida no campo” (p. 142).

Antes da implementação do estudo empírico propriamente dito, foi disponibilizado aos participantes um inquérito inicial (anexo 3), com recurso à ferramenta Google Forms. Procurou-se, com esse instrumento, conhecer as metodologias de trabalho dos alunos e as suas perceções no atinente às disciplinas do seu currículo, em geral, e da matemática, em particular. Por solicitação do investigador, o inquérito foi preenchido pelos alunos na primeira semana do ano, em janeiro de 2023.

Foram aplicados aos alunos dois testes: um teste inicial diagnóstico (pré-teste) na véspera de implementação do estudo empírico, na última semana de janeiro, e um segundo teste (pós-teste), realizado no final do mês de março, para aferir as competências adquiridas pelos participantes ao longo do estudo (anexos 4 e 5).

No período temporal que mediou entre os dois testes, meses de fevereiro e março, foram aplicadas em sala de aula 12 tarefas com recurso ao RED escolhido – o GeoGebra. As tarefas são elementos organizadores da atividade de quem aprende e valorizam o papel ativo do aluno na aprendizagem (Ponte, 2014). Segundo a NCTM (1994) as tarefas[1] "são os projetos, questões, problemas, construções, aplicações, e exercícios em que os alunos se envolvem. Proporcionam os contextos intelectuais para o desenvolvimento matemático dos alunos" (p. 22). "Uma tarefa pode ter ou não potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que pode ajudar a mobilizar" (Ponte, 2014, p. 16). Este autor defende que o ensino que valoriza o papel ativo do aluno na aprendizagem necessita da noção de tarefa, uma vez que estas são o elemento organizador da atividade de quem aprende.

Nesta investigação, na formalização das tarefas propostas aos pares de alunos usando o GeoGebra, procurou-se diversificar a sua natureza, incidindo sobretudo nos exercícios e nas tarefas de exploração. Entre a panóplia de tarefas apresentadas, houve a preocupação de variar o seu grau de dificuldade, o seu grau de abertura (mais abertas ou mais fechadas) ou o tempo necessário para a sua resolução.

Em nove dessas tarefas o investigador construiu, em GeoGebra, aplicações que orientaram a realização dessas tarefas (anexo 6). As tarefas foram aplicadas aos alunos em duas fases: numa primeira realizaram-se tarefas envolvendo a função exponencial e na segunda exploraram-se tarefas sobre a função logarítmica, de acordo com a planificação anual da disciplina, definida em secção disciplinar. Para cada tarefa foi fornecido um guião escrito o que, segundo Ponte et al. (2003), é vantajoso. Não obstante, o documento foi sempre complementado por uma pequena introdução oral feita pelo professor, com o intuito de explicar melhor a natureza da tarefa.

Na primeira sessão com recurso ao GeoGebra, o objetivo principal do investigador foi familiarizar os alunos com a dinâmica de aula em que se integra a realização de tarefas de natureza exploratória e investigativa. Nas sessões subsequentes, com duração variável, os alunos, em pares, resolveram os problemas propostos com base em ficheiros GeoGebra desenvolvidos pelo investigador.

[1] Tradução da palavra *task* no texto original. Pode ser traduzido por tarefa ou atividade. A designação atividade também está consagrada em Portugal.

Na última semana de março, após a realização das tarefas com recurso ao RED, foi aplicado aos alunos um questionário (anexo 7), para melhor interpretar a sua visão, no que concerne às aulas de Matemática A em que usaram as Tecnologias de Informação e Comunicação.

E, por fim, aplicou-se a entrevista final definida no esquema investigativo. Optou-se pela realização de uma entrevista semiestruturada, na modalidade de *focus group*, a qual foi aplicada a três grupos focais de alunos na primeira semana do terceiro período letivo, no dia 20 de abril.

3.3 Participantes

A investigação foi realizada numa escola do ensino público do norte de Portugal, onde o investigador exerce funções docentes como professor de matemática há dois anos, a uma turma do 12.º ano de escolaridade, pois, segundo Stake (2010) é "muito apropriado que os investigadores estudem os seus locais [de trabalho]" (p. 163). Em 2021, Fontanella afirmou que

> a seleção dos participantes numa investigação qualitativa, geralmente, não decorre de um processo de escolha aleatória de sujeitos que compõem uma determinada população. Se o investigador abrisse mão de uma escolha intencional de participantes, poderia deixar de recrutar exatamente os sujeitos que possuem maior densidade de informações úteis aos propósitos da investigação. (pp. 32-33)

Em muitas experiências o uso de uma amostra de conveniência é a única opção possível porque o investigador tem de usar grupos que já estão naturalmente formados, como é o caso das turmas (Creswell, 2003; Gall et al., 2003; Merriam, 1998).

3.3.1 Caracterização da escola

O estudo será efetuado na escola onde o investigador exerce funções docentes, por questões de ordem prática. É uma escola do ensino público do concelho de Guimarães, situada no Vale do Ave, onde o principal setor económico é o secundário. Não estando localizada na sede de concelho, a freguesia tem características urbanas e assume-se como um polo de atração em relação às freguesias próximas, de caráter mais rural. Ministra-se apenas ensino secundário, nas vertentes regular, recorrente e profissional. É frequentada maioritariamente por alunos do concelho.

No que tange ao contexto socioeconómico onde se insere, este pode ser classificado como problemático, apresentando elevadas taxas de desemprego e trabalho desqualificado, o que potencia o abandono escolar precoce.

O território de influência apresenta baixos níveis de escolarização e de qualificação da população, quando comparado com o todo nacional. Ciente destes condicionalismos, a escola é sede de um Centro Qualifica, vocacionado para cursos noturnos de educação de adultos, num esforço contínuo para elevar o nível de escolaridade da população. Apesar destes constrangimentos, a escola tem potencializado as sinergias ao seu dispor e os discentes tem revelado taxas de sucesso superiores à média nacional. A taxa de abandono escolar tem vindo paulatinamente a diminuir e a taxa global de colocação de alunos no ensino superior está, pelo menos desde 2013, acima da média nacional.

No ano letivo em que foi realizada a presente investigação, 2022/2023, a escola tinha um total de 854 alunos, distribuídos cursos científico-humanísticos e cursos profissionais, escalonados em 15 turmas do 10.º ano, 15 do 11.º, 13 do 12.º e 2 turmas de ensino recorrente, a funcionar em regime noturno. É uma escola de dimensão média, com aproximadamente 100 professores, bem organizada e com bom ambiente de trabalho. Sofreu grandes obras de requalificação, física e funcional, concluídas em 2011, no âmbito da empresa Parque Escolar E.P.E., pelo que a estrutura física se pode considerar num patamar acima da média nacional. Destaca-se ainda pelo grande número de projetos em que está envolvida e por um plano anual de atividades muito preenchido. Esta aposta é justificada pela pretensão de se constituir como espaço inclusivo onde se eduquem cidadãos cada vez mais autónomos, responsáveis, cultos e solidários, comprometidos com os valores essenciais preconizados no Perfil do Aluno à Saída da Escolaridade Obrigatória (Martins et al., 2017). As atividades, plasmadas no Plano Anual de Atividades, fomentam sobretudo o trabalho colaborativo, numa ótica de desenvolvimento de ações e iniciativas que conduzam ao sucesso de todos os discentes.

3.3.2 Caracterização da turma

A intervenção pedagógica será implementada numa turma do 12.º ano do curso científico-humanístico de ciências e tecnologias, constituída por 23 alunos, dos quais 15 são do género feminino e 8 do masculino, com idades compreendidas entre os 17 e os 18 anos (tabela 1).

Tabela 1 – Distribuição dos alunos participantes no estudo por género e por idade.

			Idade (em anos)
Género	17	18	Total
Feminino	15	0	15
Masculino	7	1	8
Total	21	2	23

À exceção de quatro alunos, integrados na turma no presente ano letivo, o professor/investigador conhece os alunos desde o início do ano letivo 2021/22, já que houve lugar a continuidade pedagógica iniciada no 11.º ano de escolaridade. São alunos que se distraem com alguma regularidade, mas que não apresentam problemas de comportamento significativos. A turma tem, no entanto, elementos que revelam falta de motivação e interesse pela disciplina, o que se reflete no seu desempenho académico. Nesta investigação também participará o professor de matemática A, na dupla qualidade de professor e investigador. Todos os alunos são de nacionalidade portuguesa. A turma não tem alunos repetentes, mas quatro alunos tiveram uma classificação negativa no ano letivo anterior, no final do 11.º ano de escolaridade, na disciplina de Matemática A. Contudo, esta condicionante não os impediu de estar matriculados e frequentar a disciplina no 12.º ano. Em suma, trata-se de uma turma heterogénea, considerando as classificações obtidas à disciplina no final do 11.º ano de escolaridade.

Quanto à situação socioeconómica, as famílias caracterizam-se, no geral, por pertencer à classe média. O agregado familiar de 78% dos alunos é formado por quatro elementos, com pai, mãe e dois filhos. As restantes famílias são formadas por dois (uma família), três e cinco elementos. Nenhum progenitor está empregado no setor primário, setor económico com pouca expressão no território. A maioria dos pais e encarregados de educação dos alunos trabalham no setor secundário, na indústria transformadora, com destaque para a têxtil (gráfico 1). Em menor número, há trabalhadores do setor terciário, sobretudo na área do comércio, em empregos pouco qualificados. Nas profissões que requerem maior grau de especialização académica quantificam-se apenas quatro casos.

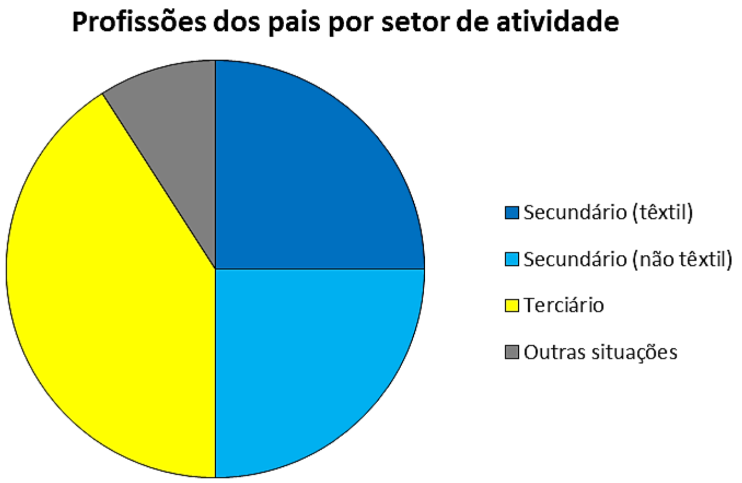


Gráfico 1 – Profissões dos pais dos alunos por setor de atividade.

Esta situação reflete, de certa forma, o nível de escolaridade dos encarregados de educação, que pode ser considerado baixo, conforme se procura realçar na tabela 2.

Tabela 2 – Habilitações académicas de pais e encarregados de educação, por género.

						Habilitações académicas
Género	1.º ciclo	2.º ciclo	3.º ciclo	Secundário	Licenciatura	Mestrado
Feminino	1	7	6	6	2	1
Masculino	2	6	3	7	3	0

Em termos de disciplinas favoritas, destacam-se a Educação Física e a Matemática A (tabela 3).

Tabela 3 – Disciplinas favoritas dos alunos da turma ($n = 22$).

Disciplinas favoritas	Frequência
Educação Física	15
Matemática A	11
Biologia e Geologia	10
Inglês	7
Português	6
Filosofia	5
Química	3
Física e Química A	3
Aplicações Informáticas B	2

Relativamente às disciplinas em que sentem mais dificuldade, das cinco disciplinas de 12.º ano que fazem parte do seu currículo, responderam, por ordem decrescente de dificuldade, Química, Matemática A, Português, Aplicações Informáticas B e Educação Física (tabela 4).

Tabela 4 – Disciplinas de aprendizagem difícil, segundo os alunos ($n = 22$).

Disciplinas	Frequência
Química	12
Matemática A	11
Português	9
Aplicações Informáticas B	5
Educação Física	0

De uma maneira geral gostam da disciplina de Matemática A (77,3% das respostas), justificando a sua escolha pelo gosto na resolução de exercícios, pelo apelo ao raciocínio, pelos conteúdos lecionados, pelo seu caráter prático e pelo desafio que a disciplina lhes proporciona, em particular quando os conseguem ultrapassar. Um dos inquiridos afirma mesmo que "a matemática é intrigante e desafiante, sou muito curioso e gosto da sensação de vitória". Por outro lado, os alunos que respondem negativamente (22,7% dos respondentes), justificam-no por questões de gosto pessoal, preferindo as ciências não exatas, e referem que a orientação para a avaliação limita a exploração da matéria pelos alunos, especialmente quando é fácil acontecerem deslizes nos momentos de avaliação. Na opinião de um aluno, "dantes eu gostava de matemática, mas o tipo de ensino aplicado em Portugal limita a exploração da matéria pelo aluno e faz com que o mesmo se sinta na obrigação de decorar a matéria e aplicá-la no teste".

Os alunos da turma dedicam à disciplina, por semana, um tempo de estudo que medeia entre as três horas e meia e as quatro horas (gráfico 2).

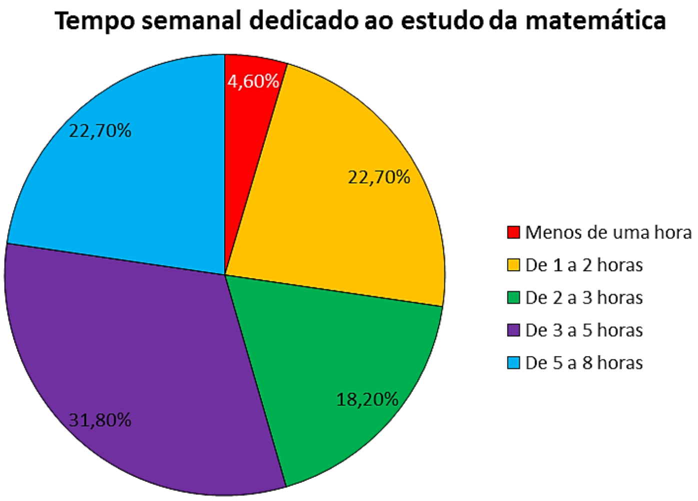


Gráfico 2 – Tempo de estudo semanal dos participantes.

Para mensurar o grau de dificuldade sentido pelos alunos na compreensão de conteúdos matemáticos foi usada uma escala Likert de 5 pontos, uma das mais preferidas pelos respondentes a este tipo de inquéritos (Dalmoro & Vieira, 2013). Para os extremos das categorias de resposta usaram-se as âncoras verbais "muito fácil" e "muito difícil". Analisadas as respostas, constata-se que a maioria dos alunos da turma situa estas dificuldades no ponto neutro da escala, num nível de dificuldade médio (tabela 5).

Tabela 5 – Nível de dificuldade percecionado pelos alunos, relativamente à disciplina.

	A Matemática é, para ti, uma disciplina fácil ou difícil?				
Pontos da escala	1 (Muito fácil)	2	3	4	5 (Muito difícil)
N.º respostas	0	3	14	3	2

3.4 Técnicas e respetivos instrumentos de recolha de dados

No desenvolvimento das tarefas executadas pelos participantes subjaz uma rigorosa recolha de dados por parte do investigador, sendo que a "recolha de dados é uma fase crucial" da investigação (Vale, 2004, p. 178). Mais ainda, segundo Ribeiro (2021), "quando implementada corretamente, a recolha de dados aumenta a qualidade de um estudo de investigação social" (p. 10).

Segundo Merriam (1998) nas investigações de cariz qualitativo deve ser o investigador o principal responsável pela recolha de dados e sua análise. O mesmo nos diz Ponte (2006) ao afirmar que “neste tipo de investigação o principal instrumento é precisamente o investigador, não havendo nada que substitua a sua perspicácia observadora, bem como a riqueza e pertinência das suas perspetivas de análise” (p. 20). Como tal, este tem o potencial de maximizar oportunidades na recolha e produção de informação significativa. Esta investigação não se afastou deste pressuposto: o investigador é participante e é o responsável pela recolha dos dados.

No caso vertente, a recolha dos dados concretizou-se em contexto real, durante as aulas da disciplina de Matemática A, nas quais os alunos desenvolveram tarefas de exploração e investigação no âmbito das funções exponencial e logarítmica, propostas pelo professor/investigador. E, excecionalmente, recorreu-se ao tempo semanal da área curricular não disciplinar de Cidadania e Desenvolvimento para concretizar algumas etapas do estudo. A recolha de dados foi conduzida pelo investigador, na qualidade de observador participante.

É de salientar que, no plano qualitativo, uma boa metodologia de investigação se pauta pela credibilidade, transferibilidade, dependência e confirmabilidade. Todos os investigadores, quer no plano qualitativo, quer no plano quantitativo, tem de se preocupar com estes critérios, já que sem rigor uma investigação não tem valor e perde a sua utilidade. Para mais, quando o paradigma interpretativo assume, de um ponto de vista ontológico uma posição relativista (Coutinho, 2011).

Tendo em conta o caráter qualitativo da metodologia adotada na investigação, a recolha de dados foi maioritariamente descritiva, procurando obter uma caracterização a mais pormenorizada possível da situação em estudo. Para isso, optou-se por diversificar os métodos de recolha de dados, pois possuir evidências de diversas fontes torna possível efetuar a triangulação dos dados garantindo maior credibilidade, validade, confiabilidade e rigor científico.

A triangulação pode envolver vários investigadores, múltiplas fontes de dados ou o recurso a vários métodos que permitem confirmar teorias emergentes (Lessard-Hébert et al., 2008; Merriam, 1998; Morse, 1994; Stake, 2010, 2016). Para Coutinho (2011) “a triangulação consiste em combinar dois ou mais pontos de vista, fontes de dados, abordagens teóricas ou métodos de recolha de dados numa mesma pesquisa por forma a que possamos obter como resultado final um retrato mais fidedigno da realidade” (p. 208). São cuidados a considerar, pois Santos et al. (2020) arguem que “devido às características que constituem a pesquisa qualitativa, esta é alvo de constantes questionamentos com relação ao seu rigor científico. Esses questionamentos se vinculam aos critérios de confiabilidade, validade e generalidade utilizados em seu desenvolvimento” (p. 656). Para estes autores a pesquisa qualitativa não se baseia no uso de métodos estatísticos para garantir fidedignidade e validade de dados e resultados, mas é possível a utilização de estratégias metodológicas que garantem o refinamento, a transparência e a fidelidade dos dados produzidos. A triangulação de dados é uma das estratégias mais importantes no aprimoramento de estudos qualitativos, já que envolve a utilização de instrumentos de recolha diversificados, envolvendo diversas perspetivas. No mesmo sentido, Creswell (2003) recomenda aos investigadores que triangulem dados de diferentes fontes de informação e as usem para construir uma justificação coerente para a sua tese (p. 196) e assim “aumentar a confiança que temos nas nossas evidências” (Stake,2010, p.126).

O recurso a diversos métodos de recolha permite obter um conjunto vasto de dados, válido e bem fundamentado (Bogdan & Biklen, 1994; Coutinho, 2011; Gall et al., 2003; Miles & Huberman, 1994; Rodríguez-Gómez et al., 1999). Ao usar diferentes pontos de vista o investigador é forçado a refletir, voltando a analisar os dados, procurando assim explicações para eventuais diferenças que surjam. Essa reflexão tende a ser enriquecedora e permite uma análise de maior alcance e qualidade.

No que tange às técnicas de recolha de dados, a observação, a inquirição e a análise documental são três formas privilegiadas de investigação qualitativa (De Bruyne et al., 1974; De Ketele & Roegiers, 1999; Gall et al., 2003; Lessard-Hébert et al., 2008; Merriam, 1998).

Para Coutinho (2011)

> O investigador qualitativo ausculta as opiniões individuais (entrevista não estruturada ou livre, observação participante ou não participante) sem se

> preocupar em categorizar as respostas de antemão; pressupõe ser fundamental atender às características individuais dos intervenientes num programa/intervenção, porque é da forma como estes se empenham que tudo depende. (p. 204)

Seguindo estas indicações, optou-se nesta investigação por usar as técnicas supracitadas de recolha de dados. Recorrer-se-á também a notas de campo, fundamentais para memória futura, constituindo registos que permitem não olvidar o ocorrido durante o estudo empírico.

A recolha de dados produz uma quantidade inusitada de informação. Na opinião de Harry Wolcott

> a tarefa mais crítica na investigação qualitativa não é acumular todos os dados possíveis, mas sim deitar fora a maior parte dos dados acumulados. Isto exige um exame minucioso constante. … Gravações áudio, vídeo, e, agora, as capacidades dos computadores pedem-nos que façamos exatamente o oposto; eles têm apetite e estômago gigantescos. Pelo facto de podermos acomodar quantidades cada vez maiores de dados – temos de ter cuidado para não sermos soterrados por avalanches da nossa própria criação. (Wolcott, 2001, p. 44)

Finda a recolha, somos obrigados a concordar com Stake (2016), quando o autor sustenta que o tempo para organizar uma boa recolha de dados é escasso e que esta, por si só, poderia absorver o tempo disponível para conduzir a investigação.

Importa, nesta fase do texto, assinalar a nossa inteira concordância com Batista et al. (2021), quando os autores afirmam que existe ambiguidade na literatura e confusão de termos no que concerne aos métodos, técnicas e instrumentos de recolha de dados, assim como à forma como estes são interpretados. Da revisão feita encontram-se, porém, alguns denominadores comuns no que concerne a quatro técnicas mais usadas em investigação qualitativa: observação, análise documental, inquérito por questionário e inquérito por entrevista (Batista et al., 2021; Bogdan & Biklen, 1994; Coutinho, 2011; De Ketele & Roegiers, 1999; Flick, 2005; Yin, 2003).

Quanto aos instrumentos de recolha de dados, Coutinho (2011) define-os como o objeto tangível utilizado nas diversas técnicas. Nesta dissertação, optou-se por considerar as técnicas de inquérito por questionário e inquérito por entrevista, como uma técnica única que muitos autores designam por inquirição (Araújo, 2014; Batista et al., 2021; De Bruyne et al., 1974; Eisman, 1992, citado por Coutinho, 2011; Charles, 1998, citado por Coutinho, 2011). Da revisão da literatura levada a cabo, destacámos e orientámos a nossa dissertação segundo os preceitos de De Bruyne et al. (1974). Quanto ao seu uso, características principais e modo de emprego, estes autores categorizam as técnicas de recolha de dados usadas em ciências sociais em três grandes tipos: os inquéritos (por entrevista oral e por questionário escrito), a observação (direta e participante) e as análises de documentais (p. 201). Sendo assim, procurando manter alguma fluidez no texto, consideraremos estas três técnicas principais – observação, inquirição e análise documental – a que correspondem instrumentos de recolha que as concretizam – questionários, entrevistas, notas de campo, grelhas de observação, análise de documentos físicos e digitais, produções dos alunos e testes.

3.4.1 Observação

Vale (2004) sustenta que as observações são a melhor técnica de recolha de dados pois permitem comparar aquilo que se diz, ou que não se diz, com aquilo que se faz. Já Gall et al. (2003) afirmam que a observação permite ao investigador formular a sua própria versão do que está a ocorrer e fornece uma descrição mais completa da situação, quando comparada com outros métodos. Agindo em conformidade com estes investigadores, a observação foi uma das técnicas de recolha de dados utilizadas neste estudo empírico.

No entanto, há cuidados a atender. “Será que a presença do investigador não vai modificar o comportamento das pessoas que pretende estudar? A resposta é afirmativa e tais modificações são designadas por “efeito do observador”. Praticamente todas as investigações são afligidas por esse problema” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 68). Merriam (1998) vai mais além, quando afirma que “a observação participante é uma atividade esquizofrénica em que o investigador participa mas não ao ponto de ficar totalmente absorvido nela" (p. 103). Ciente deste facto, o investigador procurará minimizar este efeito.

Nesta investigação a observação será participante, sendo o próprio investigador o instrumento principal de observação (Lessard-Hébert et al., 2008). Pode ser classificada como natural, quando o observador faz parte do grupo que investiga, ou artificial, quando o investigador não o integra (Rebolo, 2021, p. 93). Nesse sentido, nesta investigação a observação é participante natural. Numa observação participante o investigador/observador insere-se no meio a investigar, tendo acesso às perspetivas dos participantes, na medida em que vivencia os mesmos problemas e as mesmas situações que eles. Consegue-se, assim, recolher dados (sobre ações, opiniões ou perspetivas) aos quais um observador exterior não teria acesso.

Todavia, para Bogdan e Biklen (1994), "é necessário calcular a quantidade correta de participação e o modo como se deve participar" (p. 125). É necessário ser discreto e controlar os seus sentimentos, mas ser sociável. A tentativa de equilíbrio entre a participação e a observação pode ser particularmente difícil (Bogdan & Biklen, 1994). Quando se recorre à observação participante tem-se o propósito de elaborar, após cada sessão de observação, descrições qualitativas (i.e., sem recorrer a grelhas de observação estandardizadas), que permitem obter informação relevante para a investigação em causa (Mónico et al., 2017). Em síntese, vários autores sustentam que os estudos que recorrem à observação participante tendem a ser bons exemplos de investigação qualitativa.

3.4.1.1 Diário de bordo

Um dos melhores instrumentos que auxiliam o observador são as notas de campo, que se podem considerar um diário de bordo da investigação. As notas de campo são definidas como "o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150). Segundo Coutinho (2011) uma observação qualitativa materializa-se em notas de campo que podem ser de dois tipos: descritivas e reflexivas. As descritivas são minuciosas, descrevendo com profundidade o ambiente, as características físicas e psicológicas dos participantes, devendo-se registar tudo aquilo que dizem e como atuam. As reflexivas são especulações do investigador, pois correspondem aos seus sentimentos, interpretações, ideias e impressões que vai formando ao longo da investigação. Neste caso, é importante que o investigador não confunda as suas reflexões com a informação descritiva real.

De forma similar Vale (2004) considera que, como o trabalho do investigador se desenrola normalmente por grandes períodos de tempo, o investigador necessita de tomar notas. A autora agrupa-as em três tipos: notas observacionais, notas teóricas e notas metodológicas ou procedimentais. As notas observacionais baseiam-se no que se observa e ouve; referem-se ao "quem", "o quê", "quando", "onde" e "como" da situação observada, contém pouca interpretação e são fundamentalmente descritivas; as notas teóricas são baseadas no significado que o investigador atribui às notas observacionais, isto é, são interpretações, inferências, hipóteses e conjeturas. As notas metodológicas descrevem procedimentos e métodos, constituindo afirmações que dizem respeito às ações do próprio investigador enquanto conduz o estudo, designadamente instruções para ele próprio, lembranças ou críticas.

As notas tomadas pelo investigador devem aportar um conjunto de características: ser descritivas e reflexivas, detalhadas e concretas e incluir também esquemas, não se limitando ao uso de palavras (Gall et al., 2003). Sugerem fortemente que o tempo que passa entre a observação e o registo das notas deve ser mínimo, para evitar perdas de memória. Bogdan e Biklen (1994, pp. 167-168) sugerem que o investigador deve tentar registar as notas de campo no mesmo dia da observação. Deve evitar procrastinar essa tarefa e fazê-lo num local sossegado.

Em jeito de conclusão pode afirmar-se que o investigador deve dar o seu melhor, ser sensato e não ficar ansioso, já que é impossível registar todas as dinâmicas de uma sala de aula, em particular durante a realização de tarefas em que eventualmente é sujeito a múltiplas solicitações. Assim, procurou-se, ao longo dos meses em que decorreu o trabalho de campo, registar de forma minuciosa e dentro do humanamente possível, os comentários, reparos, questões, diálogos e sugestões dos participantes. O empenho dos participantes no desenvolvimento das tarefas propostas foi registado em diário de bordo e, posteriormente, avaliado e debatido. “A observação informal dos alunos durante a realização da tarefa (…) é uma forma natural de avaliá-los” (Ponte et al., 2003, p. 124). Em matemática, tal como noutras disciplinas, “o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem” (Ponte et al., 2003, p.23) e desta forma pretende-se melhor compreender de que modo o uso do GeoGebra contribui para uma efetiva aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas.

3.4.2 Inquirição

Existem dois tipos de inquéritos, “o inquérito por questionário e o inquérito por entrevista [que] são técnicas de recolha de dados comummente utilizadas em investigação em Educação” (Batista et al., 2021, p. 14). Hoje em dia, com o recurso aos meios telemáticos, o inquérito por questionário é simples de aplicar, fornecendo de imediato dados quantificados em tabelas e em gráficos de formatos diversos. Já o inquérito por entrevista é muitas vezes associado a estudos de caráter interpretativo e a estudos de investigação qualitativo, na recolha e análise de dados ou informações, dado seu caráter descritivo (Batista et al., 2021; Coutinho, 2011; Creswell, 2003; Flick, 2005).

3.4.2.1 Questionários

No âmbito desta investigação foram aplicados aos participantes dois questionários, via Google Forms. Um, designado por questionário inicial, foi aplicado ao encetar o estudo empírico, com o propósito de caracterizar a turma, os alunos e suas perceções relativamente à disciplina de Matemática. Outro, aplicado no final do estudo empírico aos participantes (alunos), visou conhecer a sua opinião relativamente ao contributo do uso do *software* GeoGebra na aprendizagem de tópicos das funções exponencial e logarítmica. É, no sentido de De Ketele e Roegiers (1999), um questionário de inquérito, uma vez que o alvo é uma população e não um indivíduo. Neste caso, a população corresponde à turma envolvida no estudo.

3.4.2.1.1 Questionário inicial

O questionário inicial (anexo 3) foi aplicado à turma na primeira semana de janeiro. Numa fase prévia, o questionário foi analisado pelos professores supervisores que sugeriram alterações pertinentes que o tornaram mais claro e mais dirigido aos seus propósitos. No início do mesmo foi redigida uma declaração de garantia de anonimato e confidencialidade, a que acresceu uma pequena introdução sobre a finalidade do mesmo e um pedido de colaboração. O questionário foi construído para ser respondido num tempo estimado de 15 minutos, sendo constituído predominantemente por questões fechadas e curtas. O objetivo deste questionário era conhecer melhor as características académicas dos alunos da turma, as suas reflexões relativas às disciplinas do seu currículo, sobretudo a Matemática A, o tempo semanal dedicado ao estudo e as suas expectativas quanto ao futuro.

Parte da recolha de informação obtida neste questionário foi triangulada pela análise de informação a que acedemos, na qualidade de diretor de turma, através das plataformas digitais homologadas existentes na escola, designadamente a plataforma Inovar.

3.4.2.1.2 Questionário final

O questionário final (anexo 7) aplicado aos alunos após a concretização das 12 tarefas propostas tinha como propósito facilitar a reflexão acerca da segunda questão orientadora desta investigação – (ii) Qual a visão dos alunos relativamente às aulas de Matemática A, em que usaram as Tecnologias de Informação e Comunicação para promover a sua compreensão sobre funções exponenciais e logarítmicas? Deste modo, o questionário incidiu sobre três componentes, que se complementam nesta investigação: a opinião dos participantes acerca do *software* GeoGebra, a sua opinião relativa ao estudo das funções exponencial e logarítmica em geral e, por fim, o juízo que fizeram do estudo destas funções em contexto de sala de aula recorrendo às TIC.

Realizado na aplicação Google Forms, o questionário era constituído maioritariamente por questões fechadas. Em duas delas optou-se por usar escalas: Likert, numa, e tipo Likert, na outra. Em particular, no término do questionário, optou-se pelo uso de uma escala tipo Likert de 10 pontos, de extremos 1 (valor mínimo) e 10 (valor máximo), para os alunos avaliarem o contributo do GeoGebra na clarificação das dificuldades por eles sentidas na aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas.

O investigador procurou ainda triangular os dados recolhidos no qestionário final com a realização de uma entrevista semiestruturada recorrendo à técnica do grupo focal (entrevista através de *focus group*), usando três grupos de alunos com níveis de aptidão matemática similares.

3.4.2.2 Entrevistas

De acordo com Amado (2014), "a entrevista é um dos mais poderosos meios para se chegar ao entendimento dos seres humanos e para a obtenção de informações nos mais diversos campos" (p. 207). É utilizada na investigação qualitativa para recolher dados descritivos na linguagem do participante, permitindo ao investigador conhecer o modo como aquele interpreta os acontecimentos (Bogdan & Biklen, 1994). Estes autores sustentam ainda que as entrevistas podem ser usadas em conjunto com outras técnicas, nomeadamente a observação participante e a análise de documentos (Bogdan & Biklen, 1994, p. 134).

Uma entrevista pode ser classificada de várias formas: estruturada, semiestruturada e não estruturada (Merriam, 1998, pp. 72-75). Numa entrevista estruturada (ou diretiva) as questões a indagar e a ordem pela qual são feitas são pré-determinadas. Só é permitido ao participante responder dentro de um leque de respostas pré-definidas (Vale, 2004). É um modelo muito rígido que não permite aceder às perspetivas dos interrogados, nem à sua interpretação sobre o assunto a analisar. Em 2011, Coutinho afirmou que "a estrevista estruturada não se costuma utilizar em estudos qualitativos" (p. 291). Numa entrevista semiestruturada ou semidiretiva, há um conjunto inicial de questões que o investigador quer aflorar, mas as respostas são mais abertas e a ordem das questões pode ser alterada. É um misto entre uma entrevista altamente estruturada e um conjunto de questões em que o interrogado é mais livre nas suas respostas; o questionador pode alterar a ordem de algumas questões e introduzir outras que não estavam no plano inicial. Este formato permite ao investigador, em função de algumas respostas que emergem, dirigir a entrevista segundo um ponto de vista que julgue interessante, procurando interpretar novas ideias que os entrevistados sugerem. Por fim, existem as entrevistas não estruturadas (ou não diretivas), em que à partida não estão delineadas perguntas a fazer. Assumem um caráter conversacional e podem ser úteis quando o investigador conhece pouco o fenómeno, estando condicionado na formulação de questões relevantes.

Em 2003, Creswell alegou que "os investigadores qualitativos tendem a usar questões abertas para que os participantes possam expressar os seus pontos de vista" (p. 9). Acresce que o contacto entre entrevistador e entrevistado possibilita que o primeiro possa adaptar as questões e/ou acrescentar novas, sempre que entenda conveniente (Coutinho, 2011, p. 101).

Como se pretende interpretar a forma como os alunos compreendem as funções exponenciais e logarítmicas recorrendo a recursos educativos digitais, optou-se pela entrevista semiestruturada (ou semidiretiva).

A entrevista consistiu num diálogo em que os entrevistados podiam mudar a sequência das questões e em que ao entrevistador era consentido explicar e acrescentar novas questões. Neste estudo empírico foram inquiridos três grupos focais de alunos com o propósito de esclarecer qual a sua visão relativamente às aulas de Matemática A em que se usaram RED para promover compreensão das funções exponenciais e logarítmicas.

3.4.2.2.1 Focus group

Em ciências sociais, a entrevista individual é a forma de entrevista mais utilizada (Bloor et al., 2001, p. 42). Pode, no entanto, ser concebida tendo como alvo um grupo de pessoas, naquilo que a literatura designa por *focus group* (Coutinho, 2011, p. 101). A expressão portuguesa, técnica do grupo focal, é menos apelativa e, talvez por isso, não tenha criado raízes. É uma técnica de recolha de informação que foge do formato da entrevista clássica interrogador/interrogado, configurando mais uma discussão conduzida pelo investigador a um grupo que, na sua dimensão ótima, deve conter entre seis a oito elementos (Bloor et al., 2001; Coutinho, 2011). Esta técnica consiste em envolver o grupo sob o controlo do moderador, que estimulará a interação e assegurará que a discussão não extravase o tema em foco. É no contexto da conversa em grupo que se espera que surjam as informações pretendidas (Amado, 2014, pp. 225-226). O objetivo primordial do moderador não é a obtenção de respostas imediatas, mas sim procurar, através da discussão e numa análise posterior, os significados subliminares das respostas obtidas (Bloor et al., 2001, p.45).

Do ponto de vista de Silva e Fortunato (2021) o *focus group* potencia a obtenção de informações que não poderiam ser recolhidas através do inquérito por entrevista apenas a um inquirido. A interação que se gera no interior do grupo é, portanto, o principal meio e fonte de produção de dados e é a sua principal característica (Amado, 2014, p. 226).

É uma técnica que se pode aplicar em qualquer fase da investigação (Silva & Fortunato, 2021). Quando os *focus group* se situam no final do projeto de investigação, as suas deliberações são por vezes consideradas uma forma de validação (Bloor et al., 2001, p.14). É também de salientar que esta modalidade de entrevista pode ser utilizada em diferentes momentos do processo de investigação e tende a ser utilizada em combinação com outros métodos de recolha de dados, em particular, entrevistas individuais e inquéritos (Silva et al., 2014). Do ponto de vista de Silva et al. (2014), a própria natureza dos *focus group* – uma conversa informal entre pares – pode promover uma propensão natural para que o inquirido não fique silente, revelando informação que de outra forma se perderia (p. 25). "O que é conhecido por todos e o que exige esclarecimentos por parte de outros participantes" (Amado, 2014, p. 227) deve ser um dos objetivos a alcançar ao utilizar este instrumento. Contudo, para Bloor et al. (2001), grupos muito heterogéneos podem gerar conflito e reprimir os pontos de vista de certos indivíduos – os menos assertivos, os menos preparados ou os menos combativos – do painel (p. 20).

Neste sentido, foram formados três grupos de sete/oito alunos da turma, categorizados por percursos classificativos similares na disciplina de Matemática. O método usado para a formação dos grupos teve por base as classificações obtidas pelos alunos no primeiro período letivo, afinado pelo conhecimento que o professor/investigador já detinha das suas capacidades. Esta distribuição dos grupos respeitou o defendido na literatura, no que respeita ao número de elementos que devem compor o grupo e à sua homogeneidade (Bloor et al., 2001; Silva et al., 2014). Foi previamente elaborado um guião contendo tópicos e questões que o entrevistador deveria fazer aos seus interlocutores (anexo 8). As entrevistas tiveram como objetivos:

- ouvir a opinião dos participantes sobre as aulas de Matemática em que foram desenvolvidas as tarefas relativas às funções exponencial e logarítmica;
- identificar quais os aspetos que mais despertaram seu interesse durante o período em que realizaram as doze tarefas propostas;
- conhecer a visão dos alunos relativamente às aulas de Matemática A em que usaram as Tecnologias de Informação e Comunicação para promover a sua compreensão sobre funções exponenciais e logarítmicas.

Estas foram realizadas no dia 20 de abril e tiveram uma duração aproximada de vinte e cinco minutos cada.

3.4.3 Análise documental

A análise documental consiste numa "espécie de análise de conteúdo que incide sobre documentos relativos a um local ou a uma situação, corresponde, do ponto de vista técnico, a uma observação de artefactos escritos" (Lessard-Hébert et al., 2008, p. 143). De acordo com Stake (2016), "recolher dados através do estudo de documentos segue a mesma linha de pensamento que observar ou entrevistar. É preciso termos a mente organizada e, no entanto, aberta a pistas inesperadas" (p. 84).

Nesta investigação, a análise de documentos foi efetuada nas vertentes física e digital. Consultaram-se plataformas informáticas para obter informação sobre alunos e encarregados de educação, cumprindo todos os princípios éticos e profissionais exigidos, assim como diversos documentos estratégicos orientadores da escola, disponíveis no *website* e no servidor da escola. Na vertente física, fez-se a leitura de vários anuários e de uma monografia descritiva da história da escola desde a sua construção, em 1987, até 2017.

3.4.3.1 Produções dos alunos

Para responder às questões de investigação foi mandatório recolher e analisar as produções dos alunos durante o desenvolvimento das atividades. A análise referida consistiu na interpretação das respostas dadas pelos alunos em produtos escritos de natureza diversa, incidindo nas tarefas apresentadas, na avaliação formativa e também na sumativa. A autorreflexão sobre o trabalho desenvolvido, as dificuldades sentidas e a forma de as superar foram objeto de ponderada análise neste estudo empírico.

São sempre documentos importantes para compreender o nível de aquisição de conhecimentos que os alunos adquirem, no caso em estudo, ao usar as RED na aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas. A análise dos registos escritos produzidos pelos alunos nas aulas é mais objetiva, diminuindo interpretações erróneas. É um meio de recolha de dados significativo, uma vez que fornece um *feedback* fiável sobre o grau de mobilização de conhecimentos por parte dos participantes na investigação.

A análise dos trabalhos escritos produzidos pelos alunos durante a concretização das tarefas que lhes foram propostas potenciou a interpretação da última questão – Qual o impacto do uso das tecnologias na aprendizagem dos alunos no estudo da função exponencial e logarítmica? Mais ainda, proporcionou a triangulação com a informação recolhida do questionário final.

Em investigação qualitativa este tipo de análise "é utilizada para triangular os dados obtidos através de uma ou duas outras técnicas" (Lessard-Hébert et al., 2008, p. 144). No caso vertente as produções dos alunos correspondentes à resolução das tarefas propostas também foram trianguladas através da técnica da observação (participante), em que usaram as notas de campo registadas no diário de bordo do investigador.

Nesta investigação, foram recolhidos e analisados documentos relativos ao trabalho dos alunos realizado aquando da realização:

- dos testes;
- das tarefas GeoGebra resolvidas em pares.

3.4.3.2 Testes

Com o intuito de responder, fundamentalmente, à primeira questão de investigação – De que forma pode o *software* de geometria dinâmica GeoGebra contribuir para o ensino das funções exponenciais e logarítmicas? – foram aplicados aos participantes dois testes:

um teste diagnóstico (pré-teste) na véspera de implementação do estudo empírico, na última semana de janeiro, e um segundo teste (pós-teste), na modalidade de aferição de conhecimentos, realizado no final do mês de março (anexos 4 e 5).

Se considerarmos a categorização preconizada por De Ketele e Roegiers (1999), tiveram o sentido de questionários de verificação de conhecimentos, já que o alvo foi cada um dos indivíduos em particular. O propósito da realização destes dois testes foi aferir o grau de progressão do conhecimento dos alunos sobre funções exponenciais e logarítmicas, depois de se recorrer ao ambiente de geometria dinâmica GeoGebra no ensino destas funções. Assim, o pré-teste tinha como objetivo efetuar a diagnose dos conhecimentos dos alunos no que respeita a generalidades sobre funções e o pós-teste avaliar as aprendizagens que, tendo por base os mesmos conteúdos, se centravam mais no atinente a funções exponenciais e logarítmicas lecionadas utilizando RED. Ambos os testes tinham igual número de itens relativos ao estudo das propriedades de funções, com recurso a duas variantes principais: a interpretação da representação gráfica de uma função, por um lado, e o estudo analítico das mesmas, por outro. Também, tinham o mesmo número de itens de construção (com resposta restrita e resposta extensa) e o grau de dificuldade dos mesmos era semelhante.

Os testes incidiram sobre os seguintes conteúdos relativos ao domínio das funções:

- representação tabular de funções;
- domínio e contradomínio de uma função;
- monotonia;
- paridade;
- função inversa e injetividade;
- interseção do gráfico de uma função com os eixos coordenados;
- assíntotas ao gráfico de uma função;
- esboço do gráfico de uma função.

Ambos os testes foram validados pelos professores que supervisionaram esta dissertação. A principal diferença entre os dois testes residiu no seu conteúdo: no pós-teste foram integradas mais questões sobre as funções exponenciais e logarítmicas, estudadas em concomitância com o desenrolar do estudo, ao passo que no pré-teste foram mobilizados conteúdos genéricos sobre funções lecionados até ao momento de realização desse teste. Na realidade, no pré-teste foram apresentadas algumas perguntas sobre funções exponenciais e logarítmicas, de forma implícita.

3.4.3.3 Tarefas GeoGebra resolvidas em pares

Os artefactos elaborados pelos alunos, resultantes do uso dos RED ao longo do trabalho de campo, em particular, as respostas que os pares de alunos apresentaram ao professor no final de cada uma das 12 tarefas, foram alvo de análise, com o intuito de se procurar dar resposta à terceira questão de investigação – Qual o impacto do uso das tecnologias na aprendizagem dos alunos no estudo da função exponencial e logarítmica?

Neste estudo, todas as tarefas foram alicerçadas no ambiente de geometria dinâmica GeoGebra. A tipologia e os conteúdos abordados em cada uma apresentam-se no quadro 1, no qual se enumeram as tarefas em que as díades usaram *applets* GeoGebra desenvolvidas para este fim pelo investigador.

Quadro 1 – Tipologia e conteúdos abordados nas tarefas envolvendo o GeoGebra.

Tarefa	Dia	Duração (minutos)	Conteúdo	Com aplicação GeoGebra?	N.º itens a responder
1	3/fev	25	Número de Neper	Sim	2
2	3/fev	40	Propriedades da função exponencial	Sim	10
3	7/fev	20	Propriedades algébricas da função exponencial	Sim	2
4	7/fev	40	Equações e inequações exponenciais	Não	8
5	7/fev	<15	Limite notável	Sim	3
6	14/fev	[35,50]	Propriedades da função logarítmica	Sim	14
7	14/fev	25	Propriedades algébricas da função logarítmica	Sim	2
8	14/fev	15	Exercícios com logaritmos	Sim	2
9	28/fev	30	Equações e inequações com logaritmos	Não	5
10	10/mar	100	Estudo de funções envolvendo exponenciais	Não	3
11	17/mar	50	Transformações do gráfico da função exponencial	Sim	5
12	17/mar	50	Transformações do gráfico da função logarítmica de base natural	Sim	4

3.4.3.3.1 Tarefa 1: Número de Neper

Na tarefa 1 pretendia-se que os pares conjeturassem os valores dos limites

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n$$
, respetivamente e (número de Neper) e e^k.

Foi entregue aos pares de alunos o guião da atividade, em formato papel, intitulado “Tarefa 1” (anexo 9) e o endereço da aplicação GeoGebra criado pelo investigador, designadamente https://www.geogebra.org/m/h7hjk2jg (figura 3). Usando os seletores da aplicação, pretendia-se que os alunos inferissem os valores dos limites quando n, número natural, toma valores elevados.

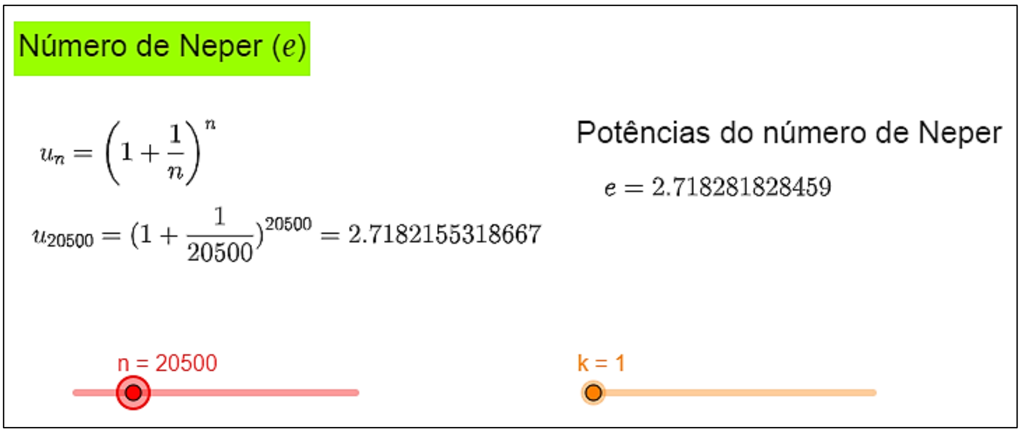


Figura 3 – Aplicação GeoGebra de suporte à tarefa 1.

3.4.3.3.2 Tarefa 2: Propriedades da função exponencial

A tarefa 2 versou sobre generalidades da função exponencial da base a. Aos pares foi entregue um guião (anexo 10) e o endereço através do qual acediam à aplicação criada pelo investigador, www.geogebra.org/m/zzbx4agj (figura 4). Com a realização desta tarefa pretendia-se que, usando os seletores e as caixas de verificação do GeoGebra, os alunos consolidassem os seus conhecimentos sobre a função exponencial de base a (com a a variar entre 0 e 15) no que respeitava à monotonia, representação gráfica e articulação com a respetiva expressão analítica, assíntotas ao gráfico da função, continuidade, injetividade, zeros e sinal.

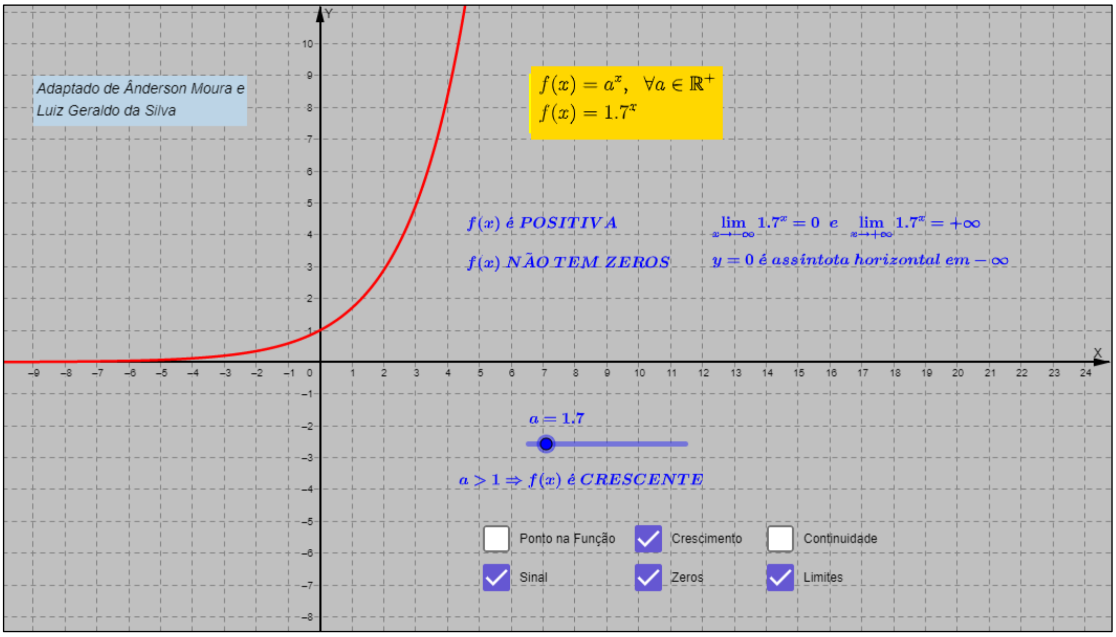


Figura 4 – Aplicação GeoGebra de suporte à tarefa 2.

3.4.3.3.3 Tarefa 3: Propriedades algébricas da função exponencial

À semelhança das duas tarefas anteriores, os pares tiveram acesso ao guião da tarefa 3 (anexo 11) e ao endereço da aplicação criada em GeoGebra (www.geogebra.org/m/x8hjmwme).

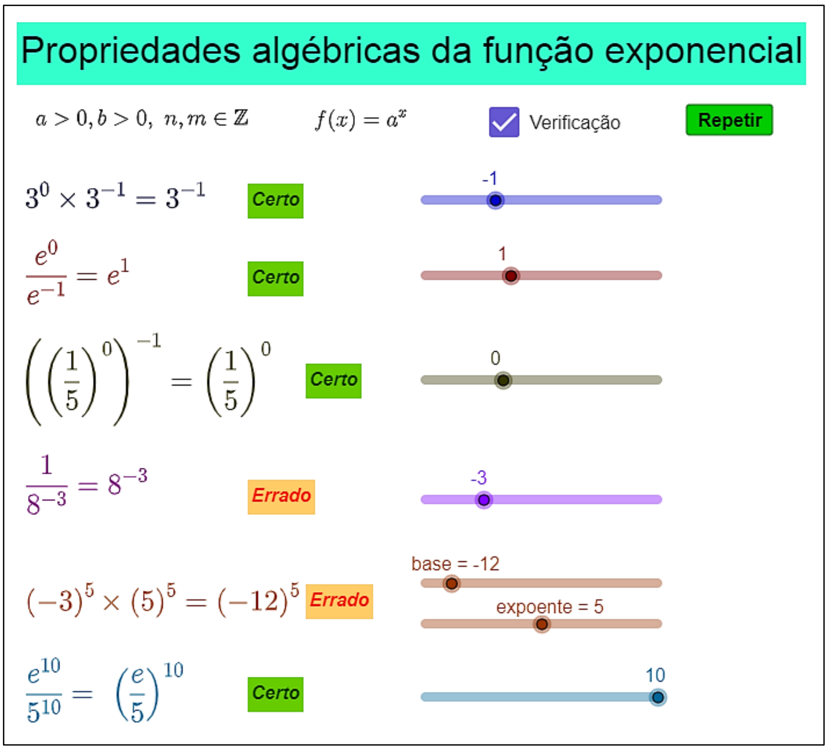


Figura 5 – *Applet* GeoGebra de suporte à tarefa 3.

O objetivo a atingir nesta tarefa consistia em, partindo das propriedades das operações com potências de base racional, já conhecidas dos alunos, fazer a extensão para potências de base irracional, em particular para as de base e. Ao aceder à aplicação era pedido aos pares que encontrassem a resposta correta em cada uma das seis operações solicitadas (figura 5).

Na primeira parte da tarefa, os pares, deslocando os vários seletores apresentados na *applet*[2], escreveriam a propriedade válida das várias operações sobre potências propostas: multiplicação e divisão de potências com a mesma base, multiplicação e divisão de potências com o mesmo expoente, potências de potências e potências de expoente inteiro negativo. No momento em que concluíam a tarefa, poderiam verificar a correção das suas respostas clicando na caixa "Verificação", obtendo assim o necessário *feedback* às suas respostas.

Os pares podiam repetir o processo até consolidar os seus conhecimentos, premindo o botão "Repetir", cujo comando gerava um novo conjunto de expressões.

3.4.3.3.4 Tarefa 4: Equações e inequações exponenciais

Na tarefa 4 pretendia-se que os participantes conseguissem resolver graficamente equações e inequações exponenciais, com recurso ao RED utilizado, seguindo o guião da tarefa (anexo 12) fornecido pelo professor.

A resolução de equações com recurso ao gráfico de funções não era desconhecida da turma. Já tinha sido trabalhada em aula, no décimo primeiro e décimo segundo ano, recorrendo à calculadora gráfica. Os alunos já sabiam, portanto, que o(s) ponto(s) de interseção dos gráficos de duas funções corresponderiam a eventuais soluções da equação. Ou, nalguns casos, fazendo a interseção do gráfico da função com o eixo das abcissas (zeros da função). No caso das inequações esses pontos corresponderão a extremos dos intervalos do conjunto solução da inequação.

[2] Traduzido para aplicação em português.

3.4.3.3.5 Tarefa 5: Limite notável $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

O propósito da tarefa 5 (anexo 13) constava simplesmente em que os pares de alunos se apercebessem do resultado

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 .$$

Para tal, ao aceder à aplicação construída pelo professor, foi solicitado aos pares que movimentassem as setas (▶ e ◀), aproximando-as do eixo das ordenadas, respetivamente por valores inferiores e por valores superiores. Procurou-se, deste modo, que os alunos cimentem a ideia de que os limites laterais da função, quando x tende para 0, são iguais, i.e., que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \text{ (figura 6).}$$

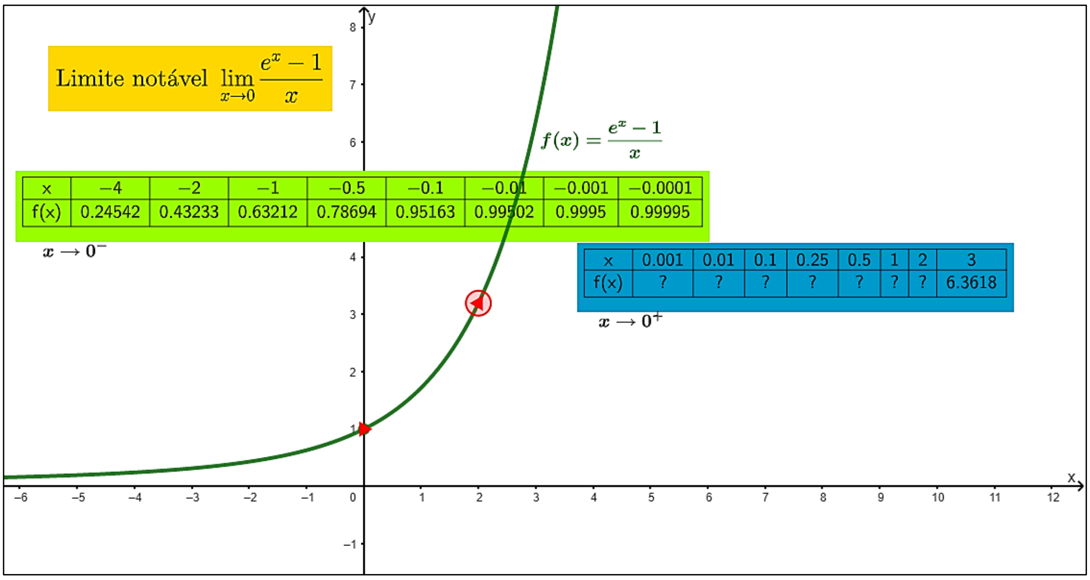


Figura 6 – Aplicação GeoGebra de suporte à tarefa 5.

3.4.3.3.6 Tarefa 6: Propriedades da função logarítmica

O objetivo da tarefa 6 (anexo 14) foi familiarizar os alunos com a representação da função logarítmica de qualquer base positiva e respetiva caracterização, designadamente quanto ao domínio, contradomínio, zeros, injetividade, monotonia, sinal, continuidade e paridade, entre outras características. Aos alunos foi proposto que, na aplicação (figura 7), deslizando o seletor "base", mudassem o valor da base do logaritmo na função (definindo, por exemplo, a função $f(x) = \log_5(x)$). A base podia ser definida dentro do intervalo $[0{,}1; 10]$.

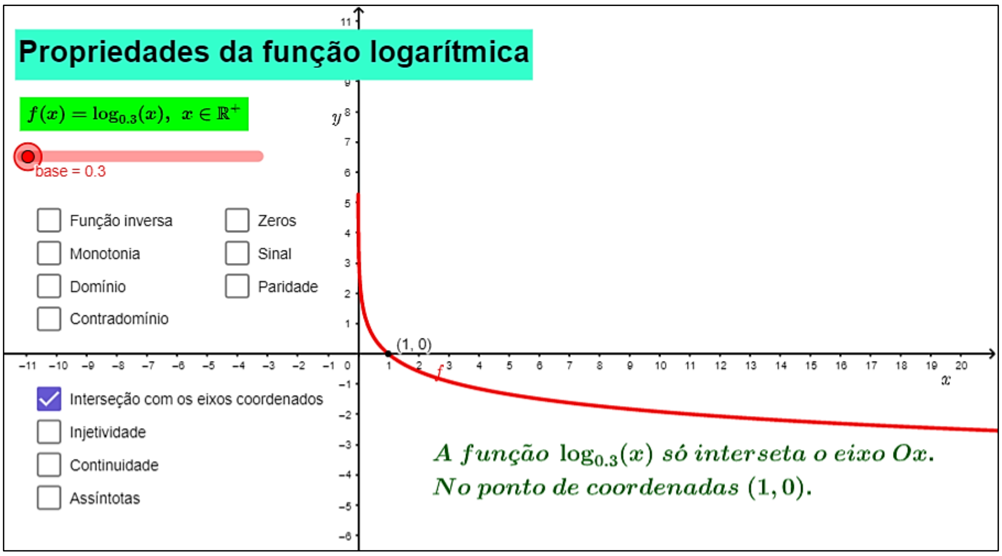


Figura 7 – Aplicação GeoGebra de suporte à tarefa 6.

3.4.3.3.7 Tarefa 7: Propriedades algébricas da função logarítmica

A tarefa 7 (anexo 15), com *layout* semelhante ao da tarefa 3, é mais complexa, já que os alunos estavam incumbidos de conjeturar as propriedades algébricas da função logarítmica, para eles ainda desconhecidas.

Inicialmente os alunos deviam explorar a *applet* (figura 8), através dos vários seletores incluídos, da caixa de verificação e do botão “Repetir”, gerador de novas expressões. Após essa fase os alunos deviam resolver os exercícios do item 1, onde aplicavam as propriedades exploradas. Esse item continha alíneas mais diretas e outras, mais elaboradas, que exigiam seguir uma cadeia de raciocínios. No segundo item, os pares deveriam inferir, à semelhança do que ocorreu na tarefa 3, algumas propriedades algébricas associadas à função logaritmo tais como, por exemplo,

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ com $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $b \neq 1$ ou

$\log_a(x^y) = y \log_a x$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ com $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $y \in \mathbb{R}$.

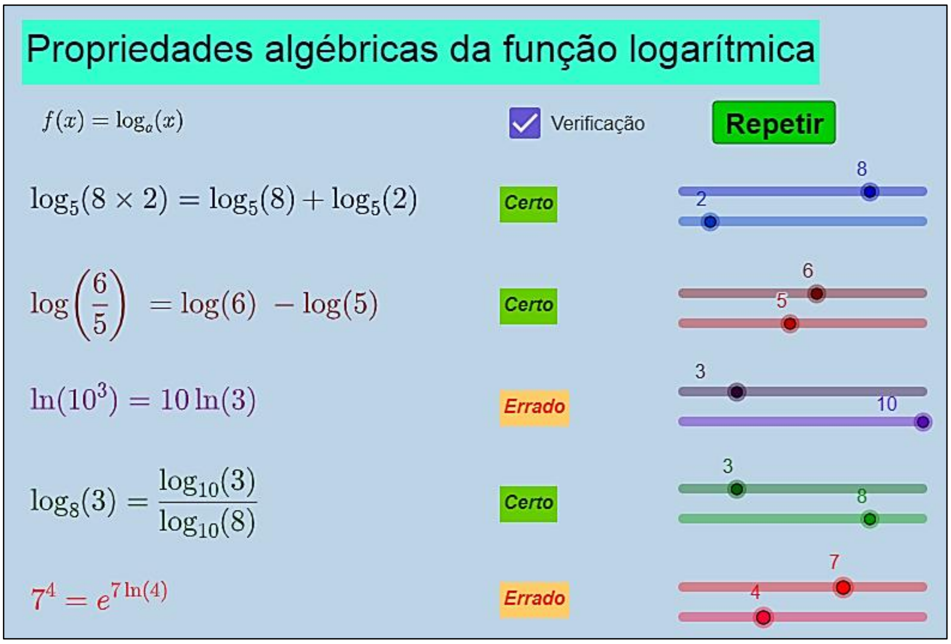


Figura 8 – Aplicação GeoGebra de suporte à tarefa 7.

3.4.3.3.8 Tarefa 8: Exercícios com logaritmos

A tarefa 8 teve como objetivo consolidar os conhecimentos adquiridos durante a aula e expandi-los para expressões numéricas ou algébricas envolvendo logaritmos. Aos pares pedia-se que acedessem à aplicação e introduzissem os valores corretos nas caixas de texto, escrevendo expressões matematicamente válidas. O *feedback* das suas respostas era proporcionado, à semelhança do que já tinham feito nas tarefas 3 e 7 (figura 9). Após a exploração da aplicação GeoGebra, aos grupos era requerido que aplicassem os processos explorados e resolvessem os itens do anexo 16.

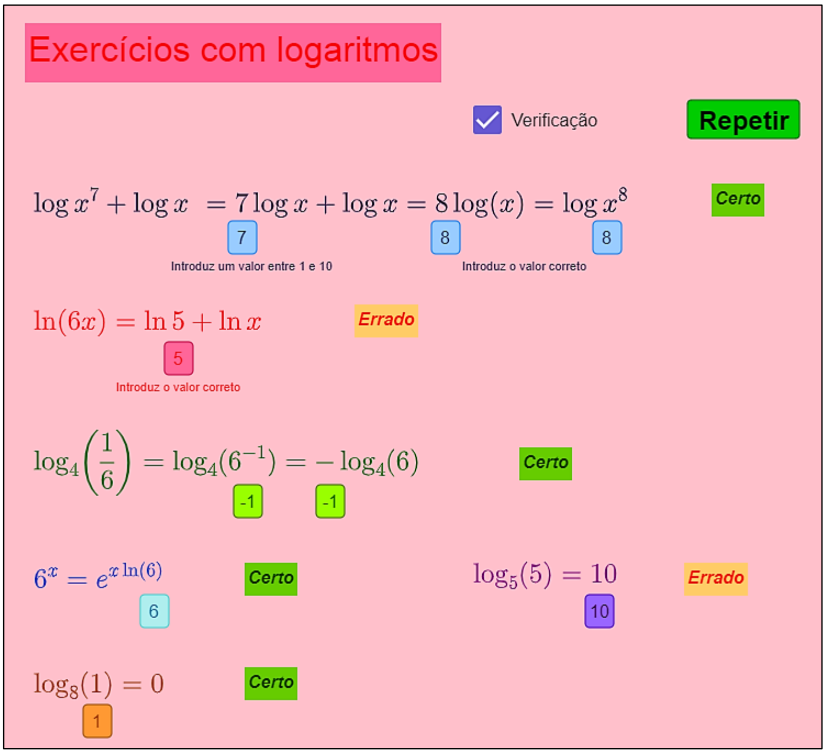


Figura 9 – Aplicação GeoGebra de suporte à tarefa 8.

3.4.3.3.9 Tarefa 9: Equações e inequações com logaritmos

Na tarefa 9 pretendia-se que, recorrendo ao GeoGebra, os alunos fossem capazes de resolver graficamente equações e inequações com logaritmos (anexo 17). Tinha similitudes com a tarefa 4, num processo que já estava consolidado.

A atividade continha cinco questões, distribuídas por três equações e duas equações. Nas quatro primeiras, o guião detalhava a sequência de comandos GeoGebra (figura 10) que permitiam identificar os pontos de interseção dos gráficos das funções cruciais para determinar o conjunto-solução de cada uma delas. A última questão exigia que os pares construíssem, no menu “Álgebra” da aplicação, os comandos necessários para resolver a respetiva inequação.

1 Com recurso ao *GeoGebra* vamos resolver graficamente a equação

$$\log_3(x+2)+\log_3(x-2)=\log_3 5$$

Sigam as seguintes etapas:

1. No menu (Álgebra) digitem o comando $f(x)=\log_3(x+2)+\log_3(x-2)$
   Para inserir o logaritmo de base 3 pode-se escrever log_3.
   Podem, em alternativa, usar a caixa de ferramentas e, na opção f(x), escolher $\log_{\square}$.
2. No menu Álgebra digitem o comando $g(x)=\log_3 5$
3. No menu (Ferramentas) escolham a ferramenta Interseção de Dois Objetos
4. Selecionem os dois elementos desenhados (a curva e a reta)
5. Fica destacado o ponto de interseção dos dois gráficos (ponto A).
   A abcissa do ponto A é a solução da equação. Para obter a abcissa desse ponto introduzam, no menu Álgebra, o comando $x(A)$.

Completem a expressão: $\log_3(x+2)+\log_3(x-2)=\log_3 5 \Leftrightarrow x=\ \ldots\ldots$

Figura 10 – Item 1 da tarefa 9.

3.4.3.3.10 Tarefa 10: Estudo de funções envolvendo exponenciais

A tarefa 10 tinha uma estrutura semelhante à da tarefa anterior, embora se revestisse de uma maior complexidade (anexo 18). Através do recurso ao GeoGebra, utilizando as ferramentas e os comandos incorporados, propunha-se aos pares fazer o estudo de funções, determinando o seu domínio, o contradomínio, os zeros, a interseção com os eixos coordenados, os intervalos de monotonia e os extremos relativos, o sentido das concavidades e os pontos de inflexão e as equações das assíntotas ao respetivo gráfico.

Nesta atividade estudaram-se três funções:

$$f(x)=xe^x \qquad g(x)=\frac{e^x+2}{e^x-1} \qquad h(x)=\log\left(\frac{2x^2}{x+1}\right).$$

Os alunos deveriam ler o guião e, à medida que avançavam na resolução, responder ao solicitado (figura 11).

c) Estudem a monotonia da função. Na resposta, indiquem o(s) intervalo(s) de monotonia e os extremos relativos, caso existam.

5 No menu (Álgebra) digitem o comando **priderf = Derivada(f)**

6 Desativem a função f. Para tal, devem clicar no botão $f(x) = x\,e^x$ do menu Álgebra.

7 Para obter o(s) zero(s) da função derivada escrevam, no menu Álgebra, o comando **Interseção(priderf,EixoX)**

8 Para obter o valor do extremo digitem **ext = y(Extremo(f))**

Completem, agora, a tabela.

x	$-\infty$		
Sinal de f'			
Variação de f			

f é estritamente crescente em .... e estritamente decrescente em ....
.... é .... relativo da função em $x =$ ....

Figura 11 – Item 1c) da tarefa 10.

3.4.3.3.11 Tarefa 11: Transformações do gráfico da função exponencial

Procurava-se, com esta penúltima atividade (tarefa 11), ajudar os alunos a compreender as transformações do gráfico da função exponencial de base e. Esta tarefa tinha também como objetivo ajudar a turma a perceber as implicações que as transformações ao gráfico da função $f(x) = e^x$ provocavam nas características da função, no que respeita ao seu domínio, contradomínio, zeros, coordenadas do ponto de interseção do gráfico com o eixo Oy, injetividade, monotonia, sinal, assíntotas e extremos (figura 12).

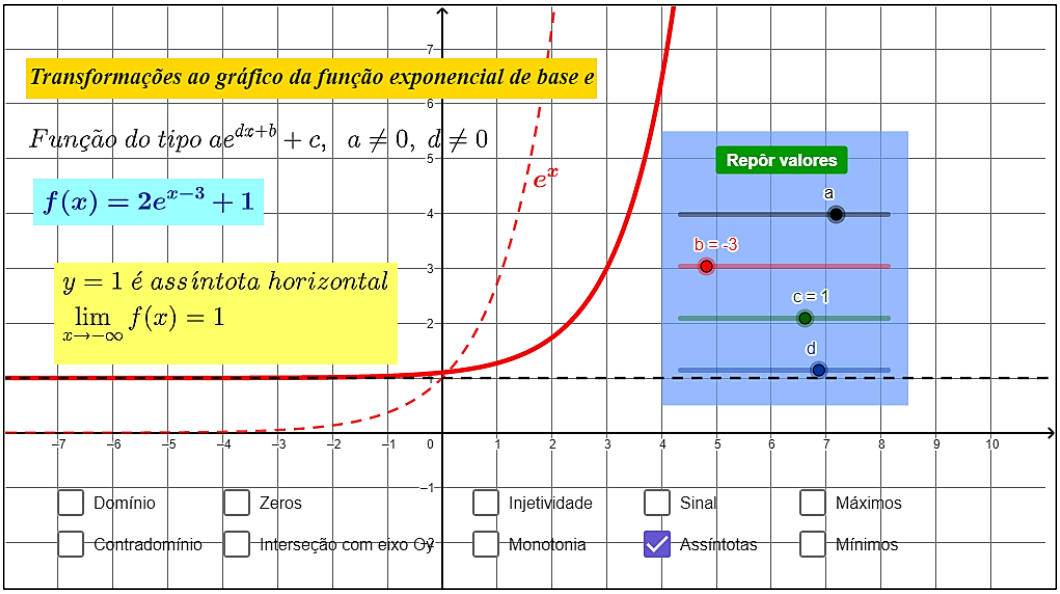


Figura 12 – Aplicação GeoGebra de suporte à tarefa 11.

Deslizando os quatro seletores que se encontram no interior da caixa azul, a expressão analítica da função de tipo $f(x) = ae^{dx+b} + c$, com $a \neq 0$, b, c e $d \neq 0$ reais, variava (anexo 19). Em consequência, uma composição de transformações ao gráfico da função inicial $f(x) = e^x$ é efetuada. Essas transformações, consoante o(s) parâmetro(s) alterado(s), consistiam em translações horizontais e verticais, reflexões sobre os eixos horizontal e vertical, e dilatações e contrações sobre ambos os eixos cartesianos. O uso atento da *applet* permitia aos pares melhorar e consolidar a sua compreensão relativamente a estas transformações geométricas, que são um assunto transversal a todos os anos de escolaridade do ensino secundário.

3.4.3.3.12 Tarefa 12: Transformações do gráfico da função logarítmica de base natural

A tarefa 12 (anexo 20), a menos da função, $f(x) = \ln x$, era muito idêntica à anterior. Como tal, tinha o propósito de estudar as transformações geométricas do gráfico da função logarítmica de base natural. A *applet* (figura 13) era acedida através do endereço www.geogebra.org/m/ws3tzp3y.

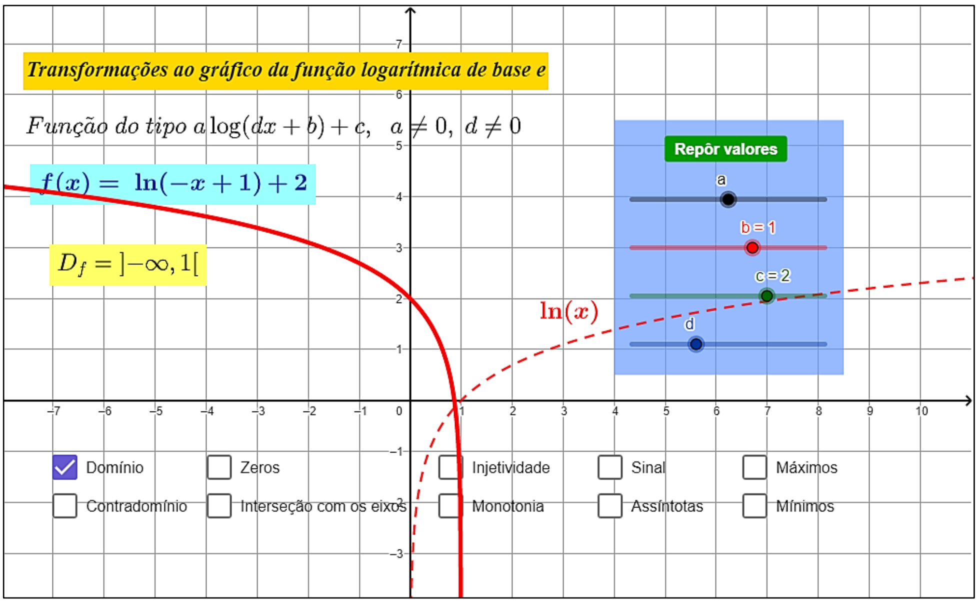


Figura 13 – Aplicação GeoGebra de suporte à tarefa 12.

As transformações ao gráfico da função eram feitas por intermédio dos quatro seletores da caixa azul, tal como na tarefa anterior.

3.5 Descrição da análise de dados

A análise de dados é um processo árduo que "envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspetos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 205). Para estes autores, "Nos estudos qualitativos os investigadores preocupam-se com o rigor e abrangência dos seus dados" (p. 69). Esta "questão da análise de dados é central numa investigação. Não basta recolher dados, é preciso saber analisá-los e interpretá-los (não sendo possível fazer uma coisa sem a outra)" (Amado, 2014, p. 299).

Na análise de dados optou-se pelo modelo proposto por Miles e Huberman (1994), dividido em quatro fases: a recolha dos dados, a redução, a apresentação dos dados e a interpretação/verificação das conclusões (figura 14).

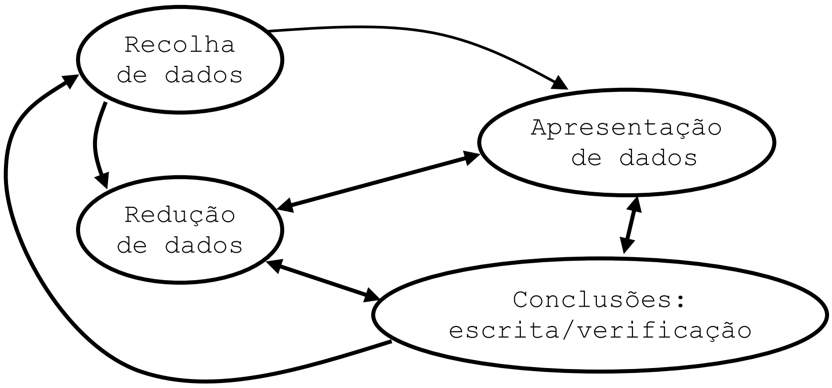


Figura 14 – Componentes da análise de dados: modelo interativo segundo Miles e Huberman (1994, p. 12).

As formas de recolha de dados foram já descritas na secção anterior. O processo de redução dos dados consistirá na seleção, simplificação, abstração e transformação dos dados obtidos através dos instrumentos anteriormente descritos. Essa redução terá por finalidade a extração de conclusões, tendo, porém, o cuidado de não os descontextualizar. Miles e Huberman (1994) sustentam que este processo de redução ocorre logo numa fase muito inicial e que há sempre uma redução antecipatória dos dados, já que as escolhas dos investigadores relativamente ao quadro conceptual, aos casos, às questões de investigação e aos instrumentos de recolha de dados a promovem, ainda que de forma inconsciente. Este processo inicia-se durante o trabalho de campo, e ocorre continuamente até à escrita do relatório final. É um processo contínuo, que só termina com a produção de um relatório final, podendo ser feito em simultâneo com a análise dos dados (Merriam, 1998; Miles & Huberman, 1994). Não é algo separado da análise dos dados, mas parte integrante dessa etapa. De acordo com estes autores a redução de dados é uma forma de análise que afina, ordena, descarta, foca e organiza os dados que possibilita que as conclusões da investigação possam ser desenhadas e escrutinadas. Coutinho (2011) sustenta que "pelo seu caráter aberto e flexível, os planos qualitativos produzem quase sempre uma enorme quantidade de informação descritiva que necessita de ser organizada e reduzida (*data reduction*) por forma a possibilitar a descrição e interpretação do fenómeno em estudo" (p. 192).

Miles e Huberman (1994) argumentam que a apresentação dos dados recorrendo a textos extensos não é eficaz, pois sobrecarregam a capacidade de processamento de informação dos leitores. Esse constrangimento pode ser ultrapassado reduzindo a complexidade por intermédio de tabelas, figuras, matrizes e esquemas conceptuais afins. Essa simplificação visa tornar a informação acessível, de molde que o investigador as possa fluir para a fase seguinte ou efetuar nova redução dos dados. Também neste caso esta fase é considerada integrante da análise dos dados, podendo coexistir com ela.

O processo termina com a escrita e verificação das conclusões associadas, que permitirão a elaboração de afirmações no sentido de responder às questões de investigação. Esta fase pode não representar o culminar do processo, já que as conclusões podem ainda ser verificadas. Um investigador competente mantém espírito de abertura e algum ceticismo, só dando o processo por concluído depois de toda a recolha de dados estar concluída, mesmo quando inferiu as conclusões previamente, no decorrer da investigação (Miles & Huberman, 1994). Pode-se então afirmar que as conclusões vão sendo desenhadas e verificadas enquanto a análise é trabalhada.

Miles e Huberman (1994) esclarecem que o seu modelo é interativo, ou seja, a análise de dados é um processo contínuo e interativo. A redução, apresentação de dados, a escrita/verificação originam muitas vezes novos ciclos à medida que a análise é feita, conforme se mostra na figura 14. É um processo que atualmente não é menos complexo do que aqueles que caracterizam as investigações de cariz quantitativo.

3.6 Tratamento dos dados

Dado o volume de informação recolhida, usando as técnicas e instrumentos já referidos neste capítulo, optou-se pela análise qualitativa e quantitativa dos dados, orientado pela natureza dessa informação, uma vez que a análise de dados consiste em examinar, categorizar, comparar e testar, ou seja, recombinar tanto evidências quantitativas como qualitativas, para responder às questões de investigação (Yin, 2003). Tal corrobora com o que afirma Morse (1994): a "investigação qualitativa pode incorporar métodos quantitativos no seu *design* para responder a questões particulares" (p. 225). Opinião idêntica expressa Yin em 2003. Para o autor, a análise de dados consiste em examinar, categorizar, comparar e testar, ou seja, recombinar tanto evidências quantitativas como qualitativas para responder às questões de investigação (Yin, 2003).

Nesta investigação, assente no paradigma interpretativo, privilegiou-se a investigação de cariz qualitativo. Segundo Creswell (2003), numa investigação de cariz qualitativo, o processo de análise de dados envolve extrair informação de textos e imagens. Este processo "envolve a preparação dos dados para análise, a condução de diferentes análises, mergulhar cada vez mais na compreensão dos dados, representar os dados e interpretar holisticamente o seu significado" (Creswell, 2003, p. 190). Neste contexto, para Rodríguez-Gómez et al. (1999)

> a análise de dados constitui uma das atividades mais complexas e obscuras na investigação qualitativa. A natureza dos dados recolhidos, geralmente registados na forma de textos narrativos ou imagens, e a multiplicidade de informações que suportam fazem com que a análise requeira esforço e certa dose de perícia por parte do investigador. Além do mais, tradicionalmente não existem abundantes pautas ou modelos com que o analista pode contar para guiar a sua tarefa. (p. 197).

Vários autores alertam para a complexidade desta tarefa, uma vez que os dados emanam de formatos diversos (maioritariamente de natureza textual) e para o facto de as fases de recolha e análise de dados qualitativos se afetarem mutuamente (Bogdan & Biklen, 1994; Coutinho, 2011; Morse, 1994; Rodríguez-Gómez et al., 1999; Stake, 2010). Na presente investigação foram analisados os dados de acordo com a sua natureza (quantitativa ou qualitativa), obtidos a partir dos testes, dos dois questionários aplicados e da entrevista final, bem como das observações diretas efetuadas e registadas no diário de bordo. Neste subcapítulo, abordaremos em primeiro lugar os dados qualitativos e só depois os de natureza quantitativa.

Como já atrás se descreveu, no questionário final os participantes foram inquiridos quanto às vantagens do uso do ambiente de geometria dinâmica GeoGebra para a sua aprendizagem de tópicos relacionados com as funções exponenciais e logarítmicas. Como se tratava de uma resposta aberta procedeu-se a uma análise de conteúdo por categorização (Bardin, 2009), a mais antiga das técnicas de análise de conteúdo. A autora esclarece que "as categorias são rúbricas ou classes, as quais reúnem um grupo de elementos … sob um título genérico, agrupamento esse efetuado em razão das características comuns destes elementos" (Bardin, 2009, p. 145). Classificar elementos em categorias implica procurar o que cada um deles tem em comum com os outros (Bardin, 2009). O processo de redução dos dados consistiu na transformação dos dados obtidos no inquérito. A análise dos dados foi efetuada através de um sistema de categorias que emergiu dos próprios dados.

Quadro 2 – Categorias e subcategorias de análise (vantagens e desvantagens do uso do GeoGebra).

Categorias	Subcategorias
Caracterização das tarefas realizadas com recurso ao GeoGebra	Visualização do gráfico das funções
	Transformações do gráfico das funções
	Perceção das propriedades e características das funções
	Precisão nos cálculos
Impacto do uso do GeoGebra na aprendizagem dos alunos	Promoção das aprendizagens
	Consolidação das aprendizagens
	Incremento do interesse
	Desenvolvimento da autonomia
	Maior dinamismo
	Fomento de aptidões tecnológicas

Em particular, tal análise foi efetuada nas questões em que se inquiriu sobre vantagens e eventuais desvantagens do uso do ambiente de geometria dinâmica GeoGebra. Consideraram-se, assim, duas categorias e várias subcategorias (quadro 2).

Relativamente a outra questão aberta do questionário final, “Que dificuldades sentiste na aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas?”, a análise de conteúdo baseou-se em duas categorias e respetivas subcategorias (quadro 3).

Quadro 3 – Categorias e subcategorias de análise (dificuldades na aprendizagem das funções).

Categorias	Subcategorias
Dificuldades no domínio cognitivo	Compreensão
	Aplicação dos conhecimentos adquiridos
	Memorização
Dificuldades específicas relativas à função exponencial e logarítmica	Domínio e contradomínio das funções
	Derivadas
	Limites notáveis
	Comandos do GeoGebra

No término da investigação os participantes foram entrevistados. A entrevista foi realizada na modalidade de *focus group*, dividindo-se a turma em três grupos. A análise das três entrevistas foi feita através de uma análise de conteúdo de tipo categorial, seguindo um critério semântico, ou seja, as categorias são organizadas sob um mesmo tema comum (Bardin, 2009). Rodríguez-Gómez et al. (1999) designam-no por critério temático e sustentam que é o mais interessante e valioso na análise de dados qualitativos.

Para analisar o conteúdo da entrevista consideraram-se, então, quatro categorias, desdobradas nas subcategorias assinaladas no quadro 4.

Quadro 4 – Categorias e subcategorias de análise das entrevistas.

Categorias	Subcategorias
Estudo das funções exponenciais e logarítmicas	Afinidade com a temática Facilidade na compreensão
Impacto das tarefas desenvolvidas em aula	Promovem as aprendizagens Desenvolvem a autonomia Adequação ao trabalho de pares
Impacto do GeoGebra na aprendizagem	Fomenta a compreensão das funções Afinidade com o AGD GeoGebra *versus* modelo tradicional Transformações ao gráfico de funções
Balanço do período em que foi implementada a investigação	Dificuldades de ligação à rede Adequação Diversificação de exercícios Maior frequência no uso de RED

No que respeita às doze tarefas realizadas pelos pares de alunos, a análise efetuada pelo investigador foi descritiva, tendo o investigador destacado os erros mais comuns cometidos pelos alunos, procurando, sempre que possível, interpretá-los no contexto da investigação.

Relativamente às variáveis quantitativas optou-se por apresentar os dados através de tabelas, quadros ou gráficos (circulares, de barras horizontais, verticais ou segmentadas), o que facilita a leitura, interpretação e compreensão dos resultados estudados. Cumulativamente, sempre que se tornou viável, procedeu-se à sua análise descritiva e, quando pertinente, interpretativa.

Quanto aos dados provenientes de questões fechadas dos questionários aplicados aos alunos, a escolha recaiu por um tratamento quantitativo, com recurso a estatística descritiva, optando-se por uma análise de frequências estatísticas.

No tocante aos testes usados nesta investigação, o de diagnose e o de aferição, refira-se que estes foram corrigidos pelo professor/investigador. Relativamente às classificações obtidas pelos alunos da turma nestes testes, a análise desenvolveu-se da seguinte forma:

- consideraram-se as classificações totais obtidas em cada um dos testes e calculou-se a respetiva média aritmética;

- analisou-se o progresso na aprendizagem dos alunos, através dos ganhos ou perdas, brutos e relativos;
- consideraram-se as classificações obtidas, por cada conteúdo referente ao tópico das funções, em ambos os testes e calculou-se a respetiva média aritmética de pontos obtidos.

O ganho ou perda brutos são a diferença entre as classificações obtidas na prova posterior e na prova anterior (D'Hainaut, 1997, p. 143). Estas variáveis, enquanto forma de medir o progresso dos alunos, não são consensuais. De facto, numa prova de 200 pontos, é mais fácil subir de 80 para 100 pontos do que de 170 para 190. Segundo D'Hainaut (1997), "os intervalos da parte superior da escala são "mais difíceis" do que os da parte inferior; este facto é contrário à condição de proporcionalidade entre a medida e a grandeza" (p. 144). Para obviar a essa situação o autor propõe que se utilizem concomitantemente outras medidas: o ganho relativo e a perda relativa.

O ganho relativo, expresso em percentagem, é definido como

$$R = 100 \times \frac{S - A}{T - A} \qquad \text{com } S \geq A$$

em que S representa a classificação da prova posterior, A representa a classificação da prova anterior e T representa o valor máximo comum às duas provas, 20 valores, no nosso caso.

A perda relativa, expressa em percentagem, é definida como

$$P = 100 \times \frac{S - A}{A} \qquad \text{com } S < A \ .$$

De acordo com a literatura, a triangulação de dados proporciona, citando Santos et al. (2020, p. 655), "a apreensão de uma dada realidade sob diversos ângulos, possibilitando o confrontamento de informações, de maneira a minimizar vieses resultantes de uma única perspetiva de análise". Neste sentido, com o recurso aos instrumentos e métodos de recolha de dados suprarreferidos, o investigador, de modo a garantir maior credibilidade, confiança e rigor consentâneos com um estudo académico desta índole, procedeu à triangulação dos dados recolhidos. É de salientar que procurou, desta maneira, fazer uma leitura fidedigna dos dados obtidos.

4 ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS

A análise de dados é central numa investigação pois, segundo Quivy e Campenhoudt (2003, p. 211), "o objetivo da investigação é responder à pergunta de partida". Tendo como propósito dar resposta às questões levantadas, nesta investigação, em concreto, pretende-se compreender como é que os alunos de uma turma do 12.º ano de escolaridade, trabalhando em pequenos grupos e realizando atividades com tarefas de exploração, superam as suas dificuldades na aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas.

Acresce referir que a análise de dados é uma tarefa simultaneamente atrativa e complexa já que, numa investigação qualitativa, os dados apresentam formas diversificadas e é difícil distinguir as fases de análise e recolha de dados (Coutinho, 2011). Para Bogdan e Biklen (1994) a análise de dados é

> o processo de busca e de organização sistemático de transcrição de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspetos importantes e do que deve ser aprendido. (p. 205)

Estes autores recomendam que os investigadores menos experientes executem uma análise mais formal para o final da recolha de dados. Mais ainda, sugerem algum distanciamento temporal, entre as fases de recolha e a análise dos dados. Porém, pode-se realizar alguma análise durante a fase de recolha de dados (Bogdan & Biklen, 1994; Merriam, 1998).

Nesta investigação foi respeitada pelo investigador uma pausa entre a recolha de dados e a sua interpretação, forçada por uma agenda mais apertada no terceiro período letivo, motivada pelo facto de ser professor da turma e de ter um programa extenso a cumprir. Neste capítulo apresentam-se os dados recolhidos durante o estudo empírico, propriamente dito, e interpretam-se os principais resultados obtidos.

O capítulo encontra-se organizado em quatro subcapítulos principais: no primeiro estuda-se a evolução das aprendizagens dos participantes, comparando o seu desempenho no pré-teste e no pós-teste; no segundo analisam-se os trabalhos desenvolvidos pelos pares na consecução das tarefas construídas em GeoGebra pelo investigador, complementando-os com o registado no diário de bordo; o terceiro é baseado na interpretação dos resultados do questionário final; no quarto e último efetua-se a análise do conteúdo da entrevista semiestruturada conduzida na modalidade de *focus group*, que teve como objetivo a triangulação dos dados recolhidos por outros instrumentos.

4.1 Testes (pré e pós-teste)

Os testes foram aplicados em dois momentos distintos, no dia 26 de janeiro de 2023 (pré-teste) e, posteriormente, no dia 27 de março de 2023 (pós-teste), de modo a aferir a evolução do desempenho dos alunos no que respeita às funções exponenciais e logarítmicas.

Os resultados obtidos pelos alunos nos dois testes são apresentados na tabela 6.

Tabela 6 – Resultados do pré-teste e do pós-teste.

Aluno	Pré-teste	Pós-teste	Aluno	Pré-teste	Pós-teste
A1	10,7	Faltou	A11	11,4	17,5
A2	7,6	8,3	A12	9,4	7,7
A3	10,7	17,6	A13	9,5	12,0
A4	8,7	11,3	A14	9,2	10,4
A5	12,9	12,7	A15	9,8	17,7
A6	12,8	16,7	A16	15,4	19,9
A7	10,6	10,7	A17	3,7	3,7
A8	5,5	14,5	A18	10,5	15,2
A9	12,9	19,0	A19	15,1	18,4
A10	Faltou	Faltou	A20	12,0	17,7
			A21	9,3	14,2
			A22	14,4	19,4
			A23	16,1	19,6

Dos 23 alunos da turma, apenas dois não realizaram ambos os testes. Um dos alunos não realizou qualquer dos testes, e outro aluno, tendo realizado o pré-teste, acabou por não realizar o pós-teste, por motivos de saúde. Os valores mínimos mantiveram-se nos 3,7 valores, enquanto os valores máximos, correspondentes ao mesmo aluno (A16), subiram de 15,4 para 19,9 valores. A média das classificações obtidas pelos participantes nos dois testes é 10,8 valores no pré-teste e 14,5 valores no pós-teste, verificando-se um aumento de 3,7 valores.

Da análise aos resultados obtidos nos testes realizados pelos alunos verifica-se que de entre os 21 alunos que realizaram os dois testes, somente dois alunos obtiveram uma classificação inferior no segundo teste, comparativamente com a classificação obtida no pré-teste, ou seja, constata-se que a maioria dos alunos melhorou a sua prestação, após o estudo realizado sobre funções exponenciais e logarítmicas recorrendo a RED. Analisando as respostas dos alunos aos testes, constata-se que os alunos foram capazes de resolver, total ou parcialmente, tarefas ou exercícios para os quais se revelaram incapazes no início do estudo, apesar da estrutura dos testes ser semelhante e ambos incidirem sobre o estudo de funções, e o pós-teste englobar um maior número de questões sobre exponenciais e logaritmos.

Para uma melhor perceção da aprendizagem dos alunos sobre funções exponenciais e logarítmicas procedeu-se a uma análise mais detalhada ao nível de ganhos e perdas. Relativamente ao progresso na aprendizagem dos alunos, foram calculados através dos ganhos brutos ou perdas brutas (tabela 7), para aqueles participantes que efetuaram os dois testes.

Analisando a tabela 7, verifica-se que apenas dois alunos registam perdas, registando-se ainda um aluno que obteve a mesma classificação nos dois momentos descritos. Dezoito alunos melhoraram a sua classificação de um teste para o outro. A média dos ganhos brutos foi de 4,37 valores, ao passo que a média das perdas brutas se cifrou em −0,95 valores. Relativamente às médias dos ganhos relativos do pré-teste para o pós-teste obteve-se um valor de 55,6%. A média das perdas relativas (−9,9%) foi calculada com base em apenas dois valores, pelo que não tem grande significado estatístico, dada a reduzida dimensão da amostra. Pode-se assim deduzir que houve progresso na aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas.

Tabela 7 – Ganhos e perdas brutas e relativas dos momentos de avaliação.

			Ganhos		Perdas	
Aluno	Pré-teste	Pós-teste	Brutos	Relativos (%)	Brutas	Relativas (%)
A2	7,6	8,3	0,7	5,6%	---	---
A3	10,7	17,6	6,9	74,2%	---	---
A4	8,7	11,3	2,6	23,0%	---	---
A5	12,9	12,7	---	---	0,2	–1,6%
A6	12,8	16,7	3,9	54,2%	---	---
A7	10,6	10,7	0,1	1,1%	---	---
A8	5,5	14,5	9,0	62,1%	---	---
A9	12,9	19,0	6,1	85,9%	---	---
A11	11,4	17,5	6,1	70,9%	---	---
A12	9,4	7,7	---	---	1,7	–18,1%
A13	9,5	12,0	2,5	23,8%	---	---
A14	9,2	10,4	1,2	11,1%	---	---
A15	9,8	17,7	7,9	77,5%	---	---
A16	15,4	19,9	4,5	97,8%	---	---
A17	3,7	3,7	---	---	---	---
A18	10,5	15,2	4,7	49,5%	---	---
A19	15,1	18,4	3,3	67,3%	---	---
A20	12,0	17,7	5,7	71,3%	---	---
A21	9,3	14,2	4,9	45,8%	---	---
A22	14,4	19,4	5,0	89,3%	---	---
A23	16,1	19,6	3,5	89,7%	---	---

Procedeu-se, de seguida, a uma análise ao nível dos conteúdos, apresentando-se na tabela 8 os resultados dos alunos por conteúdo inquirido no pré-teste e no pós-teste.

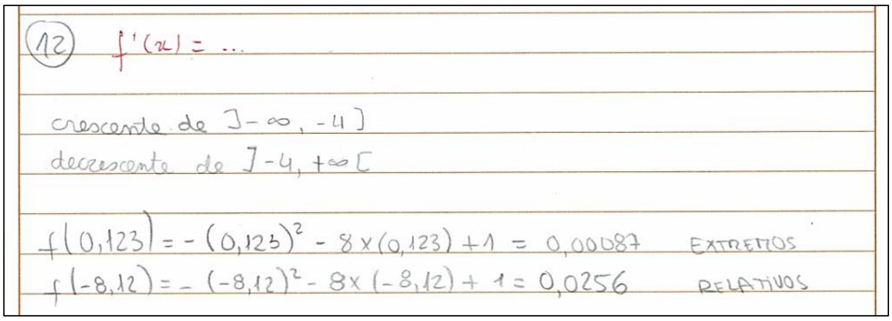
Tabela 8 – Resultados, por conteúdo, do pré-teste e do pós-teste.

Aluno / Conteúdo		A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	Pontos (média)
Representação tabular	*Pré-teste*	8	12	12	11	12	12	11	11	11	Faltou	11	11	11	11	11	11	0	12	11	11	12	12	4	10,36
	Pós-teste	Faltou	11	11	11	11	12	6	11	11	Faltou	11	11	12	11	11	12	2	12	11	12	11	11	11	10,57
Domínio e contradomínio	*Pré-teste*	18,3	2,3	13,2	9,1	15,9	17,3	13,2	12,3	15	Faltou	15,5	11,4	14,1	12,7	15,9	18,2	2,7	11,8	17,7	15,9	11,4	15	18,2	13,50
	Pós-teste	Faltou	8	16,7	11,3	18,7	18,7	12	19,3	19,3	Faltou	16	12,7	18,7	4	18,7	19,3	3,3	11,3	18,7	19,3	13,3	19,3	20	15,17
Monotonia	*Pré-teste*	10	4	7	8	27	36	28	8	8	Faltou	9	15	8	5	5	34	2	19	28	22	9	28	36	16,18
	Pós-teste	Faltou	6,6	33,2	3,8	25,6	34,1	15,2	13,3	28,4	Faltou	25,6	8,5	9,5	7,6	31,3	36	6,6	26,5	31,3	32,2	16,1	35,1	36	22,02
Paridade	*Pré-teste*	32	33	32	28	32	24	18	0	40	Faltou	32	24	33	24	16	40	28	34	32	24	24	32	34	28,00
	Pós-teste	Faltou	27,2	39,2	34,4	13,6	25,6	24,8	28,8	40	Faltou	40	24	30,4	27,2	40	40	0	38,4	40	38,4	33,6	40	40	31,70
Função inversa e injetividade	*Pré-teste*	4	12	9	12	4	4	0	4	12	Faltou	12	12	4	16	16	0	0	0	16	4	16	24	12	8,77
	Pós-teste	Faltou	11,2	24	24	5,6	19,2	5,6	24	24	Faltou	19,2	4	12	19,2	19,2	24	12	12	19,2	12,8	19,2	21,6	24	16,95
Interseção com os eixos	*Pré-teste*	10	6	8	7	7	0	9	9	6	Faltou	8	0	5	5	8	15	8	5	10	10	0	10	20	7,55
	Pós-teste	Faltou	8	20	0	14	18	20	16	20	Faltou	20	6	3	8	14	20	10	20	20	20	20	20	20	15,10
Assíntotas	*Pré-teste*	0	13	0	8	13	10	13	8	0	Faltou	13	8	0	5	16	20	8	16	8	20	10	5	20	9,73
	Pós-teste	Faltou	8	20	0	15	20	10	20	20	Faltou	20	0	0	5	20	20	5	20	20	20	0	20	20	13,48
Esboço do gráfico	*Pré-teste*	9	3	6	0	9	7	0	0	9	Faltou	3	0	3	3	6	7	0	3	6	9	0	7	9	4,50
	Pós-teste	Faltou	8,9	5,3	1,8	14,2	12,4	15,1	4,4	16	Faltou	5,1	0	12,4	8,9	8,9	16	1,8	8,9	14,2	16	15,1	16	15,1	10,31

Da análise da tabela 8 verifica-se que a turma progrediu em todos os conteúdos constantes na prova, com particular destaque no estudo da monotonia de uma função, da função inversa, no cálculo das coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados, no cálculo de assíntotas ao gráfico da função e no esboço ao gráfico da função.

A título de exemplo, apresentam-se as respostas do aluno A20 nos dois momentos de avaliação (figura 15), no que concerne ao estudo da monotonia, cuja questão consistia em determinar os intervalos de monotonia das funções $f(x) = -x^2 - 8x + 1$, no teste diagnóstico, e $f(x) = \ln(x+2) - x$, no pós-teste, e identificasse os extremos relativos e absolutos da função, caso existissem.

Pré-teste



12 $f'(x) = \ldots$

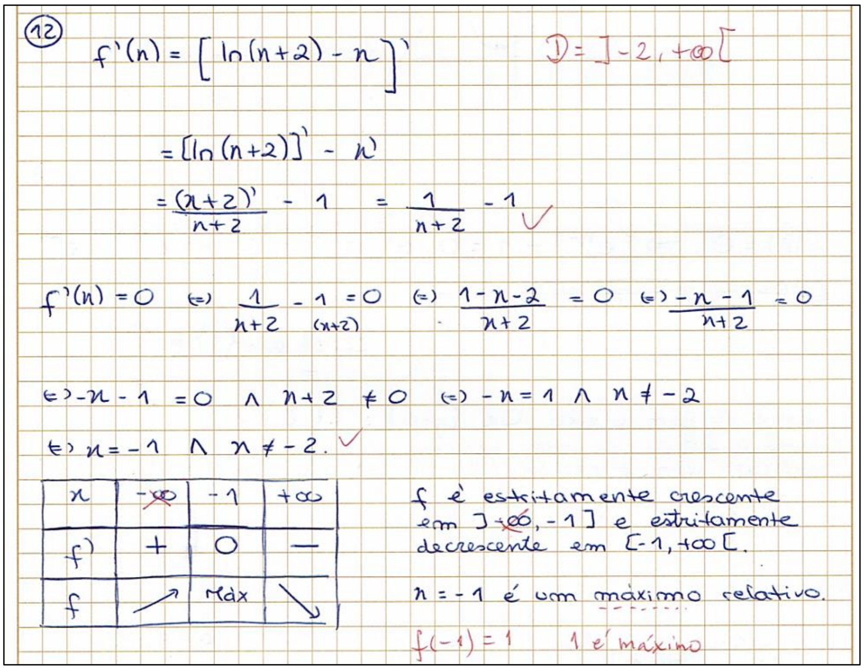
crescente de $]-\infty, -4]$

decrescente de $]-4, +\infty[$

$f(0{,}123) = -(0{,}123)^2 - 8 \times (0{,}123) + 1 = 0{,}00087$ EXTREMOS

$f(-8{,}12) = -(-8{,}12)^2 - 8 \times (-8{,}12) + 1 = 0{,}0256$ RELATIVOS

Pós-teste



12 $f'(x) = [\ln(x+2) - x]'$ $D =]-2, +\infty[$

$= [\ln(x+2)]' - x'$

$= \frac{(x+2)'}{x+2} - 1 = \frac{1}{x+2} - 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} - \underset{(x+2)}{1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x-2}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x-1}{x+2} = 0$

$\Leftrightarrow -x - 1 = 0 \wedge x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow -x = 1 \wedge x \neq -2$

$\Leftrightarrow x = -1 \wedge x \neq -2.$

x	$\cancel{-\infty}$	-1	$+\infty$
f'	+	0	−
f	↗	Max	↘

f é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e estritamente decrescente em $[-1, +\infty[$.

$x = -1$ é um máximo relativo.

$f(-1) = 1$ 1 é máximo

Figura 15 – Resposta do aluno A20 à questão 12 do pré-teste (em cima) e do pós-teste (em baixo).

Note-se que, apesar da função pedida no pós-teste ter maior grau de complexidade, o desempenho do aluno, ainda assim, é muito melhor. Consegue aperceber-se que o cálculo da derivada da função e o estudo dos sinais dessa função derivada é fundamental para responder corretamente ao pedido, o que configura um aumento assinalável do seu conhecimento.

Em suma, a análise aos testes elaborados (pré-teste e pós-teste) pelos alunos leva-nos a considerar que os ambientes de geometria dinâmica como o GeoGebra, integrantes de funcionalidades avançadas relativas às funções, poderão potenciar o ensino e a aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas, em particular no que concerne ao estudo das características a elas associadas.

4.2 Tarefas

As 12 tarefas foram aplicadas na sala de aula habitual da turma, num total de 6 aulas. O investigador optou, para a resolução das tarefas, pelo trabalho de pares, tendo em consideração que ”as díades [pares] nas quais existe algum tipo de interação e com o mesmo nível inicial são as que mais favorecem a co-construção das soluções” (Ponte et al., 1998, p. 194) e que os alunos, no questionário inicial, não manifestaram preferência vincada quanto à forma preferida de trabalhar o desenvolvimento das tarefas: individualmente, a pares ou em grupo. Sendo os participantes neste estudo colegas de turma com um percurso comum de 3 anos, as afinidades estavam consolidadas e, por conseguinte, os grupos foram naturalmente formados. Em cada grupo existia pelo menos um computador portátil.

De seguida apresentam-se os desempenhos das duplas nas tarefas concretizadas, transcrevendo-se também alguns registos que o investigador apontou no seu diário de bordo.

4.2.1 Tarefa 1: Número de Neper

Às 8h15m era habitual, na escola, haver dificuldades de ligação à *internet*, o que atrasou a conclusão do trabalho de alguns pares. A tarefa teve uma duração média de 25 minutos. Deslocando o seletor da aplicação para o seu valor máximo ($n = 100000$), muitos pares consideraram que o termo de ordem 100000 da sucessão (u_n) "é quase igual" (aluno A20) a e, que constituía o pretendido. Assistiu-se a uma colaboração efetiva intra e interpares, com destaque para o grupo constituído pelo aluno A6 e pelo colega peruano que, não estando inscrito à disciplina, assistia às aulas. Como o aluno peruano era recém-chegado ao país e não dominava a língua portuguesa, a comunicação era feita em castelhano.

O investigador analisou e corrigiu as respostas dos pares, dando *feedback* aos pares numa aula posterior (figura 16).

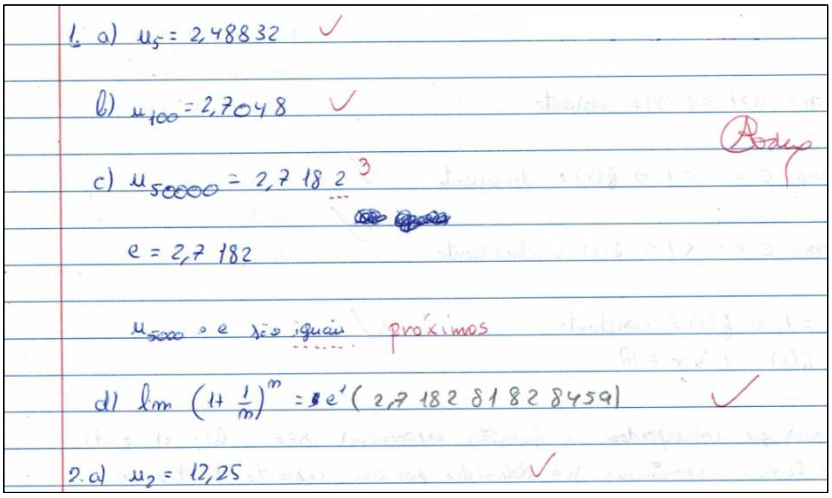


Figura 16 – Correção da tarefa 1 (*feedback*).

As respostas dadas pelos alunos foram muito satisfatórias, assinalando-se apenas alguns arredondamentos numéricos mal feitos (tabela 9).

Tabela 9 – Análise ao desempenho dos pares na tarefa 1.

Pares	Descrição
P1	Todos os itens estavam certos.
P2	Quase tudo certo. Item 2c) errado.
P3	Quase tudo certo. Item 1c) com número mal aproximado.
P4	Todos os itens estavam certos.
P5	Quase tudo certo. Itens 1a) e c) com números mal aproximados.
P6	Quase tudo certo. Erro no item 2e).
P7	Erro na 1d), 2d) e mau arredondamento em 2c).
P8	Quase tudo certo. Itens 1b) e 2b) com números mal aproximados.
P9	Todos os itens estavam certos.
P10	Quase tudo certo. Itens 1c) e 2c) com números mal aproximados.
P11	Quase tudo certo. Itens 1b) e 2b) com números mal aproximados.

Os objetivos propostos para esta tarefa foram atingidos, tendo a mesma sido executada sem dificuldade.

4.2.2 Tarefa 2: Propriedades da função exponencial

Durante a execução da tarefa algumas duplas usaram a calculadora gráfica para complementar o estudo e verificar os resultados entretanto obtidos. Denotou-se empenho na realização das tarefas e uma boa interação entre os elementos dos grupos e, pontualmente, com elementos externos aos grupos inicialmente formados, dadas as dinâmicas da aula. Constatou-se também, na parte final da tarefa, o cansaço de alguns alunos, manifestado pelo desinvestimento desses membros do par na finalização da tarefa.

Esta tarefa 2 contemplava 10 itens (anexo 10). A prestação das díades, na resolução da tarefa, foi boa, evidenciando algumas falhas comuns: na perceção que a função $f(x) = 1^x$ não é função exponencial, no estabelecimento da correspondência entre o gráfico da função e respetiva expressão analítica e na comunicação matemática (tabela 10).

Tabela 10 – Análise do desempenho dos pares na tarefa 2.

Pares	Descrição
P1	Todos os itens estavam certos. Falta de indicação dos infinitos nas assíntotas horizontais.
P2	Quase tudo certo. Indicação errada de que a função $f(x) = 1^x$ é exponencial.
P3	Quase tudo certo. Indicação errada de que a função $f(x) = 1^x$ é exponencial e falta de indicação dos infinitos nas assíntotas horizontais.
P4	Todos os itens estavam certos.
P5	Erro nos itens 1c) e 4. Indicação errada de que a função $f(x) = 1^x$ é exponencial.
P6	Não justificaram o item 1, conforme pedido. Indicação errada de que a função $f(x) = 1^x$ é exponencial.
P7	Alguns erros: itens 2d), 7c), 10a) e 10b). Indicação errada de que a função $f(x) = 1^x$ é exponencial.
P8	Quase tudo certo. Erro no item 2d) e indicação errada de que a função $f(x) = 1^x$ é exponencial.
P9	Quase tudo certo. Erro no item 4 e falta de indicação dos infinitos nas assíntotas horizontais.
P10	Quase tudo certo. Erro no item 4.
P11	Tudo certo.

O trabalho desenvolvido pelos pares foi globalmente satisfatório, com exceção do par P7, cujo desempenho foi mediano.

4.2.3 Tarefa 3: Propriedades algébricas da função exponencial

À semelhança das duas tarefas anteriores, as duplas tiveram acesso ao guião da tarefa e ao endereço da aplicação criada em GeoGebra. Na segunda parte da tarefa, após a experiência adquirida com o uso do GeoGebra, procurava-se que os alunos inferissem as propriedades algébricas da função exponencial como ilustrado, a título de exemplo na figura 17.

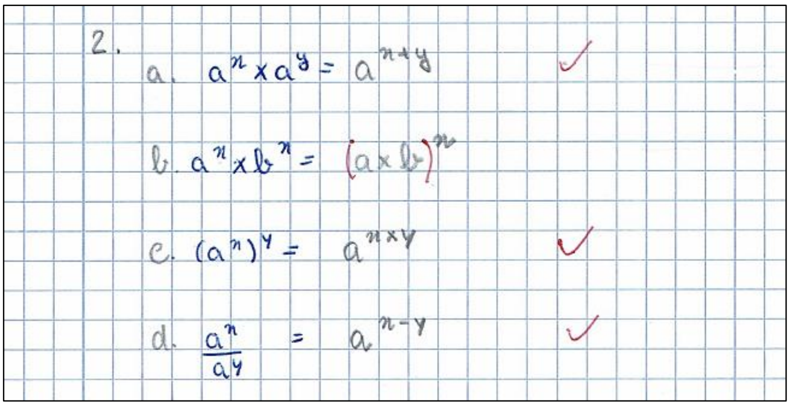


Figura 17 – Resposta da tarefa 3 (Par P2).

No decorrer da resolução desta atividade, o par P8 pediu ao professor esclarecimentos sobre o propósito da caixa de verificação e do botão de repetição. Saliente-se, também, que alguns pares revelaram dificuldades na compreensão das potências de expoente negativo. Todavia, a tarefa foi fácil de completar, depois de terem percebido o modo de funcionamento da aplicação. De um total de 22 itens constantes da tarefa, os participantes neste estudo empírico falharam em muito poucos (tabela 11).

Do desempenho dos alunos, constatou-se que os propósitos desta tarefa foram atingidos, tendo a generalidade dos alunos identificado as propriedades apresentadas. As exceções foram os pares P3 e P6.

Tabela 11 – Análise do desempenho dos pares na tarefa 3.

Pares	Descrição
P1	Tudo certo.
P2	Tudo certo.
P3	Bastantes erros: itens 1k), 1m) e 1n). Falhas na simbologia matemática: falta de parêntesis na base das potências nos itens 1c), 1i) e 2b).
P4	Quase tudo certo. Falhas na simbologia matemática: falta de parêntesis na base das potências nos itens 1n) e 2b).
P5	Erro no item 1o). Falta de parêntesis na base da potência no item 1g).
P6	Bastantes erros: 1c), 1i), 1m) e 1n). Falhas na simbologia matemática: falta de parêntesis na base das potências no item 1i).
P7	Erro no item 1p). Falta de parêntesis na base da potência nos itens 1i) e 1g).
P8	Erro no item 1e). Falta de parêntesis na base da potência nos itens 1c), 1i), 1m), 1n) e 2b).
P9	Erro nos itens 1n) e 1p). Falta de parêntesis na base da potência no item 1m).
P10	Quase tudo certo. Falhas na simbologia matemática: falta de parêntesis na base das potências nos itens 1i) e 1n).
P11	Quase tudo certo. Falhas na simbologia matemática: falta de parêntesis na base das potências nos itens 1i) e 1n).

4.2.4 Tarefa 4: Equações e inequações exponenciais

A tarefa 4 consistiu em resolver graficamente equações e inequações exponenciais, com recurso ao RED utilizado, tendo sido executada em cerca de 40 minutos.

Nessa aula foi pedido aos pares que abrissem o *software* GeoGebra e seguissem o guião da tarefa fornecido pelo professor. Apesar do conhecerem o *software*, os alunos não estavam muito familiarizados com o seu conjunto de comandos. Houve, por isso, maior solicitação do professor na fase inicial de resolução da atividade. No entanto, enquanto nativos digitais e já com alguma experiência de programação adquirida na disciplina de Aplicações Informáticas B, constante no seu currículo no presente ano letivo, essas dificuldades foram ultrapassadas de forma natural.

A resolução de equações com recurso ao gráfico de funções não era desconhecida da turma. Já tinha sido trabalhada em aula, no décimo primeiro ano de escolaridade, recorrendo à calculadora gráfica. Os alunos já sabiam, portanto, que o(s) ponto(s) de interseção dos gráficos de duas funções corresponderiam a eventuais soluções da equação. Ou, nalguns casos, fazendo a interseção do gráfico da função com o eixo das abcissas (zeros da função). No caso das inequações corresponderão a extremos dos intervalos do conjunto solução da inequação.

Tabela 12 – Análise do desempenho dos pares na tarefa 4.

Pares	Descrição
P1	Tudo certo.
P2	Quase tudo certo. Falta um dos intervalos no item 8.
P3	Item 1 errado. Lacunas no item 7 (uso errado da simbologia matemática: conjunção em vez de reunião) e falta de um dos intervalos no item 8.
P4	Alguns erros. Item 5 (uma das duas soluções erradas), item 6 (intervalo aberto em vez de fechado), item 7 (uso errado do símbolo de conjunção em vez do símbolo de reunião) e item 8 (falta um dos dois intervalos).
P5	Poucos erros. Item 7 (uso errado do símbolo de conjunção em vez do símbolo de reunião), item 8 (falta um dos dois intervalos).
P6	Item 6 errado. Falhas nos itens 3 (1,3 em vez do valor exato quatro terços) e 7 e 8 (uso do intervalo complementar em relação ao correto).
P7	Item 2 errado. Falha no item 5 (falta uma solução) e no 8 (falta um dos dois intervalos).
P8	Vários erros: nos itens 2 e 3. Falhas nos itens 6 e 7 (uso do intervalo complementar em relação ao requerido) e item 8 (falta um dos dois intervalos).
P9	Lacunas nos itens 6 e 8 (uso de intervalo aberto em vez de fechado) e no item 7 (uso do intervalo complementar em relação ao correto).
P10	Falha no item 5 (uso incorreto de simbologia: conjunção em vez de disjunção) e no item 6 (0,6 em vez de dois terços). O par não resolveu os itens 7 e 8.
P11	Quase tudo certo. Gralha no item 6 (intervalo aberto em vez de fechado) e lacuna no item 8 (falta um dos dois intervalos).

Corrigidas *a posteriori* as respostas dos pares, verifica-se que foi na resolução gráfica de inequações que se detetaram mais lacunas. A resolução de equações foi pacífica. Outra dificuldade que o professor registou no seu diário de bordo foi a falta do sentido de número de alguns grupos, quando o *software* apresenta, por limitações a si inerentes, valores aproximados em vez de valores exatos. A título exemplificativo, houve alunos não entenderam 1,33333 como a fração quatro terços ou 0,999999 como representação da unidade. Houve também erros de simbologia matemática significativos nas operações com condições e nas operações sobre conjuntos, o que resulta de deficiente mobilização de conhecimentos anteriores, não relacionados com o tema desta investigação. A tarefa incluía 8 itens e a análise do desempenho da turma é apresentada a seguir (tabela 12).

Foi possível constatar que as díades resolveram com dificuldade os itens 7 e 8, registando-se, de igual modo, incorreções menos graves nos itens 5 e 6. Tal facto leva-nos a afirmar que a turma resolveu graficamente as equações exponenciais com acerto, denotando mais desacerto na resolução gráfica de inequações.

4.2.5 Tarefa 5: Limite notável $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

A tarefa 5, consistiu em responder a 3 itens, com o objetivo de os pares se apercebessem que

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\,.$$

O desempenho dos alunos foi muito bom, como se pode atestar na tabela 13.

Tabela 13 – Análise do desempenho dos pares na tarefa 5

Pares	Descrição
P1	Tudo certo.
P2	Tudo certo.
P3	Tudo certo.
P4	Tudo certo.
P5	Tudo certo.
P6	Tudo certo.
P7	Tudo certo.
P8	Tudo certo.
P9	Tudo certo.
P10	Erro em 2 de 3 itens: no item 1 e no item 3.
P11	Tudo certo.

Este bom desempenho era expectável à partida, dada a simplicidade do exercício.

4.2.6 Tarefa 6: Propriedades da função logarítmica

Após iniciarem a tarefa proposta, o aluno A18 pediu que fosse integrada a grelha quadriculada no aplicativo para melhor identificar as coordenadas dos pontos do gráfico da função, o que foi prontamente acedido. Durante a resolução da tarefa, registaram-se algumas dificuldades no que se refere ao estudo da monotonia da função, nas transformações ao gráfico da função e na identificação das assíntotas (tabela 14). Uma análise mais completa das respostas é apresentada abaixo.

Tabela 14 – Análise do desempenho dos pares na tarefa 6.

Pares	Descrição
P1	Quase tudo certo. Má indicação dos zeros da função no item 4. Gralha no item 11a), referente à continuidade.
P2	Quase tudo certo. Erro no item 3b), transformações, e no 7, relativo à função inversa.
P3	Quase tudo certo. Não responderam ao item 7 (gráfico da função inversa).
P4	Quase tudo certo. Não justificam o primeiro item. Erros nos itens 3b) e 8.
P5	Muitos erros. Item 1 sem justificação. Itens errados: 3b), 4b), 10 e 11. Itens 6 (contradomínio) e 13 (interseção com os eixos coordenados) incompletos.
P6	Alguns erros: Item 1 mal justificado, erros nos itens: 3b), 4b), 10b) e 12c).
P7	Poucos erros. Item 1b) mal justificado, 3b) errado e 10b) não respondido.
P8	Quase tudo certo. Item 1 mal justificado e erro no item 10b).
P9	Alguns erros. Lacuna no item 1, mal justificado. Erros nos itens 3, 10b) e 13c).
P10	Muitos erros. Lacuna no item 1, mal justificado. Erros nos itens 3, 8, 10b) e 10c).
P11	Quase tudo certo. Item 1b) mal justificado e erro na 3b), correspondente à transformação do gráfico de uma função.

As falhas identificadas nos itens relacionados com a transformação ao gráfico da função pode explicar-se por alguma falta de pré-requisitos e pela não conexão com conteúdos já lecionados.

4.2.7 Tarefa 7: Propriedades algébricas da função logarítmica

Verificadas as respostas dos pares, constata-se que no item 2 a prestação foi muito boa, i. e., quase todos os alunos conseguiram inferir corretamente as propriedades indicadas. A título ilustrativo apresenta-se uma das respostas (figura 18).

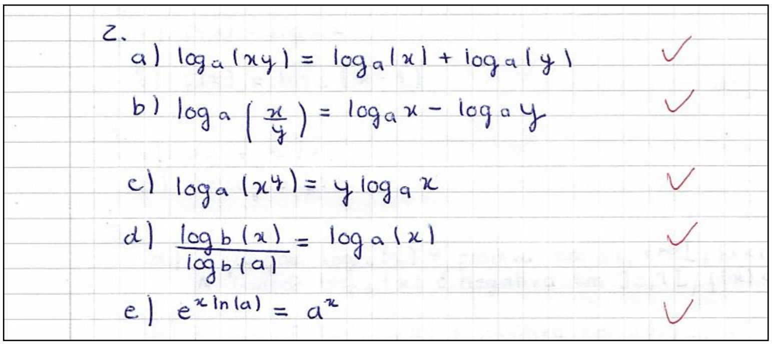


Figura 18 – Resposta da dupla P8 à questão 2 da tarefa 7.

No item 1, algumas respostas estavam incompletas, o que de certa forma é natural, pois havia propriedades ainda não lecionadas, entre as quais,

$\log_4 4 = 1$ ou $\ln e = 1$ (figura 19).

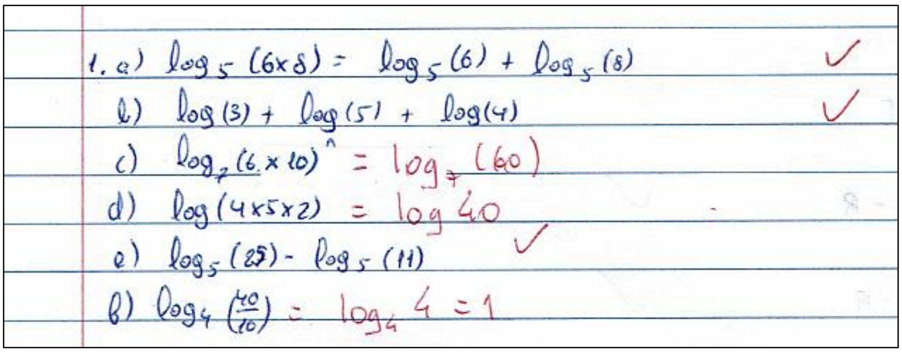


Figura 19 – Resposta do par P3 à questão 1 da tarefa 7.

Na tabela 15 apresenta-se uma análise às respostas dos pares, na qual se constata que globalmente o trabalho dos pares nesta tarefa foi bom.

Tabela 15 – Análise do desempenho dos pares na tarefa 7.

Pares	Descrição
P1	Quase tudo certo. Itens 1f), 1g) 1h) e 1l) incompletos.
P2	Poucos erros. Erro no item 1k) e item 1g) por fazer. Os itens 1c), 1d), 1f), 1h) e 1l) apresentavam-se incompletos.
P3	Nenhum item errado, mas muitos itens estão incompletos: 1c), 1d), 1f), 1g), 1h), 1k) e 1l).
P4	Erro no item 1k). Itens 1c) 1d), 1f), 1g) e 1h) incompletos.
P5	Quase tudo certo. Itens incompletos: 1f), 1h) e 1l).
P6	Alguns erros: Itens 1g) e 1n). Incompletude nos itens: 1c), 1d), 1f), 1h), 1k) e 1l).
P7	Erro em 2b), logaritmo da diferença. Incompletude nos itens: 1c), 1d), 1f), 1g), 1h), 1k) e 1l).
P8	Nenhum item errado, mas sete itens estão incompletos: 1c), 1d), 1f), 1g), 1h), 1k) e 1l).
P9	Alguns erros: Itens 1k) e 1l). Incompletude nos itens: 1c), 1d), 1f), 1g) e 1h).
P10	Muitos erros. Erros nos itens 1h) e 2c). Deixaram em branco os itens 1g), 1i), 1j), 1k) e 1l). Itens 1c), 1d) e 1f) incompletos.
P11	Nenhum item errado, mas sete itens estão incompletos: 1c), 1d), 1f), 1g), 1h), 1k) e 1l).

Da execução desta tarefa extraíram-se duas conclusões: um) a necessidade de reforçar em aula as propriedades algébricas dos logaritmos com exercícios práticos; dois) as propriedades a aplicar na resolução desses exercícios estavam assimiladas, o que se podia inferir pelo facto do item 2 ter sido corretamente executado pelos grupos.

4.2.8 Tarefa 8: Exercícios com logaritmos

Por questões de agenda, relacionadas com o obrigatório cumprimento da planificação da disciplina no 12.º ano, decidiu-se avançar para a tarefa 8 também no dia 14 de fevereiro, após a conclusão das duas tarefas anteriores. Com duas sessões de 50 minutos cada nesse dia, afigurava-se possível a concretização das três tarefas. Para mais, atendendo à curta extensão desta tarefa. As habituais falhas na ligação à rede no início da manhã atrasaram o começo do trabalho dos pares, o que se propagou negativamente para as tarefas seguintes. Por isso, nem todos os grupos concluíram esta tarefa nesse dia, tendo alguns entregado a folha de respostas na aula seguinte.

A tarefa foi feita de forma apressada e enquanto observador/participante o professor não conseguiu atender da melhor forma aos pares. A opção por introduzir esta tarefa no final da aula foi ambiciosa e revelou-se errada. Apesar disso, alguns pares conseguiram concluir a tarefa com sucesso relativo (tabela 16).

Tabela 16 – Análise do desempenho dos pares na tarefa 8.

Pares	Descrição
P1	Alguns erros. Item 2b) errado e itens 1b), 1c) e 2c) incompletos.
P2	Alguns erros. Itens 1c) e 2b) errados. Os itens 1a) e 1e) apresentavam-se incompletos.
P3	Alguns erros, nos itens 1a), 1c) e 2b).
P4	Metade das alíneas por resolver, da 2b) à 2g). Item 1e) errado e itens 1a) e 1c) incompletos.
P5	Poucos erros. Item 2b) errado e item 1d) incompleto.
P6	Alguns erros: itens 1e) e 2f). Incompletude nos itens: 1a), 1b) e 2e).
P7	Bastantes erros: erraram a 1a) e não resolveram os itens 1e), 2f) e 2g). Os itens 1b), 2b) e 2e) estavam incompletos.
P8	Não tiveram tempo de resolver a tarefa na aula.
P9	Bastantes erros: itens 1d), 2b) e 2f). Incompletude nos itens: 1a), 1b), 1c), 1e) e 2e).
P10	Quase toda a tarefa por resolver. Só resolveram os itens 2a) e 2d).
P11	Bastantes erros: 1d), 1e) e 2g). Itens 1a), 2b) e 2e) incompletos.

Classificadas as respostas dos pares, verifica-se que os resultados obtidos não foram satisfatórios.

4.2.9 Tarefa 9: Equações e inequações com logaritmos

A tarefa 9 teve desenvolvimento escorreito, dado os procedimentos serem similares aos da tarefa 4, que consistia em que os alunos resolvessem graficamente equações e inequações com logaritmos. Confirmou-se durante a realização da tarefa que o processo já estava consolidado.

Analisando os resultados obtidos pelas duplas (tabela 17), destacam-se dois factos distintos: todos resolveram as equações com excelência; apenas duas duplas, P3 e P8, resolveram as inequações com logaritmos.

Tabela 17 – Análise do desempenho dos pares na tarefa 9.

Pares	Descrição
P1	Erros nos itens 4 e 5 (intervalos que representam o conjunto-solução).
P2	Erros nos itens 4 e 5 (intervalos que representam o conjunto-solução).
P3	Tudo certo. Falta de sentido de número (números mal aproximados).
P4	Erros nos itens 4 e 5 (intervalos que representam o conjunto-solução).
P5	Erros nos itens 4 e 5 (intervalos que representam o conjunto-solução).
P6	Erros nos itens 4 e 5 (intervalos que representam o conjunto-solução).
P7	Erros nos itens 4 e 5 (intervalos que representam o conjunto-solução).
P8	Tudo certo.
P9	Quase tudo certo. Item 5 também foi resolvido analiticamente com algumas gralhas.
P10	Erros nos itens 4 e 5 (intervalos que representam o conjunto-solução).
P11	Erros nos itens 4 e 5 (intervalos que representam o conjunto-solução).

Uma vasta maioria de alunos não conseguiu visualizar os intervalos que respeitavam as condições pedidas, dificuldades já apuradas na tarefa 4.

4.2.10 Tarefa 10: Estudo de funções envolvendo exponenciais

Comparada com tarefa 9, esta tarefa era mais complexa. A dificuldade principal com que os pares se depararam, ao resolver a atividade, consistiu na sintaxe dos comandos. Ao abrir o *software*, o idioma pode estar pré-definido em Português (Portugal) ou Português (Brasil). Como havia predefinições diferentes na sala, esta situação causou confusão. Por exemplo, dependendo do idioma, pode-se usar, no menu Álgebra da aplicação, os comandos *Interseção* ou *Intersetar*, *EixoX* ou *EixoOx*, *LimiteSuperior* ou *LimiteàDireita*. Durante a execução desta tarefa o aluno A15 alertou que os comandos que estavam nas fichas eram diferentes dos comandos que estavam no GeoGebra, o que a estava a confundir. Na realidade, como o GeoGebra distingue, enquanto idioma, o português de Portugal e o do Brasil, a sintaxe de alguns comandos deu azo a essa confusão.

Depois de colmatar essa dificuldade, os grupos empenharam-se na tarefa, trabalhando colaborativamente. Solicitaram bastante o professor/investigador para esclarecer dúvidas. Alguns pares foram mais autónomos conseguindo, por isso, concluir a tarefa durante a aula.

Apesar do exposto no parágrafo anterior, analisadas as respostas entregues, verifica-se que foram muito satisfatórias, excetuando as de dois grupos, P9 e P10. Pode-se deduzir que o esforço feito permitiu superar as dificuldades encontradas (tabela 18).

Tabela 18 – Análise do desempenho dos pares na tarefa 10.

Pares	Descrição
P1	Quase tudo certo. Gralhas nos itens 1a) (contradomínio) e 3a) (domínio).
P2	Tudo certo.
P3	Poucos erros. Erro na 2h). Simbologia errada nos itens 1a) e 2e). Gralhas nos itens 1d) e 3d) (ponto de inflexão mal calculado) e 3a) (contradomínio errado).
P4	Poucos erros: 1a) (no contradomínio), 3a) e não resolveram a 3i). Erros de simbologia matemática na questão 1b).
P5	Um erro, no item 3h). Erros de simbologia matemática nos itens 1a), 2e), 3a) e 3b).
P6	Algumas gralhas: 1d), simbologia; 2e), contradomínio errado; 3b), falta um dos zeros; 3d), extremo do intervalo e na 3i) falta uma das duas assíntotas.
P7	Algumas lacunas: No item 1a) (contradomínio), 1c) (falta calcular o valor do extremo), 1d) (ponto de inflexão mal calculado) e 2a) (domínio).
P8	Quase tudo certo. Gralha nos itens 1c), nos intervalos de monotonia; 1d), no ponto de inflexão; na 1e), na assíntota; 2e), contradomínio e na 3i) falta uma das assíntotas.
P9	Muitas falhas. Não resolveram os itens 2b), 3c) e 3d). Gralhas nos itens 1a), contradomínio; 1c), monotonia; 1d), concavidade e pontos de inflexão; 2a), contradomínio; 3b), falta um zero e na 3i) falta uma das assíntotas.
P10	Muitos erros, nos itens 2b), 2d), 3c) e 3d). Falhas nos itens 1a), contradomínio; 1c), abcissa do mínimo; 1d), coordenadas do ponto de inflexão; 2c), falta um intervalo; 2e), contradomínio e na 3i) falta uma das assíntotas. Erros simbólicos na 3a) e 3b).
P11	Um erro, no item 3a). Gralha nos itens 1c) (valor do extremo), 1d) (coordenadas do ponto de inflexão) e na 3i) falta uma das assíntotas.

O número de respostas erradas foi residual, registando-se algumas gralhas relativas a simbologia matemática e de incorreção na escrita.

4.2.11 Tarefa 11: Transformações do gráfico da função exponencial

Um dos membros do par P3 faltou à aula, sobrecarregando o outro aluno que constituía esse par.

A tarefa era constituída por cinco itens. O primeiro consistia em (re)verificar as características da função inicial $f(x) = e^x$ e não levantou qualquer dificuldade aos grupos de trabalho. Nos itens seguintes o grau de complexidade aumentou gradualmente, com a composição de um cada vez maior número de transformações geométricas, de acordo com as funções enunciadas: $g(x) = e^x - 1$, $h(x) = -e^x + 3$, $i(x) = 2e^{x+2} + 3$.

O desempenho dos grupos foi bom, o que está de acordo com o indicado pela NCTM (2008), que defende que a investigação de funções e a observação da alteração dos seus gráficos à medida que o valor dos parâmetros varia permitem uma maior compreensão das transformações e das alterações às suas coordenadas. O domínio em que os alunos tiveram pior desempenho foi a comunicação matemática. Apesar do trabalho que tem sido feito para melhorar a comunicação matemática, o uso de linguagem matemática rigorosa ainda não é um tema consolidado. Essas dificuldades são mais notórias nos itens 3a) e 4a). Analise-se, como exemplo, uma das respostas (figura 20), onde o uso do rigor não é contemplado (vide as expressões "faz com a função inverta" ou "sobre três unidades").

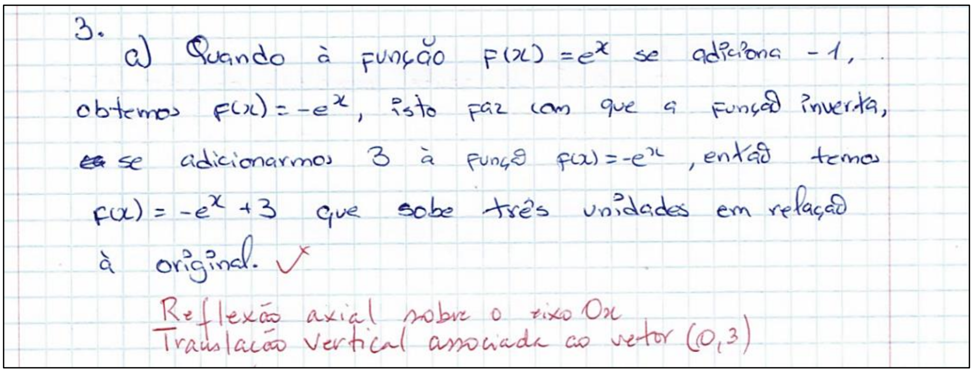

3.
a) Quando à função $f(x) = e^x$ se adiciona -1,
obtemos $f(x) = -e^x$, isto faz com que a função inverta,
~~e~~ se adicionarmos 3 à função $f(x) = -e^x$, então temos
$f(x) = -e^x + 3$ que sobe três unidades em relação
à original. ✓
Reflexão axial sobre o eixo Ox
Translação vertical associada ao vetor $(0,3)$

Figura 20 – Uma das respostas do par P6, na resolução da tarefa 11.

O desempenho global dos pares é apresentado na tabela seguinte (tabela 19).

Tabela 19 – Análise do desempenho dos pares na tarefa 11.

Pares	Descrição
P1	Quase tudo certo. Erros de comunicação matemática nos itens 2a), 3a) e 4a).
P2	Quase tudo certo. Erros de comunicação matemática nos itens 3a) e 4a).
P3	Poucos erros. Erros de comunicação matemática nos itens 2a), 3a) e 4a). Lacunas no estudo da monotonia no item 3.
P4	Quase tudo certo. Erros de comunicação matemática nos itens 2a), 3a) e 4a).
P5	Poucos erros. Erros de comunicação matemática no item 3a). Não referiram os extremos nos itens 2 e 3, a continuidade no item 4 e erros de simbologia na escrita de assíntotas.
P6	Poucos erros. Erros de comunicação matemática nos itens 2a), 3a) e 4a). Não referiram a continuidade no item 4.
P7	Quase tudo certo. Erros de comunicação matemática nos itens 2a), 3a) e 4a).
P8	Poucos erros. Erros de comunicação matemática nos itens 2a), 3a) e 4a). Não referiram a continuidade no item 4.
P9	Quase tudo certo. Erros de comunicação matemática nos itens 3a) e 4a).
P10	Poucos erros. Erros de comunicação matemática nos itens 2a) e 4a). Não referiram a continuidade no item 4 e falta o domínio numa das funções do item 5.
P11	Quase tudo certo. Erros de comunicação matemática nos itens 2a), 3a) e 4a).

Os alunos realizaram a atividade com o empenho e concentração exigida pela complexidade da tarefa. No que tange ao estudo da função relativamente ao domínio, contradomínio, coordenadas dos pontos de interseção do seu gráfico com os eixos coordenados, injetividade, monotonia, sinal, assíntotas e extremos o desempenho das díades foi muito satisfatório. No domínio da comunicação matemática, pelo contrário, as lacunas foram evidentes em todos os pares.

4.2.12 Tarefa 12: Transformações do gráfico da função logarítmica de base natural

A última tarefa, relativa a transformações geométricas do gráfico da função logarítmica de base natural, não foi concluída por cinco grupos durante a aula.

A avaliação desta atividade (tarefa 12) ficou condicionada uma vez que foi realizada na mesma aula da tarefa anterior (tarefa 11), na qual os alunos demoraram mais tempo do que o previsto, comprometendo de certa forma esta última tarefa. Mais ainda, atendendo a que as tarefas eram muito semelhantes, os alunos mostraram-se pouco empenhados, tendo a colaboração entre os elementos dos pares diminuído. Da avaliação do desempenho dos pares que foi possível efetuar sobressaem novamente dificuldades na comunicação matemática. Nos outros domínios a avaliação foi medianamente positiva (tabela 20).

Tabela 20 – Análise do desempenho dos pares na tarefa 12.

Pares	Descrição
P1	Quase tudo certo. Erros de comunicação matemática nos itens 2a) e 3a).
P2	Não entregaram a resolução da tarefa.
P3	Não entregaram a resolução da tarefa.
P4	Não entregaram a resolução da tarefa.
P5	Bastantes erros. Não resolveram os itens 2a) e 3a). Faltam as assíntotas nos itens 2 e 3. No item 3 resolveram mal os zeros, o sinal da função, a interseção com o eixo das ordenadas e as assíntotas.
P6	Quase tudo certo. Erro de comunicação matemática no item 3a).
P7	Quase tudo certo. Erros de comunicação matemática nos itens 2a) e 3a).
P8	Alguns erros. Erros de comunicação matemática nos itens 2a) e 3a). Não indicaram a intersecção com o eixo das ordenadas nos itens 3 e 4. Gralhas nos zeros e sinais no item 4.
P9	Com erros. Erros de comunicação matemática nos itens 2a) e 3a). No item 1 resolveram mal a interseção com o eixo das ordenadas. No item 3 resolveram mal os zeros, o sinal da função, a interseção com o eixo das ordenadas e as assíntotas.
P10	Não entregaram a resolução da tarefa.
P11	Não entregaram a resolução da tarefa.

Face ao exposto neste subcapítulo, pode concluir-se que o trabalho apresentado pelos grupos na resolução das tarefas foi bastante satisfatório, comprovando-se ainda que as díades que têm interação são as que revelam melhor desempenho, tal como defendem Ponte et al. (1998).

4.3 Questionário final

No final do trabalho de campo, coincidente com o final do segundo período letivo, auscultou-se anonimamente as opiniões dos participantes no estudo, como forma de analisar o impacto que o uso de RED, no caso vertente o GeoGebra, teve na aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas em contexto real. Ao inquérito (anexo 7), disponibilizado em formato Google Forms, responderam 19 alunos.

94,7% dos inquiridos afirmaram que já conheciam o *software* de geometria dinâmica GeoGebra antes do trabalho de campo ter iniciado (gráfico 3).

Gráfico 3 – Conhecimento prévio do GeoGebra.

Questionados se ao estudar matemática, na escola ou fora dela, costumam recorrer ao GeoGebra para reforçar as suas competências matemáticas, 12 dos 18 alunos respondem *Nunca* ou *Raramente*. Quatro respondentes afirmam utilizar *Muitas vezes* o GeoGebra no seu estudo (gráfico 4). Constata-se, por isso, que enquanto ferramenta de apoio ao estudo o *software* ainda não é muito usado pelos discentes.

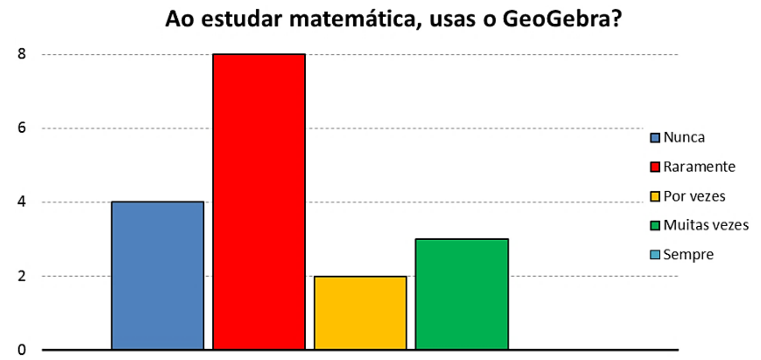


Gráfico 4 – Uso do GeoGebra durante o estudo.

Verificou-se, das respostas dadas, que 84,2% dos alunos gostam de usar o GeoGebra, em aula ou em casa (gráfico 5).

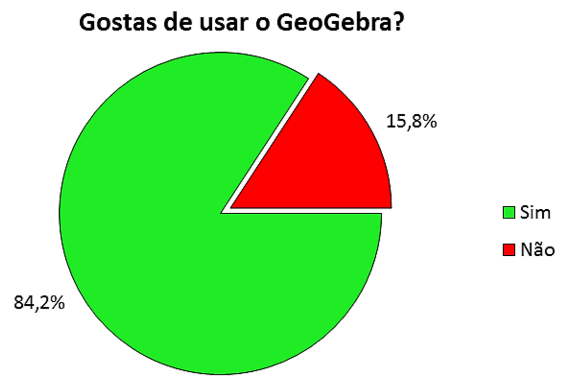


Gráfico 5 – Gosto dos participantes no uso do GeoGebra.

No entender dos alunos que responderam positivamente o GeoGebra é “um bom programa”, “bastante interativo” e “é uma forma melhor de aprender matemática”. Enunciam-se, em seguida, outras justificações anotadas: “é uma ferramenta bastante útil na resolução de exercícios envolvendo funções”, “permite visualizar as representações gráficas das funções, que facilitam o estudo das mesmas, como a interseção ou os zeros. É uma aplicação prática e de fácil utilização”, “é uma ferramenta muito prática e conseguimos observar gráficos e ao mesmo tempo compreender a matéria” e “gosto de usar o GeoGebra porque auxilia os alunos na compreensão dos conteúdos.”

As respostas negativas são fundamentadas da seguinte forma: “Não acho uma aplicação fácil de utilizar e diversas vezes algumas funções não funcionam como o previsto. Para além dos vários problemas com a ausência de *internet* durante as aulas que impossibilitam a utilização do GeoGebra”, “Não gostei de utilizar o GeoGebra pois havia muitos problemas com a *internet*” e “Não gosto do método porque acredito que não tenho uma melhor aprendizagem da matéria”.

Para aferir quão útil os participantes consideraram a ferramenta, o investigador usou uma escala de Likert de 5 pontos, com os extremos 1 e 5, com âncoras verbais, respetivamente, “Nada útil” e “Muito útil”. O gráfico 6 regista as respostas dadas pelos participantes.

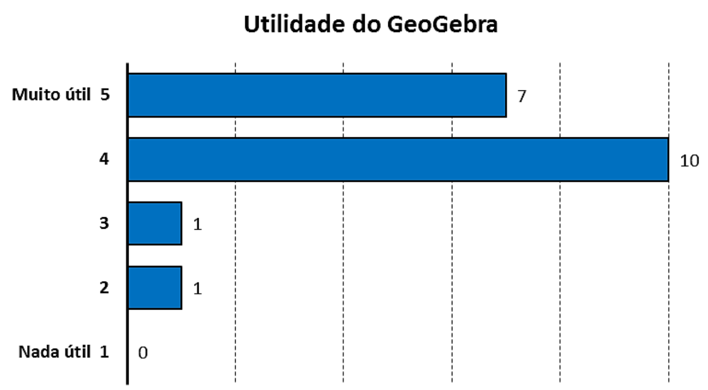


Gráfico 6 – Utilidade do GeoGebra.

Da análise das respostas dadas, constata-se que, após o uso efetivo da ferramenta ao longo do estudo empírico, a maioria dos participantes a reconheceu útil ou muito útil (17 respostas, que correspondem a 89% do universo). Nenhum aluno indicou nada útil.

Relativamente ao estudo das funções exponenciais e logarítmicas, 79% dos inquiridos concorda parcial ou totalmente que o trabalho em pares contribui para a sua aprendizagem (gráfico 7). 63% e 68% dos inquiridos, respetivamente, consideram que gostaram de estudar a função exponencial e a função logarítmica. No atinente ao grau de dificuldade no estudo destas funções, 74% (exponencial) e 79% dos participantes (para a função logarítmica) classificaram-nas como fáceis de estudar. Mais ainda, 32% dos inquiridos considera que, relativamente a outras funções já estudadas, estas são mais difíceis de compreender.

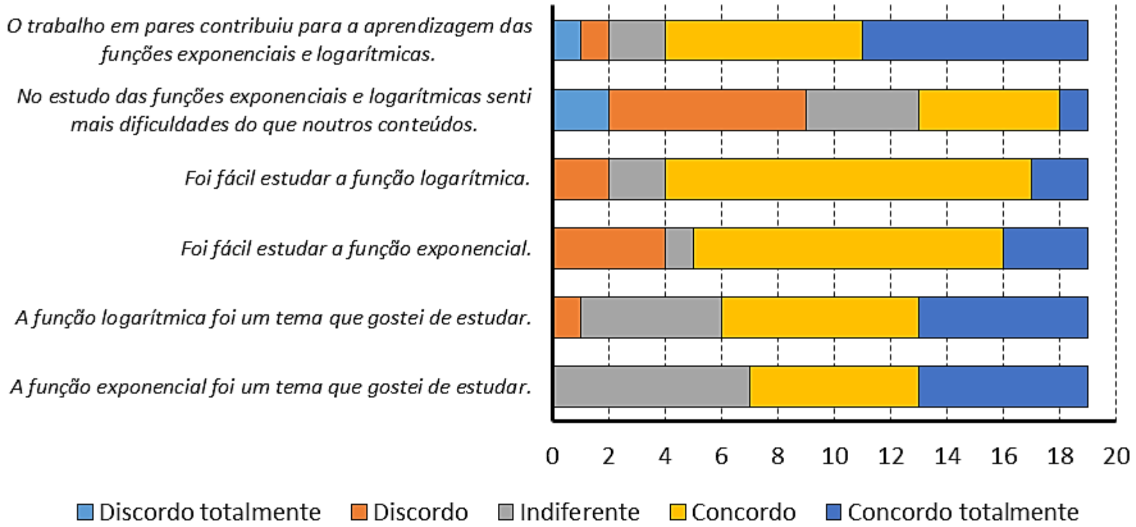


Gráfico 7 – Perceção dos alunos relativamente ao estudo da função exponencial e logarítmica.

Relativamente às 12 tarefas desenvolvidas em aula com o RED utilizado, questionados sobre a influência que tiveram na aprendizagem destas funções, 95% dos inquiridos concordam que estas os ajudaram a compreendê-las e que ajudaram a melhorar a sua capacidade de trabalhar em GeoGebra; 74% concordam que estas incentivaram o seu interesse no estudo destas funções, ao passo que apenas 42% reconhecem a exigência de pré-requisitos matemáticos para o seu entendimento. Há concordância absoluta quanto ao facto das tarefas propostas pelo professor terem proporcionado uma boa introdução aos tópicos lecionados, enquanto 95% reconhecem que o GeoGebra permitiu confirmar resultados obtidos analiticamente na resolução de exercícios com papel e lápis. O percurso inverso, ou seja, confirmar analiticamente a solução obtida usando o *software* só é feito por 58% dos respondentes. 58% dos inquiridos discorda ter sentido dificuldade na resolução das tarefas solicitadas (gráfico 8).

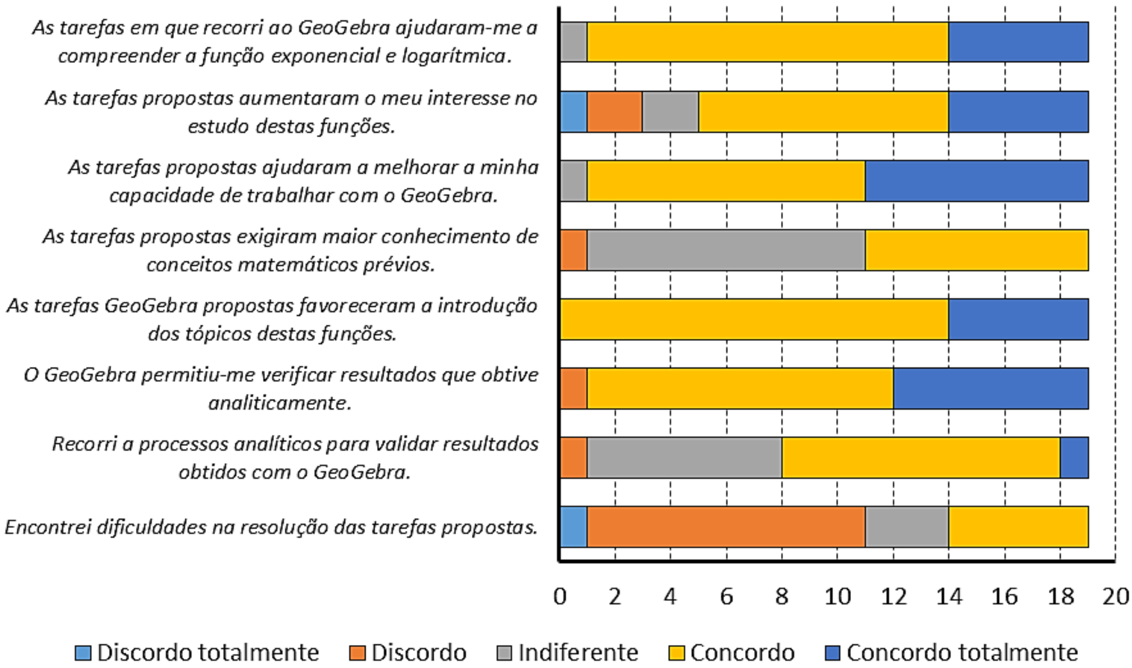


Gráfico 8 – Influência das tarefas na aprendizagem das funções exponencial e logarítmica.

No que respeita ao interesse, qualidade e usabilidade, verifica-se que a maioria concordou que as tarefas eram exigentes mas estavam bem construídas (95%, tendo 63% concordado completamente); 84% concorda (tendo 63% concordado absolutamente) que as tarefas eram interessantes e com objetivos bem delineados; uma minoria (11%) concorda que a resolução de tarefas com recurso ao GeoGebra é mais fácil de executar do que a resolução de exercícios sem o uso de meios digitais. Questionados se as tarefas com GeoGebra são mais desafiantes do que a resolução de exercícios e/ou problemas matemáticos, as opiniões dividem-se salomonicamente, com 7 respostas concordantes, 7 discordantes e 5 indiferentes, correspondentes a 37%, 37% e 26% das respostas dadas, respetivamente. Depreende-se, do exposto, que a maioria dos alunos considerou as tarefas interessantes embora, relativamente à resolução habitual, as julguem por vezes difíceis de concretizar. No entanto, 79% afirma ter gostado de resolver as tarefas e 74% gostaria de aprender outros tópicos matemáticos com recurso ao GeoGebra (gráfico 9).

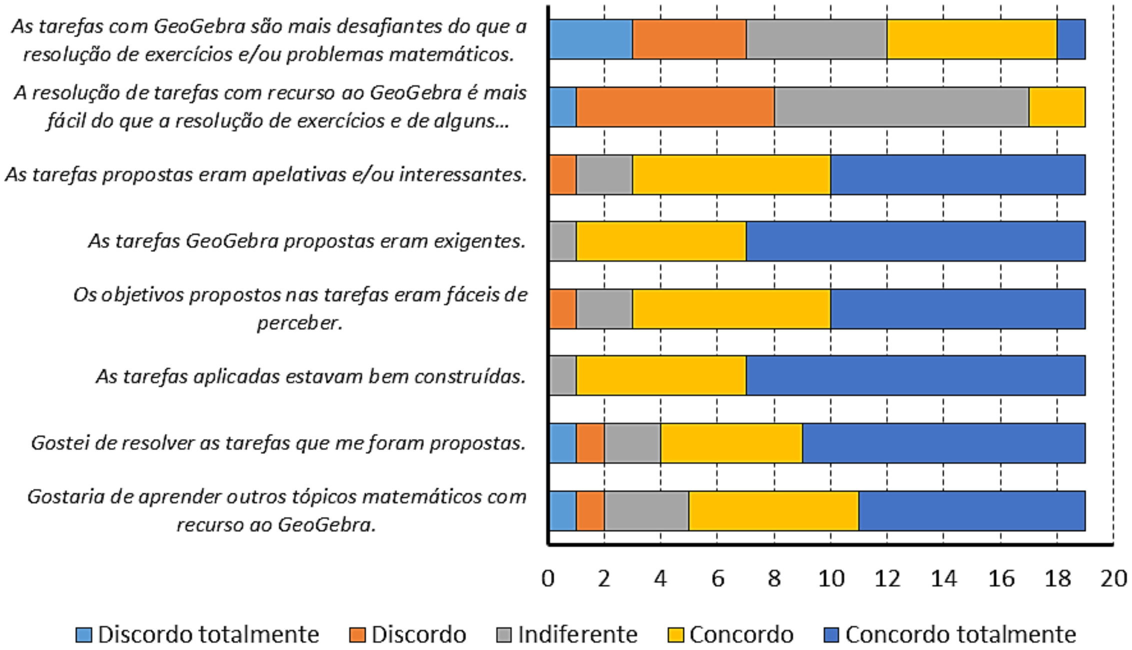


Gráfico 9 – Interesse, qualidade, usabilidade e exigências das 12 tarefas propostas.

Questionados sobre as tarefas que mais gostaram de desenvolver durante a investigação, as respostas, por ordem decrescente de preferência, foram: em primeiro lugar a tarefa 1 – Número de Neper; em segundo a tarefa 8 – Exercícios com logaritmos, seguida, como terceira preferência, a tarefa 5 – Limite notável. No que concerne às tarefas menos preferidas, os alunos elegem como a menos preferida a tarefa 12 – transformações do gráfico da função $f(x) = \ln x$, seguida da tarefa 11 – transformações do gráfico da função $f(x) = e^x$ e da tarefa 5 – Limite notável.

Foi, também, solicitado aos participantes que indicassem algumas vantagens do uso do ambiente de geometria dinâmica GeoGebra para a sua aprendizagem de tópicos das funções exponenciais e logarítmicas. Tratando-se de respostas abertas procedeu-se a uma análise de conteúdo por categorização, em que se consideraram duas categorias: um) caracterização das tarefas realizadas com recurso ao GeoGebra e dois) impacto do uso do GeoGebra na aprendizagem dos alunos. Foram consideradas quatro subcategorias: visualização do gráfico das funções, transformações do gráfico das funções, perceção das propriedades e caraterísticas das funções e precisão dos cálculos, no atinente à primeira categoria; e seis subcategorias: promoção das aprendizagens, consolidação das aprendizagens, incremento do interesse, desenvolvimento da autonomia, maior dinamismo e fomento de aptidões tecnológicas no que respeita à segunda categoria. O resultado dessa análise de conteúdo é apresentado no quadro 5.

Quadro 5 – Vantagens do uso do ambiente de geometria dinâmica GeoGebra para a aprendizagem de tópicos das funções exponenciais e logarítmicas.

Categorias	Número de referências	Evidências textuais
Caracterização das tarefas realizadas com recurso ao GeoGebra		
Visualização do gráfico das funções	3	"A utilização do GeoGebra permite-nos visualizar o gráfico destas funções"
Transformações do gráfico das funções	4	"… fácil visualização das mudanças nos gráficos das funções"
Perceção das propriedades e características das funções	2	"Foi mais fácil de compreender quais eram as propriedades e características dessas funções …"
Precisão nos cálculos	1	"É uma calculadora mais precisa"
Impacto do uso do GeoGebra na aprendizagem dos alunos		
Promoção das aprendizagens	6	"Facilitou na compreensão de todo o tipo de situação das funções exponenciais e logarítmicas …"
Consolidação das aprendizagens	2	"Ajuda a consolidar mais facilmente as matérias de uma forma bastante interessante"
Incremento do interesse	3	"Prende mais a atenção do aluno"
Desenvolvimento da autonomia	2	"… ajudou-nos a desenvolver um certo tipo de autonomia …"
Maior dinamismo	4	"… são atividades mais dinâmicas …"
Fomento de aptidões tecnológicas	2	"Aumento do desempenho tecnológico"

A maioria das respostas situa-se na segunda categoria, na subcategoria promoção das aprendizagens. Os alunos reconhecem o facto de o GeoGebra ser uma ferramenta que promove as aprendizagens. Um dos respondentes escreveu que "facilitou na compreensão de todo o tipo de situações das funções exponenciais e logarítmicas". Mais ainda, consideram que este tipo de atividades são mais dinâmicas e prendem a atenção. Outra vantagem seguidamente mais destacada pelos alunos foi a facilidade com que o GeoGebra desenha gráficos de funções. Isso potenciou, quanto a eles, a aprendizagem das transformações ao gráfico das funções.

Questionados, em seguida, sobre as desvantagens do uso do GeoGebra na aprendizagem destas funções, mais de metade dos respondentes (10) não assinalou nenhuma desvantagem. Nas outras 9 respostas, as justificações distribuem do seguinte modo: falhas na *internet* (3 casos), a ferramenta não promove o raciocínio, uma vez que devolve apenas o resultado final (4 casos), soluções pouco percetíveis na resolução de equações e inequações (1 caso) e erros no *software* (1 caso).

A finalizar o questionário inquiriram-se os participantes relativamente às dificuldades sentidas na aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas. Quatro alunos assumiram não ter sentido dificuldades. No que respeita às respostas dos restantes alunos, procedeu-se a uma análise de conteúdo, tendo por base duas categorias: dificuldades no domínio cognitivo e dificuldades específicas relativas às funções estudadas (quadro 6). Relativamente à primeira categoria consideraram-se 3 subcategorias: compreensão, aplicação dos conhecimentos adquiridos e memorização. A segunda categoria contemplou 4 subcategorias relacionadas com as dificuldades específicas: determinação do domínio e contradomínio das funções, cálculo de derivadas, determinação de limites notáveis e uso de comandos do GeoGebra.

Quadro 6 – Dificuldades sentidas na aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas.

Categorias	**Número de referências**
Dificuldades no domínio cognitivo	
Compreensão	3
Aplicação dos conhecimentos adquiridos	4
Memorização	1
Dificuldades específicas relativas à função exponencial e logarítmica	
Domínio e contradomínio das funções	3
Derivadas	3
Limites notáveis	3
Comandos do GeoGebra	1

A categoria com maior representatividade foi a segunda: dificuldades específicas relativas à função exponencial e logarítmica, com 10 referências. Em termos mais concretos, as respostas obtidas nesta categoria centram-se em três tópicos: na determinação do domínio e contradomínio das funções exponenciais e logarítmicas, no cálculo de derivadas e no levantamento de indeterminações, usando o limite notável. A subcategoria mais apontada pelos alunos foi a da aplicação dos conhecimentos adquiridos da categoria “Dificuldade no domínio cognitivo”, tendo sido das dificuldades mais referidas, seguida de dificuldades na compreensão de alguns conceitos.

Por fim, quanto ao juízo, avaliado numa escala de 1 a 10 valores, do contributo do GeoGebra na clarificação das dificuldades por eles sentidas na aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas, verifica-se que apenas dois alunos indicaram um valor inferior a 5 (gráfico 10). Para quase a totalidade dos inquiridos, o GeoGebra contribuiu positivamente para colmatar as suas lacunas.

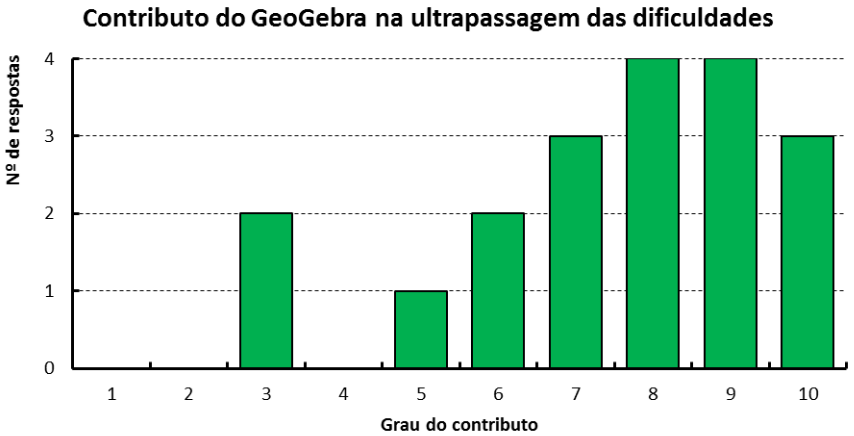


Gráfico 10 – Contributo do GeoGebra na ultrapassagem das dificuldades sentidas pelos alunos na aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas.

A maioria dos alunos indicou grau 8, 9 ou 10, o que permite concluir que reconhecem que o GeoGebra contribuiu bastante para os ajudar a ultrapassar dificuldades sentidas na aprendizagem destas funções.

4.4 Entrevista em *focus group*

Dificuldades de agenda na aplicação da entrevista, realizada com o propósito de aprofundar alguns aspetos trabalhados no questionário final, impediram a realização da mesma na semana inicialmente prevista, acabando por ser aplicada logo que se tornou possível, no início do terceiro período.

A entrevista semiestruturada, na modalidade de *focus group*, foi efetuada a três grupos de alunos, constituídos por alunos com competências matemáticas similares:

- grupo I – constituído por 8 alunos que, no contexto da turma, manifestavam maiores dificuldades na disciplina, sendo que 6 concluíram o ensino secundário com classificação negativa à disciplina. A entrevista teve uma duração de 21 minutos;
- grupo II – também formado por 8 alunos, cujas classificações obtidas no final do primeiro período estavam compreendidas entre os 11 e os 14 valores. Situavam-se, portanto, num nível intermédio de resultados da turma. A duração da entrevista foi de 27 minutos;
- grupo III – continha 7 elementos situados, na turma, no patamar académico mais elevado. Eram alunos com uma boa compreensão geral dos conteúdos matemáticos. No primeiro período as suas classificações eram iguais ou superiores a 15 valores, integrando ainda dois alunos de 19 valores. A entrevista ao grupo teve uma duração de 29 minutos.

Estas entrevistas, de acordo com o seu guião preparatório (anexo 8), em que se incluíam perguntas abertas, foi flexível. Permitiu, assim, uma recolha de dados num ambiente de alguma informalidade. Sempre que o rumo seguido o proporcionou, foram integradas novas questões, o que é característico das entrevistas semiestruturadas.

Das entrevistas feitas aos três grupos acima descritos resultam respostas comuns e, algumas vezes, respostas específicas a cada um deles.

Os grupos gostaram em geral de estudar estas funções, havendo 2 alunos do grupo intermédio que não apreciaram este conteúdo. No grupo dos alunos mais competentes justificaram essa escolha pelo nível de exigência associado ao seu estudo. No que toca à facilidade do seu estudo, acharam-nas fáceis, com a opinião discordante de 2 membros do grupo intermédio. Embora todos concordem que as doze tarefas empregues nesta investigação os ajudaram na compreensão destas funções, um elemento do grupo mais fraco e alguns elementos do melhor grupo manifestaram desagrado pelo facto de, em sua opinião, as tarefas se tenham tornado, para o final, repetitivas.

No atinente ao GeoGebra, os dois primeiros grupos classificam-no como útil e prático, ao passo que o grupo III é mais crítico, uma vez que o consideram uma boa aplicação, mas com limitações. Alguns elementos deste grupo afirmaram inclusive que apenas serve para visualizar gráficos.

É transversal a indicação de que os alunos não usam, habitualmente, o GeoGebra fora da sala de aula. Na opinião dos grupos, os aplicativos construídos pelo investigador eram fáceis de utilizar, interessantes e intuitivos. Contribuíram para ajudar ao entendimento das funções exponenciais e logarítmicas, segundo todos os grupos. Mais uma vez, o grupo dos melhores alunos, tece algumas críticas: é um bom auxiliar de aprendizagem, sobretudo quando direcionado para alunos com mais dificuldades. Há unanimidade quanto às dificuldades com que os pares se depararam na concretização das tarefas, designadamente na pouca qualidade da ligação à *internet* provida pela escola no primeiro tempo da manhã. Alguns entrevistados do grupo intermédio referiram, por sua parte, falta de colaboração com o parceiro da díade.

Os grupos julgam mais fácil a resolução de exercícios com recurso ao computador e gostaram de usar o GeoGebra, excetuando alguns elementos do grupo III. Destacaram a rápida construção de gráficos e a visualização das transformações ao gráfico das funções como pontos fortes; como pontos fracos destacaram a ligação à rede e, no grupo dos mais capazes, frisaram o carater repetitivo das últimas tarefas. A investigação foi classificada por todos como globalmente positiva. No que respeita a eventuais melhorias, o primeiro grupo sugeriu diversificar a tipologia de exercícios e o terceiro grupo questionou a duração excessiva de algumas tarefas e desejaria que alguns exercícios estivessem imbuídos de maior abstração. Quanto à frequência com que gostariam de usar o *software* nas atividades pedagógicas os grupos responderam de modo diferente: os alunos mais fracos acharam que foi suficiente, o grupo intermédio solicitou maior frequência, ao passo que as respostas dos elementos do grupo dos melhores alunos foram inconclusivas.

A partir das respostas dos alunos procedeu-se à análise de conteúdo considerando-se quatro categorias: estudo das funções exponenciais e logarítmicas, impacto das tarefas desenvolvidas em aula, impacto do GeoGebra na aprendizagem e balanço do período em que foi implementada a investigação (quadro 7).

Quadro 7 – Análise das respostas dos participantes na entrevista em *focus group*.

Categorias	**Subcategorias**	**Número de referências**
Estudo das funções exponenciais e logarítmicas	Afinidade com a temática	8
	Facilidade na compreensão	7
Impacto das tarefas desenvolvidas em aula	Promovem as aprendizagens	12
	Desenvolvem a autonomia	4
	Adequação ao trabalho de pares	13
Impacto do GeoGebra na aprendizagem	Fomenta a compreensão das funções	14
	Afinidade com o AGD	10
	GeoGebra *versus* modelo tradicional	11
	Transformações ao gráfico de funções	10
Balanço do período em que foi implementada a investigação	Dificuldades de ligação à rede *wifi*	6
	Adequação	8
	Diversificação de exercícios	4
	Maior frequência no uso de RED	7

Para melhor se compreender a análise realizada, de seguida procede-se à abordagem mais detalhada de cada uma das categorias e, posteriormente, a análise de conteúdo global da entrevista.

4.4.1 Estudo das funções exponenciais e logarítmicas

Na primeira categoria consideraram-se duas subcategorias: a afinidade com a temática investigada e facilidade na compreensão de funções exponenciais e logarítmicas.

Afinidade com a temática

Nas três entrevistas os alunos, em geral, começaram por afirmar que gostaram de estudar estas funções. O aluno A17, integrante do primeiro grupo, comentou, inclusivamente: "Eu por acaso gostei bastante". Na turma, apenas dois alunos do segundo grupo, os alunos A5 e A18, declararam não ter gostado de estudar estas funções transcendentes. Relativamente a outras funções já estudadas, todos os entrevistados dos grupos I e II as consideram mais fáceis de estudar. Destaca-se, contudo, que foi a componente prática que desbloqueou as dificuldades iniciais encontradas. O aluno A17 afirmou que "Depois de apanhar o jeito, depois de praticar e de perceber como é que funciona" se tornou fácil compreendê-las. Também no grupo II, o aluno A18 indica que "depois, com a prática, [o estudo] ficou acessível". Por seu turno, o aluno A16 expressa que "é fácil de usar. Eu não uso muito mas acho que para quem tem mais dificuldades acaba até por ajudar.".

Facilidade na compreensão

No tocante ao grau de complexidade destas funções, o primeiro grupo não teceu muitas considerações. São os alunos dos dois grupos mais competentes, que coincidem em as catalogar como funções com maior grau de complexidade relativamente às que já conheciam. No terceiro grupo, o aluno A16 declarou que "nestas funções o nível de exigência é maior, mas eu gostei mais". O aluno A1 concordou, reforçando que este tópico "dá mais vontade de fazer exercícios".

4.4.2 Impacto das tarefas desenvolvidas em aula

Na segunda categoria, três subcategorias são analisadas: a análise da promoção das aprendizagens com recurso a tarefas, o desenvolvimento de trabalho autónomo por parte dos alunos e a adequação das tarefas ao trabalho de pares.

Promovem as aprendizagens

No grupo I o aluno A4 referiu que todas as tarefas promoveram as aprendizagens. Mais comedidos, os alunos A17, A7 e A13 consideraram que quase todas as tarefas os ajudaram bastante a compreender os conteúdos lecionados. Os alunos A2, A17 e A14 consideraram-nas benéficas. "Acho que umas são mais fáceis de aprender visto que, como têm uma parte teórica e uma parte prática, os alunos por si acabam por entender melhor a matéria", desenvolveu A17. Vários elementos do grupo II (alunos A5, A8, A18, A20 e A21) consideraram que as tarefas os ajudaram na aprendizagem destas funções. O aluno A5 justificou: "Porque não só estávamos a ver as propriedades das funções como também, ao mesmo tempo, conseguimos ver como é que ela variava nos gráficos". Para os alunos A14 e A18 foram interessantes e, para o aluno A1, apelativas. O grupo III foi mais contido: o aluno A1 achou que as tarefas o ajudaram, o aluno A10 "não muito", ao passo que o aluno A6 afirmou que a princípio sim, mas para o final o estudo se tornou repetitivo, não tendo as tarefas contributo tanto para a aprendizagem.

Desenvolvem a autonomia

Quando inquiridos sobre as características das tarefas com recurso aos computadores portáteis, os alunos A8 e A22, do grupo II, destacaram a autonomia. “Era mais prático e fazíamos sozinhos”, declarou o aluno A8. Este segundo grupo epitetou a experiência como interessante. “São aulas diferentes, mais dinâmicas”, respondeu o aluno A20. Opinião semelhante expressa o aluno A19, do grupo III, para quem estas aulas “foram mais dinâmicas”.

Adequação ao trabalho de pares

O trabalho em pares foi visto de forma diferente pelos três grupos, registando-se no grupo intermédio um maior número de críticas e/ou observações relatadas na entrevista. Assim, o grupo I, no atinente ao trabalho em pares, classificou-o de forma unânime como positivo. Citam-se as afirmações: “Sim. É mais fácil, também. Ajudamo-nos um ao outro” (aluno A10) ou “Podemos colaborar. É melhor!” (aluno A13). No grupo II, no respeitante ao trabalho em pares, metade dos entrevistados alegou não ter ficado satisfeito com a experiência. No entender do aluno A20, um dos satisfeitos com este método, “Tem que haver complementaridade. No meu grupo complementámo-nos. Completámos os raciocínios.”. No entanto, dois alunos (A5 e A8) destacam pela negativa o trabalho de grupo. “Aturar o parceiro” (aluno A5) não foi fácil. Na realidade, estas duplas não eram homogéneas. Pelo contrário, para o aluno A18, “Trabalhar no grupo ajudou-nos”. Quanto ao terceiro grupo, as opiniões são globalmente positivas, embora o aluno A6 salientasse que “podia haver mais rotação dos pares”. “Nuns casos pode ser a melhor coisa de sempre, noutros casos pode até não dar” foi outra resposta (A6). Pode depreender-se dessas respostas que os alunos mais fracos se sentem confortáveis na companhia de colegas mais competentes, enquanto o contrário nem sempre é evidente.

4.4.3 Impacto do GeoGebra na aprendizagem

Na terceira categoria, trataram-se quatro subcategorias: a compreensão das funções recorrendo ao GeoGebra, a afinidade dos participantes com o GeoGebra, a dicotomia GeoGebra/modelo de ensino tradicional e os gráficos de funções construídos em AGD.

Fomenta a compreensão das funções

No primeiro grupo os entrevistados consideraram que as tarefas construídas com a aplicação GeoGebra "ajudaram bastante" (alunos A17 e A7) a compreender estas funções e trouxeram benefícios à sua aprendizagem. No entender da maioria dos entrevistados o GeoGebra ajudou a melhorar a compreensão das funções exponenciais e logarítmicas, na "componente prática" (alunos A4 e A17). Relativamente ao *software* de geometria dinâmica GeoGebra, a opinião dos alunos A8, A18 e A22 confirma que as ajudou a melhorar a compreensão destes conteúdos. Segundo o aluno A18: "É prática e fácil de se utilizar. É bastante clara.". No terceiro grupo, as respostas dos inquiridos são consensuais, considerando que esta ferramenta ajuda a compreensão dos conteúdos associados à função exponencial e logarítmica.

Afinidade com o AGD

Nas entrevistas os alunos afirmaram que gostaram de usar o GeoGebra (A4, A14, A11, A22 e A1). O aluno A17, a título de exemplo, gostou do uso dos controlos deslizantes e das comparações entre o gráfico original e o gráfico transformado. Já o aluno A7 referiu a facilidade de usar as funcionalidades do GeoGebra. No grupo II destaca-se a opinião do aluno A18: "Eu gosto. É prática e é fácil de se utilizar. É bastante claro.". No grupo III, o aluno A6 gostou de "construir os gráficos [e] determinar os pontos de interseção dos gráficos das funções".

GeoGebra versus modelo tradicional

Para muitos dos participantes, a resolução de tarefas com recurso ao GeoGebra, quando comparadas com os exercícios habituais feitos com papel e lápis, é preferível. É a opinião do aluno A17 ("Com recurso ao GeoGebra é mais agradável"), do aluno A13 ("É mais fácil"), do aluno A19, do aluno A5 ("Porque é menos trabalho para nós"), do aluno A10 ("Acaba por nos dar a resposta") e do aluno A6.

Transformações ao gráfico de funções

A transformação do gráfico das funções foi um aspeto referido com agrado por todos os grupos de entrevistados. Em geral, os alunos gostaram de usar o GeoGebra, destacando pela positiva a construção de gráficos. Para o aluno A18, do grupo II, "Os gráficos ajudam sempre a perceber melhor a função". Citando o aluno A17, do primeiro grupo, "permite comparar o gráfico original com o que é transformado e ver o que dá". Já o aluno A20, ao referir-se às transformações no gráfico das funções, destacou que "dá para ver a variação do gráfico quando mudamos as variáveis. À medida que mudamos, o gráfico também muda. Isso ajuda a perceber.". No grupo dos melhores alunos, muitas respostas centraram-se na visualização dos gráficos das funções (alunos A9, A1 e A11). O aluno A6 enfatiza: "Acrescento ainda mais. A visualização das transformações das funções. Sim, porque ver a função todos nós conseguimos ver na calculadora [gráfica]. Agora ver a transformação da função em tempo real foi algo que só o GeoGebra conseguiu fazer".

4.4.4 Balanço do período em que foi implementada a investigação

Na quarta categoria foram consideradas 4 subcategorias: as dificuldades de ligação à rede sentidas pelos participantes, a adequação do trabalho empírico, as críticas relacionadas com a falta de diversificação de exercícios e um apelo a uma maior frequência no uso de RED.

Dificuldades de ligação à rede wifi

Questionados sobre as dificuldades sentidas na resolução das tarefas, os inquiridos dos três grupos referiram a má qualidade da ligação à *internet*: "Ao primeiro tempo senti dificuldades por falta de ligação à rede. Em certos dias demorou muito tempo a chegar às tarefas" (alunos A13 e A14). O aluno A12 também refere: "Acredito que não seja um problema do GeoGebra, mas às vezes travava, complicava … a situação". Também no grupo III os entrevistados nomeiam as falhas de acesso à rede, "Ainda por cima quando as aulas eram às 8h15m. Aquilo demora imenso tempo a ligar. Ficávamos lá, pelo menos, meia hora à espera." (aluno A9).

Adequação

Inquiridos quanto ao balanço que faziam do trabalho desenvolvido nos dois meses em que decorreu a investigação, os alunos A2 e A12 fazem um balanço positivo. Já os alunos A17 e A7 deram o tempo por bem empregue. No grupo II o aluno A5 refere: "Eu gostei. Acho que foi interessante.". No que respeita ao grupo III, os alunos A6, A19 e A23 classificam positivamente a investigação desenvolvida e os seus propósitos. O aluno A6 concretiza: "É um bom método para ajudar alunos com dificuldade. Eu expliquei muita coisa ao meu par [o colega peruano que assistia às aulas] que ele não entendia. É uma boa ferramenta para isso.".

Diversificação de exercícios

Nestas entrevistas alguns participantes (A1, A6, A9, A13, A19, A23) referiram, mais para o final do estudo, algum cansaço com as tarefas propostas. No grupo III, indicaram que as fichas (guiões) não deveriam ser tão longas (alunos A9, A16 e A1). Expressaram a ideia que, numa fase inicial do estudo, os ajudou mas que, "no fim, já foi um bocado… mais do mesmo" (alunos A1 e A16). O aluno A6 desenvolveu mais, afirmando: "Inicialmente foi bom, para nos dar a conhecer [as matérias]. Mas depois, pelo facto de demoramos tanto tempo a fazer o GeoGebra [isso] fez com que não conseguíssemos praticar tanto. É isso que eu acho!". O aluno A9 esclarece: "As fichas eram muito longas, e às vezes estávamos sempre a fazer o mesmo. Então chegávamos a uma parte da aula em que já estava um bocado farta daquilo". Também é a opinião expressa pelos alunos A1 e A19. Para obviar a esta situação, sugeriram que deveriam ter sido aplicados exercícios mais diversificados, referindo-se a exercícios menos procedimentais, mais focados no abstrato em detrimento do tratamento numérico mais concreto (A6), usando modelação e "com [mais] exercícios do manual" (aluno A19).

Maior frequência no uso de RED

Questionados sobre a frequência com que gostariam que este tipo de tecnologias fossem utilizadas em aula o aluno A17, integrante do grupo I, foi peremptório: "Sempre que possível". O aluno A14 considerou-a "suficiente". No grupo II o aluno A18 afirmou que "deviam ser mais frequentes" opinião corroborada pelos colegas A3, A5, A20 e A22. O grupo III apresenta um leque de respostas mais vasto, tendencialmente menos aberto a experiências deste tipo. “Uma vez por mês”, “pouco”, “Nem [muito] frequente, nem pouco. Usualmente.”, “de vez em quando”, “Poucas vezes. Nunca, não! Porquê nunca não? Porque às vezes é fixe.”, “quando fosse necessário” e “se calhar, na introdução das matérias” foram as respostas anotadas.

4.4.5 Interpretação global da entrevista

No que concerne à análise de conteúdo global da entrevista constata-se que a categoria mais representativa foi a terceira, relativa ao impacto do GeoGebra na aprendizagem e a menos foi a primeira, estudo das funções exponenciais e logarítmicas.

Relativamente à primeira categoria, os alunos relevam as duas subcategorias de forma quase equitativa, com pequeno destaque para a afinidade com a temática. Na segunda categoria, a subcategoria mais mencionada é a adequação das tarefas ao trabalho de pares, seguida da promoção das aprendizagens. A terceira categoria – impacto do GeoGebra na aprendizagem – é a mais referida, sendo que os alunos destacam o fomento na compreensão das funções, a preferência pelas aulas com recurso ao GeoGebra comparativamente ao ensino tradicional, referindo ainda o gosto em trabalhar com o GeoGebra e a importância da visualização das transformações geométricas dos gráficos das funções que a aplicação proporciona. Na quarta categoria a subcategoria mais referida foi a adequação da investigação aos objetivos de aprendizagem propostos, fazendo os participantes um balanço positivo da mesma. Foram, ainda, indicados como pontos fracos a dificuldade de acesso à rede *wifi* em algumas sessões de trabalho, seguida da formulação da vontade de ver mais conteúdos didáticos trabalhados com RED, mencionando por último a sugestão de uma maior diversificação da tipologia de exercícios apresentados ao longo do estudo.

Em suma, apraz-nos registar que, para os inquiridos, o GeoGebra favoreceu a compreensão das funções exponenciais e logarítmicas. Na análise efetuada, contabilizam-se 14 referências na respetiva subcategoria. Saliente-se, a este respeito, a opinião do aluno A4, quando afirma “É uma ferramenta bastante útil que nos ajuda a compreender melhor as funções”.

5 CONCLUSÕES

Após a análise de dados apresentada no capítulo precedente destacam-se, no presente capítulo, estruturado em dois subcapítulos, as principais conclusões da investigação desenvolvida, no primeiro. No segundo e último subcapítulo identificam-se as limitações e constrangimentos do estudo, terminando com sugestões para futuras investigações.

Para facilitar a compreensão das conclusões obtidas, relembra-se que o presente estudo teve como propósito compreender de que forma os alunos, trabalhando colaborativamente em pares e realizando atividades com tarefas de exploração, suportadas no uso do GeoGebra, ultrapassam as suas dificuldades na aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas. Para o concretizar, delinearam-se três questões de investigação que orientaram este estudo:

(i) De que forma pode o *software* de geometria dinâmica GeoGebra contribuir para o ensino das funções exponenciais e logarítmicas?

(ii) Qual a visão dos alunos relativamente às aulas de Matemática A em que usaram as Tecnologias de Informação e Comunicação para promover a sua compreensão sobre funções exponenciais e logarítmicas?

(iii) Qual o impacto do uso das tecnologias na aprendizagem dos alunos no estudo da função exponencial e logarítmica?

5.1 Principais conclusões

A apresentação das principais conclusões deste trabalho será organizada de acordo com as questões de investigação delineadas. Para cada uma delas, faz-se um resumo dos resultados que permitiram subsidiar a sua resposta, guiados ainda pelo enquadramento teórico desenvolvido no segundo capítulo.

5.1.1 De que modo pode o *software* de geometria dinâmica GeoGebra contribuir para o ensino das funções exponenciais e logarítmicas?

A resposta que emergiu de forma mais frequente, quando os alunos foram inquiridos sobre o contributo do GeoGebra para o ensino das funções exponenciais e logarítmicas, foi a facilidade com que o GeoGebra desenha gráficos de funções e manipula transformações ao gráfico das funções, tal como é realçado por autores como Weber (2017), Rosa (2018) ou Anabousy et al. (2014). Nesse sentido, o GeoGebra contribuiu para a mobilização das representações algébrica e gráfica da função exponencial e da função logarítmica, de forma natural e intuitiva. Conclui-se, em particular, que os alunos se aperceberam, com mais acuidade, do que sucede ao gráfico de uma função quando este sofre uma transformação (ou composição de várias transformações) na sua expressão analítica. No que respeita a outras características, nomeadamente aos pontos relativos a extremos e interseção com os eixos coordenados, domínio, contradomínio, monotonia e assíntotas, também se conclui que conseguiram estabelecer uma relação correta entre as características do gráfico original das funções e as do seu transformado.

Os participantes deste estudo empírico adjetivaram o GeoGebra como um programa informático interativo, prático, dinâmico, interessante, motivacional e *user-friendly*, o que vem corroborar a opinião de Abar e Almeida (2018). As suas respostas são validadas por uma exploração intensa do mesmo, observando-se afinco na realização das tarefas propostas tendo, além disso, apresentando durante a sua resolução um número reduzido de dúvidas.

Quanto às aprendizagens, a opinião mais comummente expressa é que o *software* facilitou a compreensão das funções exponenciais e logarítmica, ajudou a consolidar os conceitos lecionados, captou a sua atenção, desenvolveu a autonomia e dinamizou as aulas, o que vai ao encontro do defendido por Bairral e Barreira (2017) relativamente ao uso de ambientes de geometria dinâmica. A análise dos dados revela também que os participantes o acharam benéfico, designadamente no colmatar de falhas relativas a conceitos e procedimentos, na rapidez de cálculo, no fomento de oportunidades de exploração dos conteúdos, no fomento de aptidões tecnológicas e no envolvimento nas tarefas, o que está de acordo com alguns resultados do estudo realizado por Koştur e

Yilmaz (2017). As opiniões negativas centraram-se sobretudo na fraca qualidade de ligação à *internet* que ocorreu nalgumas aulas e, nos alunos com menos apetência para a disciplina, na falta de pré-requisitos.

Da análise efetuada aos resultados da turma do pós-teste, verifica-se que apenas três alunos obtiveram classificação negativa, ao passo que dezoito alunos conseguiram resultado positivo. Quando comparados com os resultados do pré-teste, resolvido logo no início da investigação, destaca-se um incremento nos valores médios, entre o pré e o pós-teste. A comparação dos valores brutos e relativos conseguidos pelos alunos nos testes confirmam esta tendência de acréscimo. Constatou-se, então, uma evolução no desempenho dos alunos, desde o início da investigação. Fazendo uma análise mais fina, considerando os subtópicos do currículo relativos a estas funções verifica-se que, em cinco de oito (monotonia, função inversa, interseção com eixos coordenados, assíntotas e gráfico da função), houve uma evolução significativa nos conhecimentos adquiridos ao longo do estudo, os quais foram desenvolvidos com recursos ao *software* GeoGebra.

No questionário final, a maioria dos participantes afirmou gostar de usar o GeoGebra, considera-o útil ou muito útil, embora não o inclua como ferramenta no seu estudo regular. Mais ainda, a entrevista levada a cabo permitiu triangular as considerações anteriormente descritas. Para os inquiridos o GeoGebra tornou-se um elemento promotor das suas aprendizagens. Destacam a ajuda dada na consolidação de conhecimento matemático e o seu potencial enquanto ferramenta dinâmica e motivadora, o que é de igual modo sustentado por Fonseca et al. (2019) e vai ao encontro dos objetivos do PASEO, designadamente nas áreas de competências do raciocínio e resolução de problemas e do saber científico, técnico e tecnológico.

Em suma, o uso do AGD GeoGebra enquanto estratégia pedagógica inserida numa sequência didática, envolvendo o estudo de funções exponenciais e logarítmicas, contribuiu para a aprendizagem dos alunos. Para estes, sobressai a facilidade na visualização dos gráficos da função e na rapidez de cálculo, o que liberta tempo para explorar outros conteúdos do tema investigado.

5.1.2 Qual a visão dos alunos relativamente às aulas de Matemática A, em que usaram as Tecnologias de Informação e Comunicação para promover a sua compreensão sobre funções exponenciais e logarítmicas?

Na apreciação que fazem ao estudo das funções logarítmicas e exponenciais com as TIC, verifica-se que a maioria dos participantes gostou de as estudar, opinião confirmada na entrevista à turma. Ao compará-las com outras funções já lecionadas verificou-se, paralelamente, que um terço dos inquiridos as considera mais difíceis de compreender, o que está em concordância com alguns estudos já realizados (Kenney & Kastberg, 2013; Sawalha, 2018; Weber, 2002). Esta visão está parcialmente em concordância com a literatura, pecando até por defeito, uma vez que a investigação efetuada relata que alunos deste nível de ensino têm dificuldades severas na sua compreensão no atinente ao logaritmo como inversa da exponencial, no uso da correta notação científica e nas propriedades específicas dos logaritmos (Kenney & Kastberg, 2013; Weber, 2002). No entanto, devemos ter em conta que foram os melhores alunos da turma, por sinal os mais cientes do esforço individual que é necessário empreender na disciplina, aqueles que mais referem a complexidade inerente à aprendizagem destas funções.

É de referir que há duas características associadas às novas tecnologias relevantes para a aprendizagem do conceito de função: a rapidez de cálculo e a imediata visualização do gráfico da função (Ponte & Canavarro, 1997), o que também corresponde à visão dos participantes.

Os dados analisados, a partir da entrevista realizada, sugerem que os participantes valorizaram, para além da visualização do gráfico das funções e suas transformações geométricas, o auxílio das tarefas na compreensão das propriedades algébricas das funções e correspondentes características associadas a seus gráficos, resultados conformes ao defendido por diversos investigadores como, por exemplo, Anabousy et al. (2014), Bairral e Barreira (2017), Koştur e Yilmaz (2017), Rosa (2018) e Silva et al. (2023).

Quando questionados sobre o contributo das TIC na clarificação das dificuldades constatadas ao longo das aulas inseridas na investigação, os participantes têm uma visão otimista, uma vez que as consideram facilitadoras do estudo e da compreensão destas funções. Destaca-se, ainda, a manifestação de vontade expressa, pela maioria dos inquiridos, pelo recurso às tecnologias digitais, no estudo de outros conteúdos matemáticos, o que confirma a importância das tecnologias como uma mais-valia ao nível do desenvolvimento de competências matemáticas, tal como é defendido por vários autores (Araújo, 2014; Koştur & Yilmaz, 2017; Ponte e Canavarro, 1997; Stošić, 2015; Trindade & Bulegon, 2017).

No entanto, no teste diagnóstico os alunos denotaram dificuldades no entendimento do conceito de função inversa de uma função bijetiva o que, no início, limitava o entendimento da função logarítmica como inversa da exponencial. A reciprocidade existente entre estas funções, tanto na representação gráfica, como nos procedimentos analíticos, foi difícil de assimilar. É de realçar que, durante o trabalho de campo, esses conceitos foram trabalhados, concretizados em duas das tarefas que os pares desenvolveram. A definição do domínio das funções exponenciais e logarítmicas, as propriedades algébricas e o esboço do gráfico das funções foram conceitos bem compreendidos pela generalidade dos alunos. Ao invés, durante a intervenção pedagógica, houve necessidade de insistir no estudo da função derivada, no cálculo de limites envolvendo estas funções e, sobretudo, na resolução de equações e inequações envolvendo exponenciais e logaritmos. Para tal, o auxílio da tecnologia, através das aplicações GeoGebra fornecidas, foi, na perceção dos participantes, muito positiva, o que está em concordância com a opinião de vários autores (Cunha et al., 2010; Ponte & Canavarro, 1997; NCTM, 2008; Trindade & Bulegon, 2017).

Face ao anteriormente exposto, pode-se afirmar que a utilização de RED e o reconhecimento da sua importância continua ainda presente na prática educativa (Cunha et al., 2010; Araújo, 2014; Coan et al., 2016; Martins et al., 2017; Trindade & Bulegon, 2017).

5.1.3 Qual o impacto do uso das tecnologias na aprendizagem dos alunos no estudo da função exponencial e logarítmica?

O uso das tecnologias na aprendizagem da função exponencial e logarítmica teve impacto no incremento do interesse dos alunos por este conteúdo, sobretudo porque promoveu aprendizagens mais ativas, o que foi notório no envolvimento dos participantes na realização das tarefas, assim como nos resultados obtidos no pós-teste. O interesse relativo ao estudo destas funções transcendentes foi promovido pela utilização de RED, o que vai ao encontro de resultados de várias investigações (Anabousy et al., 2014; Ribeiro & Vairinhos, 2020; Trindade & Bulegon, 2017).

Da observação realizada pelo investigador evidencia-se, de um modo geral, o bom trabalho colaborativo entre os pares constituídos, na implementação das tarefas propostas. Durante a realização das mesmas, os participantes expressaram os seus pensamentos, trocaram ideias, debateram, apoiaram-se mutuamente e beneficiaram das correções do colega, resultados consistentes com várias investigações (García-Valcárcel et al., 2014; Koştur & Yilmaz, 2017; Ponte et al., 1998). Esta perceção está de acordo com as NCTM (2008), que indicam que os alunos aprendem construindo ativamente novos conhecimentos, partindo das experiências que realizam e dos seus conhecimentos anteriores.

A motivação pelo estudo destas funções foi referido pelos inquiridos e observado durante o trabalho de campo, apesar de os alunos nem sempre terem concretizado as tarefas propostas com sucesso. Foi também notório o empenho geral dos alunos, que procuraram responder a quase todos os itens, facto evidenciado em estudos de Koştur e Yilmaz (2017) e Sawalha (2018). Segundo os alunos, relativamente ao trabalho realizado em duplas usando as novas tecnologias, esta modalidade impactou positivamente na aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas apesar de, nalguns casos, os alunos com mais dificuldades tenderem a esperar que os colegas mais capacitados desenvolvessem a tarefa.

Como se pretendia atribuir a primazia da ação aos alunos, deu-se autonomia a estes na exploração e na resolução das tarefas, colocando-se o investigador num papel de orientador do seu trabalho e promovendo, assim, um ambiente promotor da autonomia dos alunos.

Tendo em consideração o objetivo principal desta investigação, compreender de que forma os alunos, trabalhando colaborativamente em pequenos grupos e realizando atividades com tarefas de exploração, suportadas no uso do GeoGebra, superam as suas dificuldades na aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas, pode-se concluir que os dados recolhidos durante este estudo empírico reforçam a importância das tecnologias digitais, enquanto promotoras das aprendizagens matemáticas, refletidas num maior interesse e consequente empenho dos alunos nesta área do conhecimento.

Assim, é de reforçar que os atuais programas de matemática recomendam o uso das tecnologias (Silva et al., 2023), embora haja autores que defendem que estas sejam usadas com moderação (Bairral & Barreira, 2017; Coutinho & Lisbôa, 2011). Mais ainda, as indicações metodológicas vigentes recomendam o uso de tecnologias, pois estas induzem uma rápida execução de procedimentos rotineiros e concedem oportunidades temporais aos alunos, permitindo-lhes analisar exemplos diversos e diferentes representações dos conteúdos, que no passado seriam impraticáveis (NTCM, 2008). E, tendo em consideração o presente estudo, o uso adequado das tecnologias potencia aprendizagens mais ativas, envolvendo mais os alunos no processo de construção de conhecimento, tornando-os mais participativos e responsáveis.

5.2 Limitações e sugestões para estudos futuros

Nesta fase derradeira da dissertação indicaremos limitações ao estudo sentidas durante a investigação e apresentaremos sugestões para futuras intervenções. As limitações, constrangimentos e sugestões apresentadas resultam da análise da informação recolhida pelo investigador nas fases de preparação, implementação e monitorização final do projeto.

5.2.1 Limitações e constrangimentos do estudo

Comecemos por referir que a gestão de tempo foi uma limitação que esteve sempre presente na mente do investigador. O desenvolvimento de uma intervenção pedagógica deste género numa turma de 12.º ano, cujos alunos pretendem o prosseguimento de estudos universitários, pressiona o professor. Houve a constante preocupação de integrar de forma harmónica as tarefas na sequência didática que contempla o estudo destas funções no programa da disciplina, proporcionando aos alunos as aprendizagens esperadas de forma equilibrada, a que acresce a responsabilidade inerente a conteúdos que são objeto de exame nacional. Não se descurou o cumprimento do programa e, assim sendo, foi preciso compensar com aulas extra todos os imprevistos que sempre surgem. Por outro lado, o fator tempo impediu a conclusão organizada de algumas tarefas e limitou o aprofundamento das discussões entre pares que deveriam ter lugar a seguir. Este fator também influiu na entrevista final feita aos alunos, adiada para o terceiro período, altura que a tornou mais difícil foi de concretizar.

Em termos de avaliação interna, houve também o cuidado de avaliar com justiça o empenho dos alunos nas atividades relacionadas com a investigação, sem causar desequilíbrios com as outras turmas de 12.º ano não integradas no estudo.

Um constrangimento sentido pelo investigador foi reunir uma sequência de tarefas coerente que constituíssem um desafio interessante para os alunos e conduzissem a aquisições matemáticas significativas no domínio das funções exponencial e logarítmica. Outro constrangimento a realçar respeita à heterogeneidade na constituição de algumas duplas. O investigador rejeitou a formação de grupos de nível, por forma a incluir todos os alunos da turma na investigação; esse objetivo foi atingido, embora pontualmente surgissem queixas da parte do membro mais competente do par.

Os participantes conheciam o ambiente de geometria dinâmica GeoGebra, mas apenas numa perspetiva passiva. Estavam habituados às projeções que os professores apresentavam nas aulas, na explicação das matérias lecionadas no domínio da geometria e do estudo de algumas funções. Foi para eles estranho usar, numa fase inicial, os comandos GeoGebra indicados nos guiões das tarefas propostas e explorar enquanto utilizadores as potencialidades proporcionadas pela ferramenta. Tornou-se, então, necessário intervir e ajudá-los a ultrapassar essas dificuldades, que se foram dissipando com o decorrer da experiência.

Na escola, a ligação à *internet* no início das manhãs era lenta, o que levou a atrasos na consecução de alguns trabalhos. Com os constrangimentos de tempo atrás referidos, esta foi outra dificuldade a relatar.

Por fim, deve assinalar-se as limitações associadas à minha qualidade de observador participante. Esta dualidade dificulta a tomada de notas pelo professor, uma vez que a relação de proximidade implicou que as dúvidas apresentadas pelos pares tivessem sempre prioridade. As premissas já enunciadas no quadro teórico desta dissertação acabaram por se verificar.

5.2.2 Recomendações para estudos futuros

Uma investigação em educação não tem um final claramente definido. O fecho da investigação não deve ser entendido como uma meta que se atingiu, mas sim como o ponto de partida para o aprofundamento de novas questões a que é necessário responder.

Ouvida a opinião dos alunos, estes declaram gostar de usar tarefas recorrendo ao GeoGebra. Dada a apetência por eles mostrada para as realizar, seria interessante diversificar as áreas temáticas em que um estudo desta tipologia se poderia aplicar, nos dois anos iniciais do ensino secundário, quando a pressão inerente aos exames nacionais não é tão notória. Refiro-me, por exemplo, à geometria analítica ou às funções trigonométricas. Relativamente à investigação que agora se concluiu sobre o uso de RED no ensino e aprendizagem das funções exponencial e logarítmica, tendo em linha de conta a perceção do investigador e dissecadas as críticas dos participantes, há duas sugestões a fazer: em primeiro lugar, reduzir ligeiramente o número de tarefas a propor e, em segundo lugar, diversificar um pouco mais o tipo de tarefas, que poderão tornar-se mais abertas, de modo a torná-las mais desafiantes para os alunos. De facto, nas duas últimas tarefas o envolvimento dos alunos diminuiu.

Os atuais *curricula* preconizam que se deve apoiar a aprendizagem em tarefas, contextos e recursos diversificados (Silva et al., 2023). Atendendo à importância do uso de tecnologias e da implementação de tarefas nas aulas de matemática, e sabendo que a dinâmica de uma aula envolvendo tarefas é muito exigente para o professor em todas as suas fases, seria importante que na formação inicial e contínua de professores se apostasse nestas dinâmicas, para que depois se aplicassem de forma consistente em contexto de sala de aula.

Inovar e investir em práticas enriquecedoras, favorecendo o desenvolvimento da criatividade e atitudes positivas face à matemática é outro propósito do atual currículo. A programação é uma via de trabalho promissora e, como tal, deve ser incentivada. O pensamento computacional, refletido na Novas Aprendizagens Essenciais em articulação com o PASEO, é algo em que professores e alunos vão ter que mergulhar. Daí que se recomende que no futuro se investigue o impacto da linguagem de programação Python na aprendizagem de funções reais de variável real.

A finalizar este capítulo, importa fazer uma breve reflexão sobre o trabalho efetuado. Quanto a mim, a experiência foi enriquecedora e tornou-se uma inesquecível fonte de aprendizagem acerca das vicissitudes de um estudo de investigação científica; para os alunos, a experiência revelou-se profícua e enriquecedora, incitando-os a tornarem-se pró-ativos e mais responsáveis pelas suas aprendizagens. Acho que a aplicação de uma estratégia pedagógica recorrendo ao GeoGebra, embora seja árdua para quem a planifica e elabora, contribui para a aprendizagem dos alunos. É gratificante ficar com a sensação de que os alunos experienciaram métodos de aprendizagem matemática tão solicitados no presente.

Espera-se que este trabalho alavanque novas pesquisas em educação matemática, em particular no ensino secundário e numa altura em que novas orientações curriculares vão entrar em vigor. As aprendizagens ativas integrando tecnologia serão cada vez mais solicitadas, constituindo novas práticas enriquecedoras das aprendizagens. A ilação a tirar é que é fundamental encarar com naturalidade uma maior utilização, em aula, de recursos educativos digitais.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abar, C., & Almeida, M. (2018). GeoGebra como organizador de recursos tecnológicos para o ensino e aprendizagem da matemática em uma formação de professores. *Ensino da Matemática em Debate*, *4*(2), 136-144. https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/35160

Almeida, P. (2018). Tecnologias digitais em sala de aula: o professor e a reconfiguração do processo educativo. *Da investigação às práticas: estudos de natureza educacional*, *8*(1), 4-21. https://doi.org/10.25757/invep.v8i1.124

Amado, J. (2014). *Manual de investigação qualitativa em educação* (2.ª ed.). Imprensa da Universidade de Coimbra. https://doi.org/10.14195/978-989-26-0879-2

Anabousy A., Daher W., & Baya'a, N. (2014). Conceiving function transformations in different representations: middle school students working with technology. *Mathematics Education*, *9*(2), 99-114. https://doi.org/10.29333/iejme/284

Araújo, I. (2014). *Aprendizagem matemática no ensino superior: a influência da plataforma M@T-educar com sucesso* [Tese de doutoramento, Universidade de Aveiro]. Repositório Institucional da Universidade de Aveiro. http://hdl.handle.net/10773/12826

Azevedo, J. (2005, Outubro, 3-5). *Acesso ao mundo digital em educação: uma oportunidade para as pedagogias da aprendizagem* [Comunicação por convite]. Congresso Internacional "Mundo Digital, Cultura y Educación", promovido pelo Ministério da Educação e Ciência de Espanha e pela Organização de Estados Iberoamericanos, Saragoça, Espanha.

Bairral, M. A., & Barreira, J. C. F. (2017). Algumas particularidades de ambientes de geometria dinâmica na educação geométrica. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, *6*(2), 46-64. https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/35378

Bardin, L. (2009). *Análise de conteúdo* (4.ª ed.). Edições 70.

Batista, B., Rodrigues, D., Moreira, E., & Silva, F. (2021). Técnicas de recolha de dados em investigação: inquirir por questionário e/ou inquirir por entrevista? In P. Sá, A. P. Costa, & A. Moreira (Orgs.), *Reflexões em torno de metodologias de investigação: recolha de dados* (Vol. 2, pp. 9-12). UA Editora. https://doi.org/10.34624/ka02-fq42

Bloor, M., Frankland, J., Thomas, M., & Robson, K. (2001). *Focus groups in social research*. Sage.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

Borba, M. C., & Penteado, M. G. (2003). *Informática e educação matemática* (3.ª ed.). Autêntica Editora.

Brunheira, L., & Ponte, J. P. (2016, Novembro, 19-20). *Realizar construções geométricas com o GeoGebra: O contributo do AGD para a estruturação geométrica*. Encontro de Investigação em Educação Matemática, Universidade de Évora.

Canavarro, A. P., & Santos, L. (2012). Explorar tarefas matemáticas. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino da Matemática* (pp. 99-104). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. http://hdl.handle.net/10174/8305

Carvalho, A., & Gomes, T. (2009). Portal de avaliação sobre software educativo multimédia e jogos. In P. Dias, & A. Osório (Orgs.), *VI Conferência Internacional de TIC na Educação*, Maio 14-15, 2009, Braga, (pp. 1967-1984). Centro de Competência da Universidade do Minho. https://hdl.handle.net/1822/10025

Castanheira, M. T. (Coord.). (2017). *Exames Finais Nacionais — Ensino Secundário, Relatório Nacional: 2010-2016*. Instituto de Avaliação Educativa, I. P. https://iave.pt/relatorios/

Coan, L., Viseu, F., & Moretti, M. (2016). O uso das TIC no ensino: apontamentos de professores de Matemática do IFSC/Florianópolis. In L. Coan, & M. Moretti (Orgs.), *Aplicações matemáticas com Tecnologias de Informação e Comunicação* (pp 17-42). Editora Insular.

Costa, F. A. (1999, Setembro, 22-24). *Contributos para um Modelo da Avaliação de Produtos Multimédia Centrado na Participação dos Professores*. 1.º Simpósio Ibérico de Informática Educativa, Aveiro. http://hdl.handle.net/10451/3153

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e prática* (2.ª ed.). Edições Almedina.

Coutinho, C. P., & Lisbôa, E. (2011). Sociedade da informação, do conhecimento e da aprendizagem: Desafios para educação no século XXI. *Revista de Educação*, *17*(1), 5-22. https://hdl.handle.net/1822/14854

Creswell, J. W. (2003). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (2nd ed.). Sage Publications.

Cunha, B., Duarte, E., & Martins, J. (2010). *A matemática com as TIC no processo de ensino-aprendizagem: construção de uma unidade didática* [Pós-Graduação em TIC em Contextos de Aprendizagem]. Repositório Científico da Escola Superior de Educação de Paula Frassinetti. http://hdl.handle.net/20.500.11796/855

Dalmoro, M., & Vieira, K. (2013). Dilemas na construção de escalas Tipo Likert: o número de itens e a disposição influenciam nos resultados? *Revista Gestão Organizacional*, *6*(3), 161-174. https://doi.org/10.22277/rgo.v6i3.1386

De Bruyne, P., Herman, J., & De Schoutheete, M. (1974). *Dynamique de la recherche en sciences sociales*. Presses Universitaires de France.

Decreto-Lei n.º 176/2012 do Ministério da Educação (2012). Diário da República n.º 149, Série I de 02-08-2012 (pp. 4068-4071).

https://diariodarepublica.pt/dr/detalhe/diario-republica/149-2012-134180

De Ketele, J. M., & Roegiers, X. (1999). *Metodologia da recolha de dados: fundamentos dos métodos de observações, de questionários, de entrevistas e de estudos de documentos*. Instituto Piaget.

Despacho normativo n.º 702/2023 do Ministério da Educação (2023). Aprendizagens essenciais de Matemática do ensino secundário. Diário da República n.º 10, Série II de 13-01-2023. https://dre.pt/dre/detalhe/despacho/702-2023-206092970

D'Hainaut, L. (1997). *Conceitos e métodos da Estatística* (2.ª ed., Vol. 1). Fundação Calouste Gulbenkian.

Dooren, W. V., Bock, D. D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2004, Outubro). Remedying secondary school students' illusion of linearity: a teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and Instruction*, *14*(5), 485-501. https://www.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.019

El Mhouti, A., Erradi, M., & Nasseh, A. (2013). An Evaluation Model of Digital Educational Resources. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET)*, *8*(2), 29-35. https://doi.org/10.3991/ijet.v8i2.2501

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed., pp 119-161). Macmillan.

Figueiredo, M., Amado, N., Bidarra, J., & Carreira, S. (2015, Outubro, 28-31). *A realidade aumentada na aprendizagem da matemática no ensino secundário*. CIEMeLP 2015: Conferência Internacional do Espaço Matemático em Língua Portuguesa, Coimbra, Portugal.

Flick, U. (2005). *Métodos qualitativos na investigação científica*. Monitor.

Fonseca, C. I. (2013). *As funções exponencial e logarítmica nos manuais escolares do 12.º ano*. [Dissertação de mestrado, Departamento de Educação da Universidade de Aveiro]. Repositório Institucional da Universidade de Aveiro. http://hdl.handle.net/10773/11585

Fonseca, D. S., Prado, M. E. B. B., & Powell, A. B. (2019, Setembro). As tecnologias digitais da informação e comunicação no contexto do PIBID. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *12*(2), 183-190. https://doi.org/10.17921/2176-5634.2019v12n2p183-190

Fontanella, B. (2021). Participantes em investigação qualitativa. In S. P. Gonçalves, J. P. Gonçalves, & C. G. Marques (Coords.), *Manual de investigação qualitativa: conceção, análise e aplicações* (pp 25-40). Pactor.

Gall, M. D., Gall, J. P., & Borg, W. (2003). *Educational research: an introduction* (7th ed.). Allyn and Bacon.

García-Valcárcel, A., Basilotta, V., & López, C. (2014, Janeiro). Las TIC en el aprendizaje colaborativo en el aula de Primaria y Secundaria. *Comunicar Revista Cientifica de Comunicación y Educación*, *42*(21). https://doi.org/10.3916/C42-2014-06

Gómez, E. E. (2021). Desenhos de investigação qualitativa. In S. P. Gonçalves, J. P. Gonçalves, & C. G. Marques (Coords.), *Manual de investigação qualitativa: conceção, análise e aplicações* (pp 5-23). Pactor.

Gonçalves, S. P., & Gonçalves, J. P. (2021). Qualidade e ética na investigação qualitativa. In S. P. Gonçalves, J. P. Gonçalves, & C. G. Marques (Coords.), *Manual de investigação qualitativa: conceção, análise e aplicações* (pp 41-59). Pactor.

Hohenwarter, M. (2013). GeoGebra 4.4 – from Desktops to Tablets. *Indagatio Didactica*, *5*(1), 8-18. https://doi.org/10.34624/id.v5i1.4296

Junior, O., Aguiar, Y. P., & Moura, H. (2021, Junho). Taxonomia para Avaliação de Recursos Digitais de Aprendizagem – TARDA – Versão 2.0. *Revista lbérica de Sistemas e Tecnologias de Informação*, *42*, 120-135. https://doi.org/10.17013/risti.42.120-135

Kenney, R., & Kastberg, S. (2013). Links in learning logarithms. *Australian Senior Mathematics Journal*, *27*(1), 12-20. https://search.informit.org/doi/10.3316/informit.745507735589796

Koştur, M., & Yilmaz, A. (2017, Dezembro). Technology support for learning exponential and logarithmic functions. *Ihlara Journal of Educational Research*, *2*(2), 50-68. https://hdl.handle.net/20.500.12451/5249

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (2008). *Investigação Qualitativa: Fundamentos e Práticas* (3.ª ed.). Instituto Piaget.

Lopes, N. M. (2018, Setembro). A sociedade digital: a redefinição da escola, do papel do professor e do aluno. *Saber & Educar*, *25*, 1-9. http://revistaold.esepf.pt/index.php/sabereducar/article/view/320/375

Lourenço, V. (Coord.), Duarte, A., Nunes, A., Amaral, A., Gonçalves, C., Mota, M., & Mendes, R. (2019). *PISA 2018 – Portugal. Relatório Nacional*. Instituto de Avaliação Educativa, I. P. https://iave.pt/estudo-internacional/pisa/

Lucas, M., & Moreira, A. (2018). *DigCompEdu: quadro europeu de competência digital para educadores.* Universidade de Aveiro.

Marques, R. J. (2013). *As tarefas de modelação matemática no ensino e na aprendizagem das funções exponencial e logarítmica: um estudo com alunos do 12.º ano de escolaridade*. [Dissertação de mestrado, Instituto de Educação da Universidade do Minho]. RepositóriUM – Repositório da Universidade do Minho. https://hdl.handle.net/1822/29008

Martins, G., Gomes, C. A. S., Brocardo, J. M. L., Pedroso, J. V., Carrilo, J. L. A., Sila, L. M. V., Encarnação, M. M. G. A., Horta, M. J. V. C., Calçada, M. T. C. S., Nery, D. A. V., Rodrigues, S. M. C. V. (2017). Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória. Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação.

Masola, W., & Allevato, N. (2019, Janeiro). Dificuldades de aprendizagem matemática: algumas reflexões. *Educação Matemática Debate*, *3*(7), 52-67. https://doi.org/10.24116/emd.v3n7a03

Meirinhos, M., & Osório, A. J. (2014). A colaboração em ambientes virtuais: aprender e formar no século XXI. Associação ArcaComum.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education* (2nd ed.). Jossey-Bass Publishers.

Michelsen, C. (2006). Functions: a modelling tool in mathematics and science. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(3), 269-280.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis* (2nd ed.). Sage Publications.

Miranda, G. L. (2007). Limites e possibilidades das TIC na educação. *Sísifo. Revista de Ciências da Educação*, *3*, 41-50. http://sisifo.ie.ulisboa.pt/index.php/sisifo/article/view/60

Mónico, L. S., Alferes, V. R., Castro, P. A., & Parreira, P. M. (2017). A observação participante enquanto metodologia de investigação. In A. P. Costa, S. Tuzzo, & C. Brandão (Eds.), *6.º Congresso Ibero-Americano em Investigação Qualitativa*, *Julho 12-14*, *2017*, *Salamanca*, *Espanha*. (Vol. 3, pp. 724-733). Ludomedia. https://proceedings.ciaiq.org/index.php/ciaiq2017/article/view/1447/1404

Moreira, J. A., Henriques, S., & Barros, D. (2020). Transitando de um ensino remoto emergencial para uma educação digital em rede, em tempos de pandemia. *Dialogia*, *34*, 351-364. https://doi.org/10.5585/Dialogia.N34.17123

Morse, J. M. (1994). Designing funded qualitative research. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 220-235). Sage Publications.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Associação de Professores de Matemática.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (2.ª ed.). Associação de Professores de Matemática.

Pacheco, M., & Andreis, G. (2018). Causas das dificuldades de aprendizagem em matemática: percepção de professores. *Revista Principia – Divulgação Científica e Tecnológica do IFPB*, *38*, 105-119. https://periodicos.ifpb.edu.br/index.php/principia/article/viewFile/1612/806

Pereira, G. M. (2019). *O impacto das TIC: no desenvolvimento e aprendizagem das crianças e no papel da escola* [Dissertação de mestrado, Faculdade de Letras da Universidade do Porto]. Repositório Aberto da Universidade do Porto. https://hdl.handle.net/10216/124555

Pires, M. M. (2001). *A diversificação de tarefas em matemática no ensino secundário: um projeto de investigação-acção* [Dissertação de mestrado, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa]. Associação de Professores de Matemática.

Pires, M. V. (2011). Tarefas de investigação na sala de aula de Matemática: práticas de uma professora de Matemática. *Quadrante*, 20(*1*), 31-53.

Ponte, J. P. (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. *Educação e Matemática*, *15*, 3-9. http://hdl.handle.net/10451/4473

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132. http://hdl.handle.net/10451/3007

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 13-27). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. http://www.ie.ulisboa.pt/ publicacoes/ebooks/praticas-profissionais-dos-professores-de-matematica

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Autêntica Editora.

Ponte, J. P., & Canavarro, A. P. (1997). *Matemática e novas tecnologias*. Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: implicações curriculares*. Instituto de Inovação Educacional.

Quivy, R., & Campenhoudt, L. V. (2003). *Manual de investigação em ciências sociais* (3.ª ed.). Gradiva.

Ramos, J. L., Teodoro, V. D., & Ferreira, F. M. (2011). Recursos educativos digitais: reflexões sobre a prática. Cadernos SACAUSEF I. Ministério da Educação – Direção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Rapp, M. L. (2017). *Integração das TIC nos processos de ensino e aprendizagem pelos professores do 1.º e 2.º Ciclo de uma escola portuguesa*. Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa.

Rebolo, A. (2021). Observação. In S. P. Gonçalves, J. P. Gonçalves, & C. G. Marques (Coords.), *Manual de investigação qualitativa: conceção, análise e aplicações* (pp 87-101). Pactor.

Ribeiro, J. (2021). O incontornável problema da coleta de dados. In P. Sá, A. P. Costa, & A. Moreira (Orgs.), *Reflexões em torno de Metodologias de Investigação: recolha de dados* (Vol. 2, pp. 9-12). UA Editora. https://doi.org/10.34624/ka02-fq42

Ribeiro, S., & Vairinhos, M. (2020). Realidade Aumentada no Ensino de Matemática. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.30899.66087

Rodrigues, A. L. (2019). A integração pedagógica das tecnologias digitais na formação ativa de professores. In A. P. Lombardi (Org.), *Arqueologia das Ciências Humanas e Sociais Aplicadas* (Vol. 3, pp. 24-37). Atena Editora.

Rodríguez-Gómez, G., Gil-Flores, J., & Garcia-Jiménez, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa* (2.ª ed.). Ediciones Aljibe.

Rosa, M. (2018). *Transformações geométricas dos gráficos de funções: um estudo no 10.º ano, com recurso à tecnologia* [Dissertação de mestrado, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa. http://hdl.handle.net/10451/36540

Santos, C. A., & Moraes, D. R. (2009). *Tecnologia educacional no contexto escolar: contradições, desafios e possibilidades*. http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2085-8.pdf

Santos, K. S., Ribeiro, M. C., Queiroga, D. E., Silva, I. A., & Ferreira, S. M. (2020). O uso de triangulação múltipla como estratégia de validação em um estudo qualitativo. *Revista Ciência & Saúde Coletiva*, *25*(2), 655-664. https://doi.org/10.1590/1413-81232020252.12302018

Sá, C. M. (2019). *Flexibilidade curricular e perfil do aluno para o século XXI* (1.ª ed.). UA Editora.

Sawalha, Y. (2018). *The effects of teaching exponential functions using authentic problem solving on students' achievement and attitude*. [Tese de Doutoramento, Wayne State University]. Wayne State University Dissertations. https://digitalcommons.wayne.edu/oa_dissertations/1959

Serrão, A., Simões, P., & Pires, R. (2021). *Estudo de Aferição Amostral do Ensino Básico 2021, Volume I – Resultados nacionais*. Instituto de Avaliação Educativa, IP. https://iave.pt/relatorios/

Silva, I., Veloso, A. L., & Keating, J. B. (2014). Focus group: Considerações teóricas e metodológicas. *Revista Lusófona de Educação*, *26*(26), 175-190. https://hdl.handle.net/1822/32357

Silva, J. C. (Coord.), Rodrigues, A., Domingos, A., Albuquerque, C., Cruchinho, C., Martins, H., Almiro, J., Gabriel, L., Martins, M. E., Santos, M. T., Filipe, N., Correia, P., Espadeiro, R. G., & Carreira, S. (2023). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Secundário*. ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/

Silva, P., & Fortunato, M. (2021). Modera, observa, escuta e foca-te na conversa de grupo – uma reflexão crítica. In P. Sá, A. P. Costa, & A. Moreira (Orgs.), *Reflexões em torno de Metodologias de Investigação: recolha de dados* (Vol. 2, pp. 37-51). UA Editora. https://doi.org/10.34624/ka02-fq42

Silva, S. V. (2003). Critérios da usabilidade: um auxílio à qualidade do software. *Revista Vértices*, *5*(2), 111-122. https://doi.org/*10.5935/1809-2667.20030014*

Stake, R. (2010). *Qualitative research: studying how things work*. The Guilford Press.

Stake, R. (2016). *A arte da investigação com estudos de caso* (4.ª ed.). Fundação Calouste Gulbenkian.

Stošić, L. (2015). The importance of educational technology in teaching. *International Journal of Cognitive Research in Science, Engineering and Education*, 3(*1*), 111-114. https://doi.org/10.23947/2334-8496-2015-3-1-111-114

Trindade, L. P., & Bulegon, A. M. (2017). GeoGebra: recurso tecnológico no ensino da matemática. In L. Tarouco, & C. Abreu (Orgs.), *Mídias na Educação: a pedagogia e a tecnologia subjacentes* (pp. 139-159). Editora Evangraf. https://hal.science/hal-01837242

Unser, C. E. (2017). A Study on The Positives and Negatives of Using Technology In The Classroom. *Undergraduate Honors College Theses 2016-18*. http://digitalcommons.liu.edu/post_honors_theses/18

Vale, I. (2004). Algumas notas sobre investigação qualitativa em educação matemática: o estudo de caso. *Revista da ESE*, *5*, 171-202.

Weber, K. (2002, Julho, 1-6). *Students' understanding of exponential and logarithmic functions* [Apresentação oral]. Second international conference on the teaching of mathematics. Universidade de Creta, Grécia. https://eric.ed.gov/?id=ED477690

Weber, C. (2017). Multiple models for teaching logarithms: with a focus on graphing . In T. Dooley, & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME10, Fevereiro 1-5, 2017, Dublin, Irlanda* (pp. 537-544). DCU Institute of Education and ERME.

Wolcott, H. (2001). *Writing up qualitative research* (2nd ed.). Sage Publications.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods* (2nd ed., Vol. 5). Sage Publications.

7 ANEXOS

Anexo 1 – Pedido de autorização à Direção da Escola

Ex.mo Senhor Diretor
da Escola Secundária de ____________________:

Eu, Alberto Carlos Pereira Alves Rodrigues Codeço, aluno do 2.º ano do Curso de Mestrado em Tecnologias de Informação e Comunicação em Educação, que frequento na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, e professor do quadro da Escola Secundária de ____________________, venho por este meio solicitar autorização a V. Ex.cia para desenvolver, com uma turma do 12.º ano desta escola do curso de ciências e tecnologias, um projeto de investigação intitulado "Recursos educativos digitais no ensino e aprendizagem das funções exponencial e logarítmica". O projeto será orientado pela Professora Doutora Isabel Araújo e pelo Professor Doutor Pedro Faria.
Para a concretização deste objetivo preciso de recolher dados através de entrevistas realizadas aos alunos, da análise de trabalhos elaborados pelos alunos e de gravações áudio e vídeo de aulas, por serem métodos com grande eficácia de registo. O anonimato das fontes e da escola, seguindo os padrões éticos associados a esta tipologia de projeto, será assegurado. Todos os dados obtidos serão confidenciais e só serão usados para evidenciar a experiência de ensino e aprendizagem comprometendo-me, ainda, a não prejudicar o processo de aprendizagem e avaliação dos alunos. Será solicitada autorização aos Encarregados de Educação dos alunos para a participação neste projeto de investigação.

Pedindo deferimento a esta minha solicitação e agradecendo desde já a atenção que se digne dispensar a este assunto, subscrevo-me com os melhores cumprimentos,

Instituto Politécnico de Viana do Castelo, 21 de novembro de 2022

Atenciosamente,

____

(Alberto Carlos Pereira Alves Rodrigues Codeço)

A professora orientadora,

____

(Professora Doutora Isabel Araújo)

Anexo 2 – Consentimento informado para participação em investigação

CONSENTIMENTO INFORMADO, LIVRE E ESCLARECIDO PARA PARTICIPAÇÃO EM INVESTIGAÇÃO

Estimado(a) Encarregado(a) de Educação,

No âmbito do curso de Mestrado em Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação, da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, pretendo realizar uma investigação centrada na área do uso de recursos educativos digitais no ensino e aprendizagem das funções exponencial e logarítmica, na turma em que o seu educando se encontra. A investigação será orientada pela Professora Doutora Isabel Araújo e pelo Professor Doutor Pedro Faria.

Para a concretização desta investigação será necessário proceder à recolha de dados através de diferentes meios, entre eles, registos fotográficos e vídeos das atividades referentes ao estudo. Os registos serão confidenciais e utilizados exclusivamente para a realização desta investigação. Todos os dados serão devidamente codificados garantindo, assim, o anonimato das fontes quando a dissertação for publicada. Comprometo-me a não prejudicar o processo de aprendizagem e avaliação do seu educando e comprometo-me ainda à destruição dos dados recolhidos após a publicação dos resultados.

Venho por este meio solicitar a sua autorização para que o seu educando participe nesta investigação, permitindo a recolha dos dados acima mencionados. É de salientar que estarei ao seu dispor para prestar qualquer esclarecimento adicional que julgue necessário.

Agradeço desde já a sua disponibilidade e colaboração, solicito que assine a declaração abaixo, devendo posteriormente destacá-la e devolvê-la.

O professor/Investigador

____

(Alberto Carlos Codeço)

Eu, ____, Encarregado(a) de Educação do aluno ____, nº _________ da turma _____, do 12º ano, declaro que autorizo/não autorizo (riscar o que não interessa) a participação do meu educando no estudo acima referido, conduzido pelo Professor Alberto Codeço, e na recolha de dados necessária.

Data: ___ / ___/________ Assinatura: _________________________________

Anexo 3 – Questionário inicial – Caracterização da turma

QUESTIONÁRIO INICIAL - CARACTERIZAÇÃO DA TURMA

Este questionário insere-se no âmbito do curso de Mestrado em Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação, da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo. É uma investigação académica centrada no uso de recursos educativos digitais no ensino e aprendizagem das funções exponencial e logarítmica.

As questões aqui apresentadas têm como objetivo recolher informação que permitirá conhecer melhor as caraterísticas dos alunos da turma, as suas reflexões relativas à disciplina de Matemática A e a outras disciplinas, o tempo dedicado ao estudo e as suas expectativas futuras.

A informação recolhida será confidencial e usada exclusivamente para fins de investigação, havendo o compromisso de assegurar o anonimato dos inquiridos. As respostas não terão influência alguma na avaliação.

Solicito, por isso, a tua colaboração. Responde de forma sincera e responsável. Não há respostas incorretas.

Muito obrigado pela tua colaboração!

Género

- ○ Masculino
- ○ Feminino

Idade

	16 anos	17 anos	18 anos	19 anos
Idade	○	○	○	○

Repetiste algum ano? Em caso afirmativo, indica o número de retenções.

- ○ Nenhuma
- ○ 1 retenção
- ○ 2 retenções
- ○ Mais de 2 retenções

Em que dias da semana geralmente estudas?

☐ 2ª feira ☐ 3ª feira ☐ 4ª feira ☐ 5ª feira
☐ 6ª feira ☐ Sábado ☐ Domingo

Quais são as tuas disciplinas favoritas?

☐ Aplicações Informáticas B ☐ Educação Física ☐ Matemática A
☐ Português ☐ Química ☐ Biologia e Geologia
☐ Filosofia ☐ Física e Química A ☐ Inglês

Quais são as disciplinas em que tens mais dificuldade?

- [ ] Aplicações Informáticas B
- [ ] Educação Física
- [ ] Matemática A
- [ ] Português
- [ ] Química

Estudas sozinho(a)?

- ○ Sim
- ○ Não

Se respondeste não à questão anterior, indica com quem estudas.

- ○ Colegas da escola
- ○ Amigos
- ○ Familiares
- ○ Outros

Assinala a opção que se adequa à tua situação.

	Sim	Não
Tens computador em casa?	○	○
Tens *internet* em casa?	○	○

Se respondeste sim na questão anterior, indica as tarefas para as quais usas o computador.

- [ ] Submeter trabalhos
- [ ] Enviar ficheiros
- [ ] Descarregar ficheiros
- [ ] Fazer trabalhos escolares
- [ ] Apresentar trabalhos escolares
- [ ] Resolver exercícios
- [ ] Resolver testes
- [ ] Ver vídeos
- [ ] Conversar com os amigos
- [ ] Ver powerpoints e afins
- [ ] Navegar nas redes sociais
- [ ] Outras tarefas

Que profissão desejas para o futuro?

Quantas horas estudas por semana, em média, para a disciplina de Matemática A?

Não estudo
Menos de 1 hora
De 1 a 2 horas
De 2 a 3 horas
De 3 a 5 horas
De 5 a 8 horas
Mais de 8 horas

Que tipo de tarefas gostas mais de realizar nas aulas de Matemática A?

- [ ] Exercícios
- [ ] Problemas
- [ ] Tarefas exploratórias
- [ ] Investigações/trabalhos de grupo
- [ ] Tarefas envolvendo comunicação matemática
- [ ] Tarefas envolvendo computador
- [ ] Tarefas com recurso à calculadora gráfica
- [ ] Demonstrações
- [ ] Apresentações orais
- [ ] Outras

Se respondeste "Outras" na questão anterior, explicita-a.

Como preferes trabalhar nas aulas de Matemática A?

- ○ Individualmente
- ○ A pares (grupos de 2)
- ○ Em grupo (mais de 2 alunos), constituído por alunos com classificações semelhantes
- ○ Em grupo (mais de 2 alunos), constituído por alunos com classificações diferentes

Na disciplina de Matemática qual foi, até hoje, a tua matéria preferida?

Na disciplina de Matemática qual foi a matéria que menos te agradou?

De entre os vários métodos para aprender Funções, indica, por ordem decrescente, os três que mais preferes.

Exposição da matéria	Uso de materiais manipuláveis	Resolução de problemas em contexto
Tarefas de investigação	Resolução de exercícios	Utilização do computador
Organização de debates para discutir ideias	Utilização de programas de geometria dinâmica	Utilização da calculadora gráfica
Recurso a vídeos didáticos	Atividades dinâmicas	

Gostas de Matemática?

- ○ Sim
- ○ Não

Justifica a resposta anterior.

A Matemática é, para ti, uma disciplina fácil ou difícil?
Numa escala de 1 (muito fácil) a 5 (muito difícil), classifica-a.

	1	2	3	4	5	
Muito fácil	○	○	○	○	○	Muito difícil

Como se poderá tornar o ensino da Matemática mais apelativo para que os alunos se envolvam nas suas aprendizagens? Apresenta sugestões que possam dinamizar a aula.

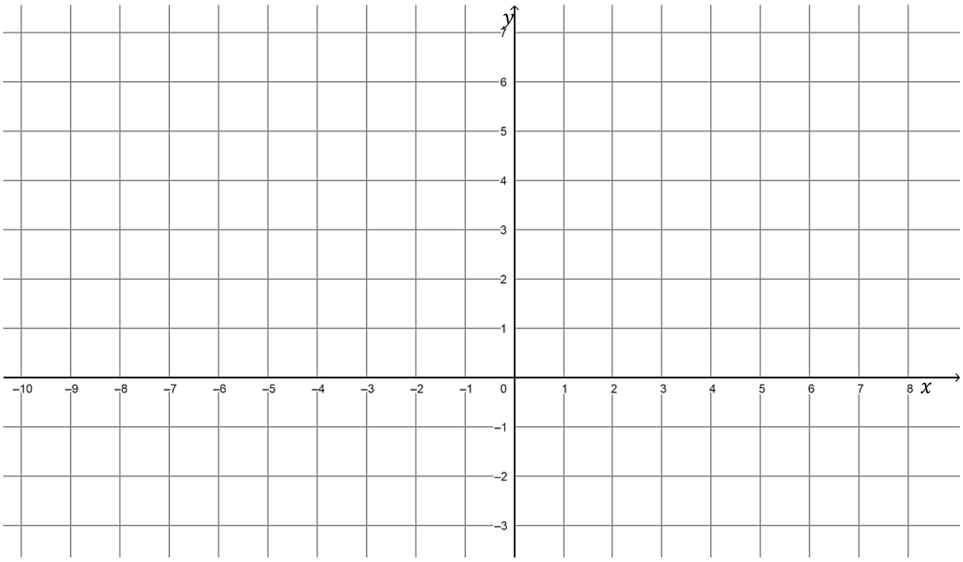
Este espaço livre serve para acrescentares algo que consideres importante e que não faça parte deste questionário.

Anexo 4 – Pré-teste

O presente teste integra-se numa investigação relacionada com o uso de recursos educativos digitais no ensino e aprendizagem das funções exponencial e logarítmica. Trata-se de um teste diagnóstico, para identificar os conhecimentos dos alunos acerca das funções, o qual não constitui um instrumento de avaliação. Contudo, é relevante que respondas corretamente aos itens que te são propostos.

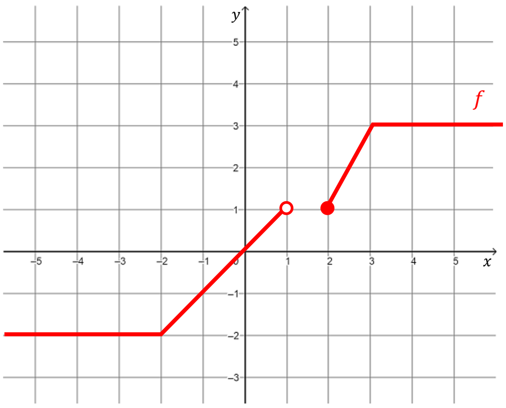
1 Desenha um esboço da representação gráfica de uma função real de variável real contínua que contenha os pontos representados na tabela abaixo.

x	-10	-5	0	1	2
$f(x)$	0,1	0,5	1	3	7

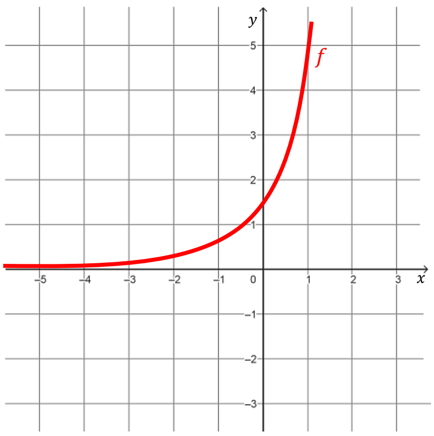


2 Analisa a representação gráfica de cada uma das funções e indica o **domínio** e o **contradomínio** de cada uma delas.

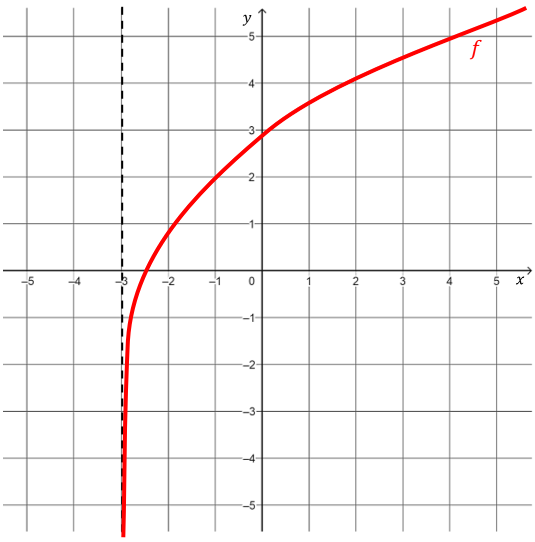
a)



b)



c)



3 Determina o **domínio** de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x - 10$

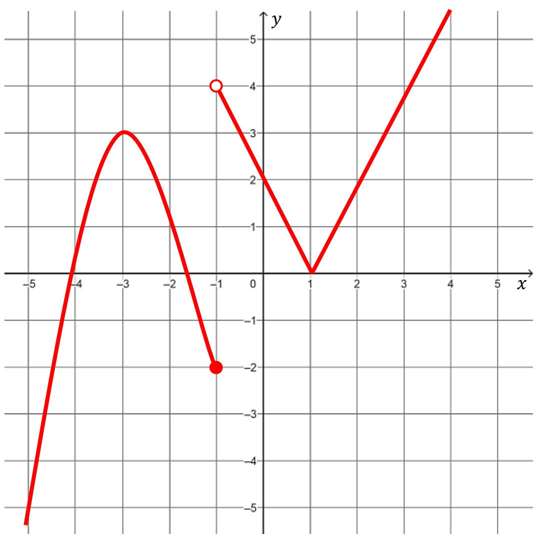
b) $g(x) = \dfrac{2}{x-3}$

c) $h(x) = \log(x-1)$

d) $i(x) = \sqrt{7-3x}$

e) $j(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+4}$

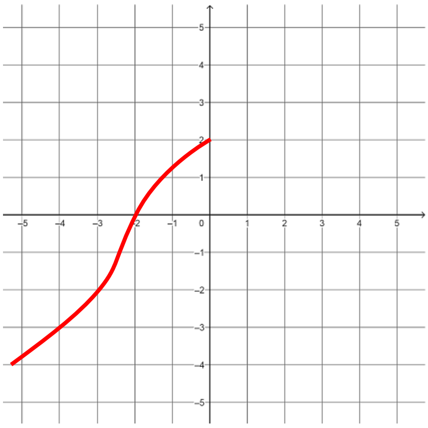
4 Faz um estudo da **monotonia** da função abaixo apresentada, indicando os extremos (máximos e mínimos), os extremantes (maximizantes e minimizantes) e as zonas do domínio onde a função é crescente e decrescente.



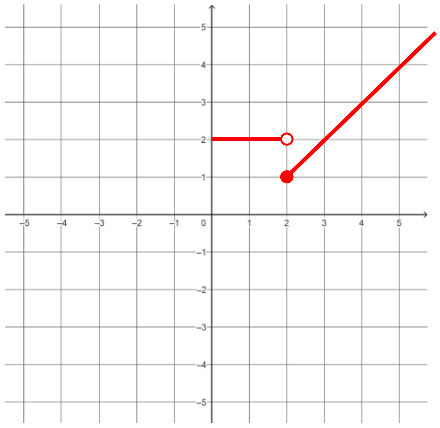
5 Nos referenciais o.n. xOy estão representadas partes dos gráficos (incompletos) das funções f e g, ambas **pares**, de domínio IR.

Completa o gráfico de cada uma das funções.

a)

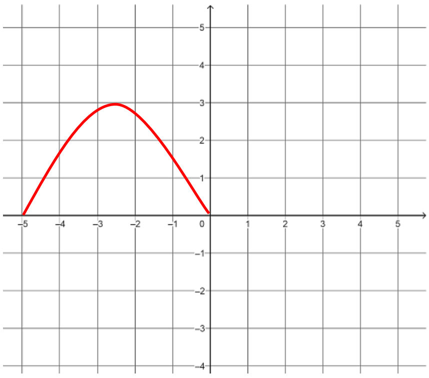


b)

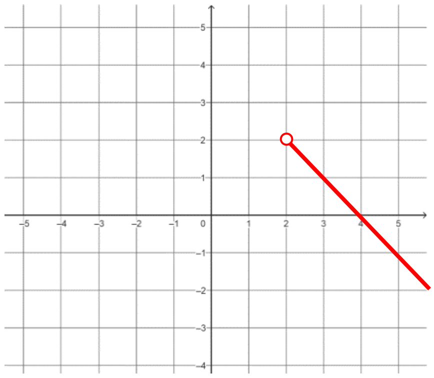


6 Nos referenciais o.n. xOy estão representadas partes dos gráficos (incompletos) das funções f e g, ambas **ímpares**, de domínio IR. Completa o gráfico de cada uma delas.

a)



b)



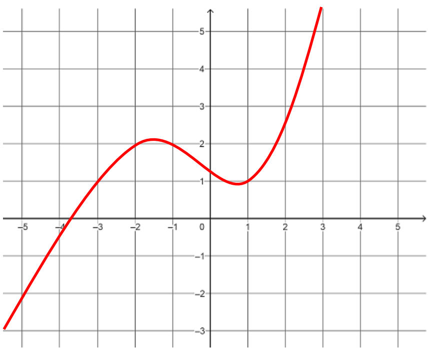
7 Estuda analiticamente a **paridade** das seguintes funções.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

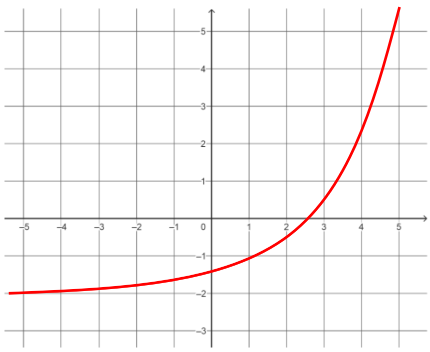
b) $g(x) = x^2 - 4$

8 Qual dos seguintes gráficos representa uma função **injetiva**? Justifica.

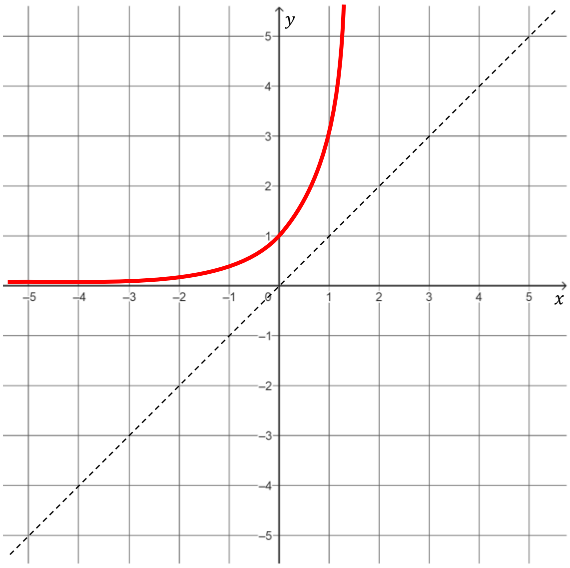
I



II



9 Analisa com atenção a representação gráfica da função $f(x) = 3^x$.
Representa, no mesmo referencial, a função f^{-1}, **função inversa** da função f.



10 Desenha um possível esboço de uma função f com as seguintes características:

- $D_f =]-\infty, 2]$
- -2 e 2 são zeros da função
- $x = -3$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função
- $y = -x - 1$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico da função
- $\lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$

11 Esboça o gráfico da função a seguir definida começando por determinar o domínio, os zeros, os pontos de interseção com os eixos coordenados e as assíntotas ao respetivo gráfico.

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

12 Determina os intervalos de monotonia da seguinte função e identifica os extremos relativos e absolutos, caso existam.

$$f(x) = -x^2 - 8x + 1$$

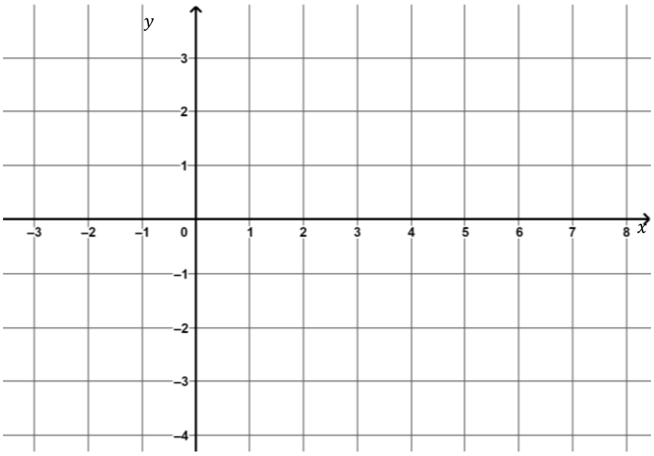
Janeiro de 2023,
Alberto Codeço

Anexo 5 – Pós-teste

O presente teste integra-se numa investigação relacionada com o uso de recursos educativos digitais no ensino e aprendizagem das funções exponencial e logarítmica.
Este questionário será usado como instrumento de avaliação.

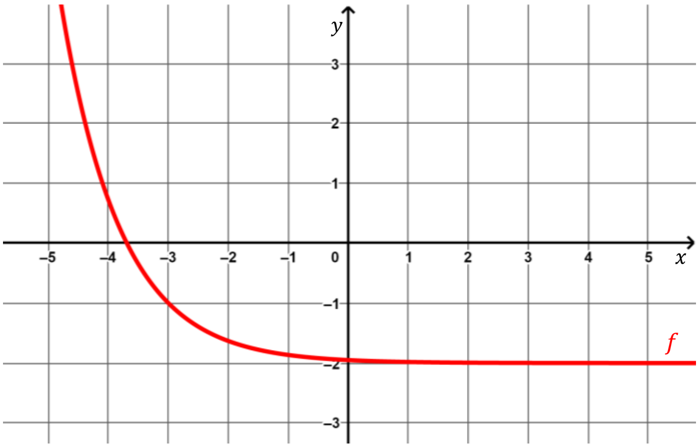
1 Desenha um esboço da representação gráfica de uma função real de variável real contínua que contenha os pontos representados na tabela abaixo.

x	0,1	0,5	1	3	8
$f(x)$	$-2{,}1$	$-0{,}6$	0	1	1,9

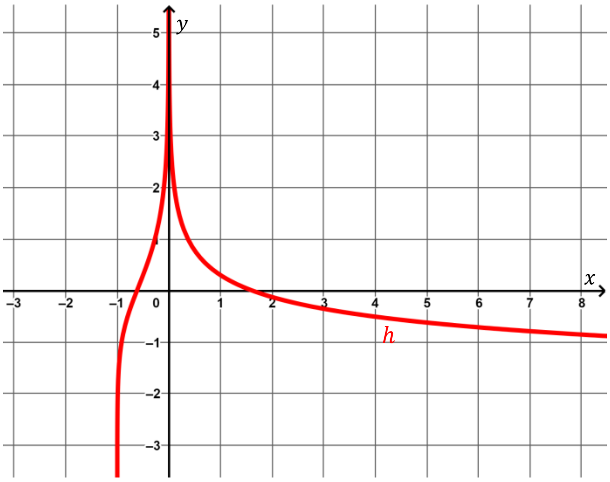


2 Analisa a representação gráfica de cada uma das funções e indica o **domínio** e o **contradomínio** de cada uma delas.

a)



b)



3 Determina o **domínio** de cada uma das seguintes funções:

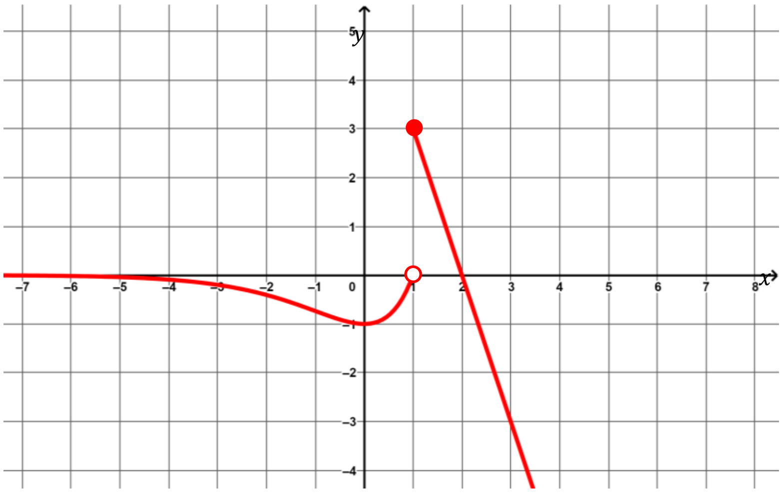
a) $f(x) = e^{x+2}$

b) $g(x) = \dfrac{5}{x^2 + 4}$

c) $h(x) = \log_6(3 - x)$

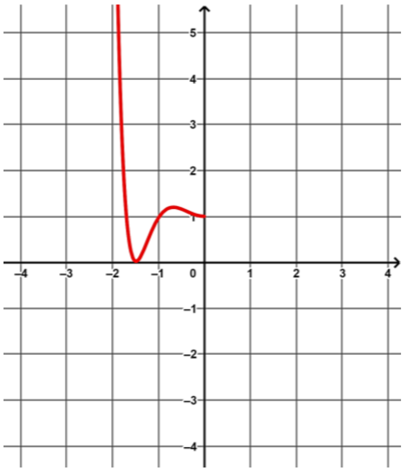
d) $i(x) = \sqrt{2x + 5}$

4 Faz um estudo da **monotonia** da função abaixo apresentada, indicando os extremos (máximos e mínimos), os extremantes (maximizantes e minimizantes) e os intervalos de monotonia (intervalos de crescimento e decrescimento da função).



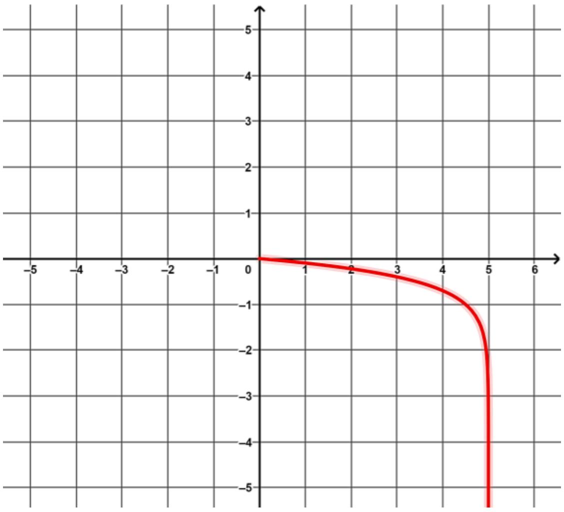
5 No referencial o.n. xOy do lado direito está representada parte do gráfico (incompleto) da função **par** f, de domínio IR.

Completa o gráfico da função.



6 No referencial o.n. xOy do lado direito está representada parte do gráfico (incompleto) de uma função **ímpar**, de domínio IR.

Completa o gráfico da função.



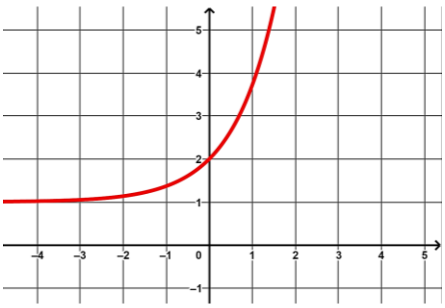
7 Estuda analiticamente a **paridade** das seguintes funções.

a) $f(x) = \ln(2x + 1)$

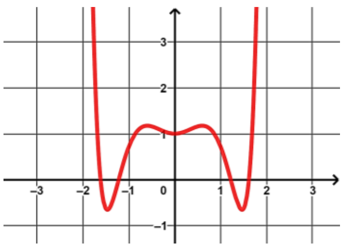
b) $g(x) = e^{(x^2)} + 4$

8 Qual dos seguintes gráficos representa uma função **injetiva**? Justifica.

I

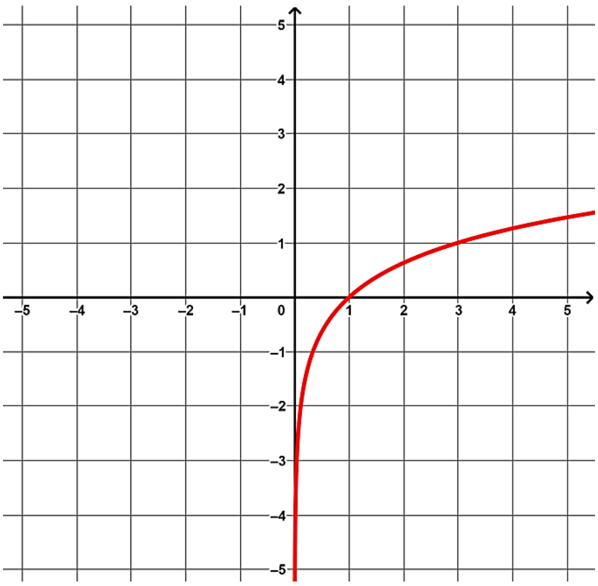


II



9 Analisa com atenção a representação gráfica da função $f(x) = \log_3 x$ apresentada à direita.

Representa, no mesmo referencial, a função f^{-1}, **função inversa** da função f.



10 Desenha um possível esboço de uma função f com as seguintes características:

- $D_f =]-\infty, 4] \setminus \{-3\}$
- -2 e 2 são zeros da função
- $x = -3$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

11 Esboça o gráfico da função a seguir definida começando por determinar o domínio, os zeros, os pontos de interseção com os eixos coordenados e as assíntotas ao respetivo gráfico.

$$f(x) = e^{x-1} - 1$$

12 Determina os intervalos de monotonia da seguinte função e identifica os extremos relativos e absolutos, caso existam.

$$f(x) = \ln(x+2) - x$$

Março de 2023,
Alberto Codeço

COTAÇÕES

Domínio	*Conceitos e Procedimentos*												
Questão	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Total**
Cotação	*12 pontos*	*14 pontos*	*16 pontos*	*18 pts*	*15 pts*	*15 pts*	*20 pontos*	*15*	*15*	*18*	*22*	*20*	***200 pontos***
		7 pontos por alínea	*4 pontos por alínea*				*10 pontos por alínea*						

Anexo 6 – Endereços (*url*) dos RED construídos em GeoGebra pelo investigador

Tarefa 1: https://www.geogebra.org/m/h7hjk2jg

Tarefa 2: https://www.geogebra.org/m/zzbx4agj

Tarefa 3: https://www.geogebra.org/m/x8hjmwme

Tarefa 5: https://www.geogebra.org/m/n9gddrx6

Tarefa 6: https://www.geogebra.org/m/zkcj9wmb

Tarefa 7: https://www.geogebra.org/m/hpwpxcuw

Tarefa 8: https://www.geogebra.org/m/uwsucnnf

Tarefa 11: https://www.geogebra.org/m/xtfhqwzk

Tarefa 12: https://www.geogebra.org/m/ws3tzp3y

Anexo 7 – Questionário final – Intervenção pedagógica com a turma

QUESTIONÁRIO FINAL – INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA COM A TURMA

Este questionário insere-se no âmbito do curso de Mestrado em Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação, da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo. É uma investigação académica centrada no uso de recursos educativos digitais no ensino e aprendizagem das funções exponencial e logarítmica.
Concluída a intervenção pedagógica, com a concretização de 12 tarefas propostas pelo investigador, o presente questionário tem por finalidade recolher as perceções de alunos do 12º ano sobre o contributo do uso do GeoGebra na aprendizagem de tópicos das funções exponencial e logarítmica.
A informação recolhida será confidencial e usada exclusivamente para fins de investigação, havendo o compromisso de assegurar o anonimato dos inquiridos. As respostas não terão influência alguma na avaliação.
Solicito, por isso, a tua colaboração. Responde de forma sincera e responsável. Não há respostas incorretas.

Muito obrigado pela tua colaboração!

Género
- ○ Masculino
- ○ Feminino

Idade

	16 anos	17 anos	18 anos	19 anos
Idade	○	○	○	○

Já conhecias o GeoGebra?
- ○ Sim
- ○ Não

Nas aulas já tinha usado o GeoGebra?
- ○ Sim
- ○ Não

Ao estudar Matemática, em casa ou na escola, recorres ao GeoGebra?

Nunca	Raramente	Por vezes	Muitas vezes	Sempre
○	○	○	○	○

Gostas de usar o GeoGebra?
- ○ Sim

○ Não

Justifica a resposta anterior.

Como classificas, quanto à utilidade, o GeoGebra?

	1	2	3	4	5	
Nada útil	○	○	○	○	○	Muito útil

Nas afirmações seguintes assinala o que mais se adequa ao teu grau de concordância.

	Discordo totalmente	Discordo	Indiferente	Concordo	Concordo totalmente
A função exponencial foi um tema que gostei de estudar.	○	○	○	○	○
A função logarítmica foi um tema que gostei de estudar.	○	○	○	○	○
Foi fácil estudar a função exponencial.	○	○	○	○	○
Foi fácil estudar a função logarítmica.	○	○	○	○	○
No estudo das funções exponenciais e logarítmicas senti mais dificuldades do que noutros conteúdos.	○	○	○	○	○
O trabalho em pares contribuiu para a aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas.	○	○	○	○	○

Nas afirmações seguintes, referentes ao uso do GeoGebra nalgumas aulas de matemática, assinala o que mais se adequa ao teu grau de concordância.

	Discordo totalmente	Discordo	Indiferente	Concordo	Concordo totalmente
As tarefas em que recorri ao GeoGebra ajudaram-me a compreender a função exponencial e logarítmica.	○	○	○	○	○
As tarefas propostas aumentaram o meu interesse no estudo destas funções.	○	○	○	○	○
As tarefas propostas ajudaram a melhorar a minha capacidade de trabalhar com o GeoGebra.	○	○	○	○	○
As tarefas propostas exigiram maior conhecimento de conceitos matemáticos prévios.	○	○	○	○	○
As tarefas GeoGebra propostas favoreceram a introdução dos tópicos destas funções.	○	○	○	○	○
O GeoGebra permitiu-me verificar resultados que obtive analiticamente.	○	○	○	○	○
Recorri a processos analíticos para validar resultados obtidos com o GeoGebra.	○	○	○	○	○
Encontrei dificuldades na resolução das tarefas propostas.	○	○	○	○	○
As tarefas com GeoGebra são mais desafiantes do que a resolução de exercícios e/ou problemas matemáticos.	○	○	○	○	○
A resolução de tarefas com recurso ao GeoGebra é mais fácil do que a resolução de exercícios e de alguns problemas.	○	○	○	○	○
As tarefas propostas eram apelativas e/ou interessantes.	○	○	○	○	○

As tarefas GeoGebra propostas eram exigentes.	○	○	○	○	○
Os objetivos propostos nas tarefas eram fáceis de perceber.	○	○	○	○	○
As tarefas aplicadas estavam bem construídas.	○	○	○	○	○
Gostei de resolver as tarefas que me foram propostas.	○	○	○	○	○
Gostaria de aprender outros tópicos matemáticos com recurso ao GeoGebra.	○	○	○	○	○

Recorda as 12 tarefas com recurso ao GeoGebra que trabalhaste nas aulas e indica, por ordem decrescente, as três que mais preferiste.

☐ 1 - Número de Neper	☐ 5 - Limite notável	☐ 9 - Equações e inequações com logaritmos
☐ 2 - Propriedades da função exponencial	☐ 6 - Propriedades da função logarítmica	☐ 10 - Estudo de funções envolvendo exponenciais
☐ 3 - Propriedades algébricas da função exponencial	☐ 7 - Propriedades algébricas da função logarítmica	☐ 11 - Transformações do gráfico da função exponencial
☐ 4 - Equações e inequações exponenciais	☐ 8 - Exercícios com logaritmos	☐ 12 - Transformações do gráfico da função ln(x)

Recorda as 12 tarefas com recurso ao GeoGebra que trabalhaste nas aulas e indica, por ordem decrescente, as três que menos preferiste.

☐ 1 - Número de Neper	☐ 5 - Limite notável	☐ 9 - Equações e inequações com logaritmos
☐ 2 - Propriedades da função exponencial	☐ 6 - Propriedades da função logarítmica	☐ 10 - Estudo de funções envolvendo exponenciais
☐ 3 - Propriedades algébricas da função exponencial	☐ 7 - Propriedades algébricas da função logarítmica	☐ 11 - Transformações do gráfico da função exponencial
☐ 4 - Equações e inequações exponenciais	☐ 8 - Exercícios com logaritmos	☐ 12 - Transformações do gráfico da função ln(x)

Indica algumas vantagens do uso do ambiente de geometria dinâmica GeoGebra para a tua aprendizagem de tópicos das funções exponenciais e logarítmicas.

Indica algumas desvantagens do uso do ambiente de geometria dinâmica GeoGebra para a tua aprendizagem de tópicos das funções exponenciais e logarítmicas.

Que dificuldades sentiste na aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas?

Como situas, numa escala de 1 a 10, o contributo do GeoGebra na clarificação dessas dificuldades?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Nenhum	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	Total

Este espaço livre serve para acrescentares algo que consideres importante e que não faça parte deste questionário.

Anexo 8 – Guião da entrevista aos alunos (*focus group*)

Introdução 20.04.2023

Explicar o porquê da entrevista.
Fazer um resumo do estudo realizado.
Apresentar os instrumentos utilizados de recolha de dados.

Tratando-se de uma entrevista semi-estruturada, não se redige um conjunto muito concreto de questões. Definem-se, em alternativa, alguns tópicos a abordar na entrevista.

- Opinião sobre a experiência e sobre as aulas de Matemática em que foram desenvolvidas as tarefas relativas às funções exponencial e logarítmica.
- Esclarecimento sobre os aspetos que mais despertaram o interesse dos alunos durante o período em que realizaram as tarefas.
- Visão dos alunos relativamente às aulas de Matemática A, em que usaram as Tecnologias de Informação e Comunicação para promover a sua compreensão sobre funções exponenciais e logarítmicas.

Algumas questões que se poderão colocar são:

- Gostaram de estudar a função exponencial/logarítmica?
- Foi fácil estudar a função exponencial/logarítmica?
- As tarefas usadas ajudaram-vos a compreender a função exponencial/logarítimica?
- Acham que o GeoGebra pode ajudar melhorar a compreensão do conteúdo das funções exponencial e logarítmica?
- Qual a vossa opinião sobre o GeoGebra?
- Os *applets* aplicados durante as aulas foram intuitivos?
- O que acharam das aulas onde foram trabalhadas as tarefas exploratórias?
- Foi fácil trabalhar com as tarefas?
- Como classificam as tarefas? Apelativas, interessantes?
- Que tipo de dificuldades sentiram no trabalho com tarefas apresentadas?
- A resolução de tarefas com recurso ao GeoGebra é mais fácil do que a resolução de exercícios e de alguns problemas?
- Gostam de usar o GeoGebra?
- O que gostaram mais no GeoGebra?
- O que não gostaram ao usar o GeoGebra?
- Gostaram de trabalhar em pares? Porquê?
- De um modo geral, que balanço fazem da experiência?
- Na vossa opinião, que alterações poderiam ser feitas às tarefas apresentadas?
- Com que frequência gostariam que essas tecnologias fossem utilizadas?

Conclusão

Agradecer a colaboração dos entrevistados
Agradecer a disponibilidade evidenciada por todos ao longo da investigação

Anexo 9 – Tarefa 1 (Número de Neper)

Número de Neper

Acedam ao ambiente de geometria dinâmica Geogebra em www.geogebra.org. Explorem o ficheiro *Número de Neper.ggb* que se encontra na plataforma *Classroom* da turma e respondam às questões que vos são apresentadas.

Podem, em alternativa, aceder à mesma tarefa em https://www.geogebra.org/m/h7hjk2jg.

1 Considerem a sucessão (u_n) definida pelo termo geral

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

a) Determinem u_5.

b) Determinem u_{100}, apresentando o resultado na forma de dízima, com 4 casas decimais significativas.

c) Determinem o valor de u_{50000}, apresentando o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas de milésima. Comparem o resultado obtido com o número de Neper (e).

d) A partir das respostas dadas consegue-se conjeturar o valor de u_n quando $n \to +\infty$. Completem, então, a expressão seguinte:

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ldots\ldots\ldots$$

2 Considerem a sucessão (u_n) definida pelo termo geral

$$u_n = \left(1+\frac{5}{n}\right)^n$$

a) Determinem u_2.

b) Determinem u_{500}, apresentando o resultado na forma de dízima, com 5 casas decimais significativas.

c) Determinem u_{100000}, apresentando o resultado na forma de dízima, arredondado às milésimas de milésima. Comparem o resultado obtido com a potência de expoente 5 do número de Neper (e^5).

d) A partir das respostas dadas consegue-se conjeturar o valor de u_n quando $n \to +\infty$. Completem a expressão seguinte:

$$\lim\left(1+\frac{5}{n}\right)^n = \ldots\ldots\ldots$$

e) Para concluir a tarefa, completem a expressão seguinte:

$$\lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \ldots\ldots\ldots$$

Fevereiro de 2023,
Alberto Codeço

Anexo 10 – Tarefa 2 (Função exponencial de base a)

Propriedades da função exponencial

Usando o *software* de geometria dinâmica Geogebra explorem o ficheiro *Função exponencial.ggb* colocado na plataforma *Classroom* da turma e respondam às questões que vos são apresentadas.

Podem, em alternativa, aceder ao mesmo em www.geogebra.org/m/zzbx4agj.

Para realizar a tarefa usem os vários seletores apresentados (4) e as caixas de verificação (Verificação).

1 Indiquem se as funções abaixo são crescentes ou decrescentes e justifiquem a resposta.

a) $f(x) = 4^x$

b) $f(x) = 0{,}3^x$

c) $f(x) = \left(\frac{6}{7}\right)^x$

d) $f(x) = 1^x$

2 Entre as alíneas abaixo, indiquem quais das representações algébricas representam uma função exponencial, justificando todas as respostas.

a) $f(x) = x^2 + 5$

b) $f(x) = 1^x$

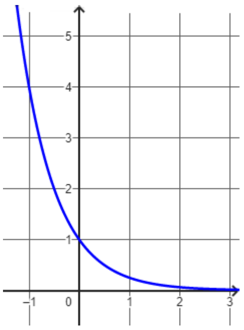
c) $f(x) = \left(\frac{7}{3}\right)^x$

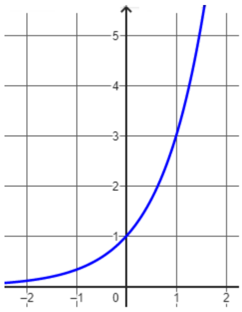
d) $f(x) = e^x + 1$

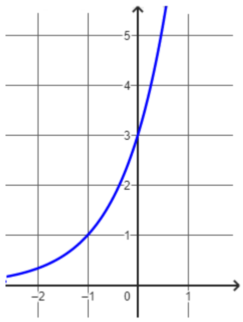
e) $f(x) = \dfrac{4x+1}{x-4}$

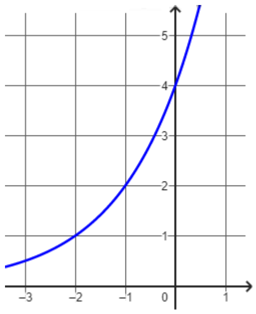
3 Associem cada uma das funções às suas respetivas representações gráficas.

I $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ **II** $g(x) = 2^{x+2}$ **III** $h(x) = 3^x$ **IV** $i(x) = 3^{x+1}$

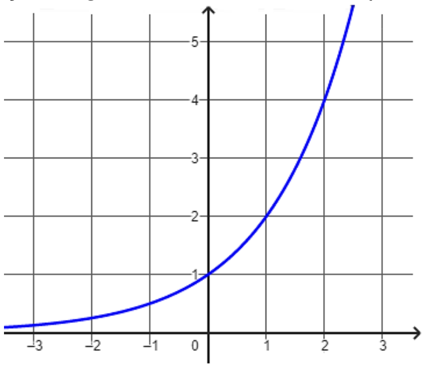








4 Observem o gráfico da função seguinte e escrevam a respetiva expressão analítica.



5 Identifiquem os zeros de cada uma das funções abaixo apresentadas.

a) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ **b)** $g(x) = 2{,}2^x$

6 Estudem o sinal de cada uma das funções.

a) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ **b)** $g(x) = 10^x$

7 Analisando o gráfico da função $f(x) = 6^x$ indiquem o valor de:

a) $\lim_{x \to -\infty} 6^x$

b) $\lim_{x \to +\infty} 6^x$

8 Analisando o gráfico da função, indiquem as assíntotas de cada uma das funções.

a) $f(x) = 6^x$

b) $g(x) = 0{,}4^x$

c) $g(x) = e^x$

9 Estudem a continuidade das seguintes funções.

a) $f(x) = 0{,}7^x$

b) $g(x) = 2^x$

c) $h(x) = 5^{x+1}$

10 Estudem as seguintes funções quanto à injetividade.

a) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ **b)** $g(x) = \pi^x$ **c)** $h(x) = 2{,}5^{x-4}$

Anexo 11 – Tarefa 3 (Propriedades algébricas da função exponencial)

Propriedades algébricas da função exponencial

Para responder às questões abaixo apresentadas, acedam ao ambiente de geometria dinâmica Geogebra através do endereço www.geogebra.org/m/x8hjmwme.

Usem os vários seletores apresentados (4) e a caixa de verificação (Verificação).

Usem o botão (Repetir) sempre que pretendam gerar novos valores.

1 Usando as propriedades operatórias das potências, simplifiquem o valor de cada uma das expressões apresentadas.

a) $5^4 \times 5^{16} =$

b) $e^4 \times e^{-2} =$

c) $(-3)^4 \div (-3)^{11} =$

d) $e^{40} \times e^{16} \div e^{11} =$

e) $\dfrac{10^7}{10^{-53}} =$

f) $\left(11^{20}\right)^3 =$

g) $8^{-4} =$

h) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-25} =$

i) $(-2)^7 \times 5^7 =$

j) $\dfrac{\pi^{90}}{3^{90}} =$

k) $(\log_2 8)^0 =$

l) $6^{40} \times 6^{-15} \div 2^{25} =$

m) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^5 \times \left(e^5\right)^{-1} =$

n) $\dfrac{(-2)^{36}}{2^{24}} \times \left(e^{-3}\right)^{-4} =$

o) $e^x \times e^{20} =$

p) $\dfrac{(\log 100)^{70}}{(\log 100)^{-2x}} =$

2 Inferindo propriedades a partir do trabalho desenvolvido nesta tarefa, completem as expressões algébricas que são apresentadas.

Sendo $a > 0$, $b > 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ tem-se

a) $a^x \times a^y = \ldots\ldots\ldots$

b) $a^x \times b^x = \ldots\ldots\ldots$

c) $(a^x)^y = \ldots\ldots\ldots$

d) $\dfrac{a^x}{a^y} = \ldots\ldots\ldots$

e) $\dfrac{a^x}{b^x} = \ldots\ldots\ldots$

f) $\dfrac{1}{a^x} = a^{\ldots\ldots}$

Fevereiro de 2023,
Alberto Codeço

Anexo 12 – Tarefa 4 (Equações e inequações exponenciais)

Equações e inequações exponenciais

Abram a aplicação www.geogebra.org.

1 Com recurso ao *geogebra* vamos resolver graficamente a equação $2^{x+1} = 16$.

Sigam as seguintes etapas:

1. No menu Álgebra (Álgebra) digitem o comando $y = 2^{x+1}$
2. No menu Álgebra digitem o comando $y = 16$
3. No menu Ferramentas (Ferramentas) escolham a ferramenta Interseção de Dois Objetos
4. Selecionem os dois elementos desenhados (a curva e a reta)
5. Fica destacado o ponto de interseção dos dois gráficos (ponto A)
   A abcissa do ponto A é a solução da equação. Para obter a abcissa desse ponto introduzam, no menu Álgebra, o comando $x(A)$

Completem a expressão: $2^{x+1} = 16 \Leftrightarrow x =$ … … ..

2 Resolvam graficamente, com recurso ao *geogebra*, a equação $3^{1-2x} = 27$.

Sigam as seguintes etapas:

1. No menu Álgebra (Álgebra) digitem o comando $y = 3^{1-2x}$
2. No menu Álgebra digitem o comando $y = 27$
3. No menu Ferramentas (Ferramentas) escolham a ferramenta Interseção de Dois Objetos
4. Selecionem os dois elementos desenhados (a curva e a reta)
5. Fica destacado o ponto de interseção dos gráficos (ponto A)
   A abcissa do ponto A é a solução da equação. Para obter a abcissa desse ponto introduzam, no menu Álgebra, o comando $x(A)$

Completem a expressão: $3^{1-2x} = 27 \Leftrightarrow x =$ … … ..

3 Seguindo os dois exemplos anteriores, resolvam a equação $4^{x-2} = 2^{-x}$.

O conjunto-solução da equação $4^{x-2} = 2^{-x}$ é $S = \{—\}$.

4 Resolvam graficamente a equação $4^{2x-x^2} = 1$.

Sigam as seguintes etapas:

1. No menu Álgebra escrevam o comando $y = 4^{2x-x^2}$
2. No menu Álgebra digitem um segundo comando $y = 1$
3. No menu Ferramentas escolham a ferramenta Interseção de Dois objetos

4 Selecionem os dois elementos desenhados (a curva e a reta)

5 Selecionem novamente os dois elementos desenhados

6 Para obter as abcissas dos pontos, introduzam, no menu Álgebra, os comandos $x(A)$ e $x(B)$

Completem a expressão: $4^{2x-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = \ldots\ldots\ldots \vee x = \ldots\ldots\ldots$

5 Resolvam a equação $12 \times 3^x - 3^{2x} = 27$.

6 Resolvam, em $\mathbb{R}$, a inequação $2^{1-x} < \left(\sqrt{2}\right)^x$, exprimindo a solução como intervalo ou união de intervalos.
Sigam as seguintes etapas:

1 No menu Álgebra escrevam o comando $f(x) = 2^{1-x}$

2 No menu Álgebra digitem um segundo comando $g(x) = sqrt(2)\char`^x$

3 No menu Ferramentas escolham a ferramenta Interseção de Dois objetos

4 Selecionem os dois elementos desenhados (curvas)

5 Para obter o valor da abcissa do ponto de interseção, introduzam, no menu Álgebra, o comando $x(A)$

Para identificar o conjunto-solução da inequação é necessário identificar os valores de x para os quais a curva da função f se situa abaixo da curva da função g.

Completem a expressão: $2^{1-x} < \left(\sqrt{2}\right)^x \Leftrightarrow x \in$ ____________________

7 Resolvam, em $\mathbb{R}$, a inequação $e^{2x-x^2} \leq \frac{1}{e^3}$.

8 Resolvam, em $\mathbb{R}$, a inequação $16^x > 4^{3-x^2}$, exprimindo a solução como intervalo ou união de intervalos.

Fevereiro de 2023,
Alberto Codeço

Anexo 13 – Tarefa 5 (Limite notável)

Limite notável $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

Acedam a www.geogebra.org. Explorem o ficheiro *Limite notável.ggb* que se encontra na plataforma *Classroom* da turma e respondam às questões que vos são apresentadas.

Podem, em alternativa, aceder à mesma tarefa em https://www.geogebra.org/m/n9gddrx6.

Movimentem as setas (▶ e ◀) e respondam às questões que vos são apresentadas.

1 Aproximando a seta ▶ do eixo Oy e observando os valores da tabela, indiquem o valor do limite seguinte:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} =$$

2 Aproximando a seta ◀ do eixo Oy e observando os valores da tabela, indiquem o valor do limite seguinte:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} =$$

3 Tendo em conta o resultado obtido nos dois itens anteriores qual é, então, o valor do limite $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$?

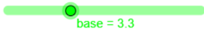
Fevereiro de 2023,
Alberto Codeço

Anexo 14 – Tarefa 6 (Propriedades da função logarítmica)

Propriedades da função logarítmica

Usando o *software* de geometria dinâmica Geogebra explorem o ficheiro *Função logarítmica ACC.ggb* colocado na plataforma *Classroom* da turma e respondam às questões que vos são apresentadas.

Podem aceder ao aplicativo em www.geogebra.org/m/zkcj9wmb.

Para realizar a tarefa usem o seletor apresentado (

) e as diversas caixas de verificação (

).

1 Indiquem se as funções abaixo apresentadas são crescentes ou decrescentes e justifiquem a resposta.

a) $f(x) = \log_2 x$

b) $f(x) = \log_{0,2} x$

c) $f(x) = \log_{10} x$

2 Associem cada uma das funções às suas respetivas representações gráficas.

I $f(x) = \log_4 x$ **II** $g(x) = \log_{0,5} x$ **III** $h(x) = \log(x + 2)$

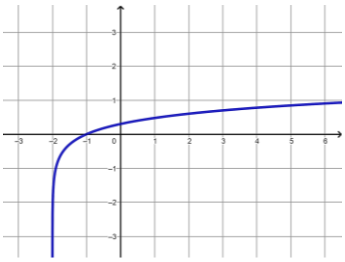


Gráfico A

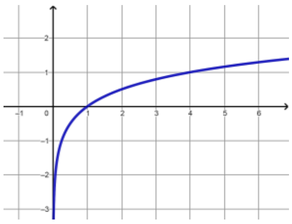


Gráfico B

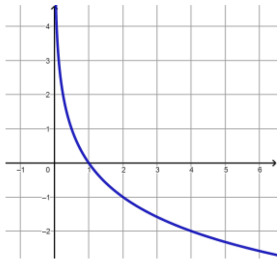
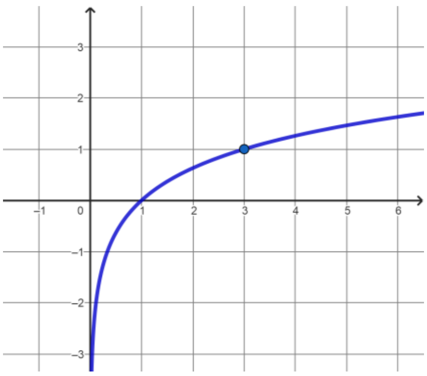


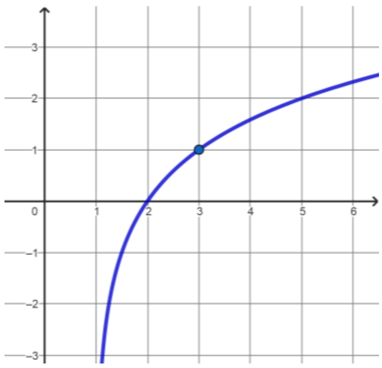
Gráfico C

3 Interpretem o gráfico das seguintes funções e escrevam as respetivas expressões analíticas.

a)



b)



4 Identifiquem os zeros de cada uma das funções abaixo apresentadas.

a) $f(x) = \log_6 x$ **b)** $g(x) = \log_e x$

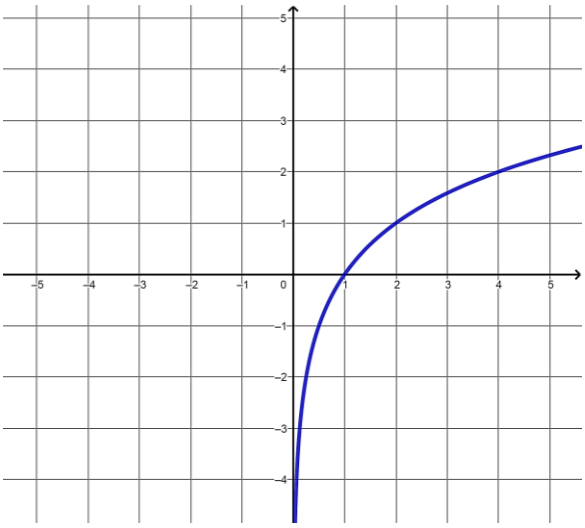
5 Estudem o sinal de cada uma das funções.

a) $f(x) = \log_6 x$ **b)** $g(x) = \log_{0,4} x$

6 Determinem o domínio e o contradomínio das funções.

a) $f(x) = \log_{1,5} x$ **b)** $g(x) = \log_{10} x$

7 Desenhem o gráfico da função inversa de $f(x) = \log_2 x$.



8 Estabeleçam a correspondência correta entre a função e a respetiva função inversa.

$\log_9 x$ ●	● e^x
$\log x$ ●	● 10^x
$\log_{0,5} x$ ●	● 9^x
$\ln x$ ●	● $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

9 Relativamente à paridade, como classificam as funções logarítmicas?

10 Analisando o gráfico de cada função, indiquem as assíntotas de cada uma delas.

a) $f(x) = \log_9 x$

b) $g(x) = \log_3(x+3)$

c) $h(x) = \log_e x$

11 Estudem a continuidade das seguintes funções.

a) $f(x) = \log_5 x + 1$

b) $g(x) = \ln x$

12 Estudem as seguintes funções quanto à injetividade.

a) $f(x) = \log_7 x$ **b)** $g(x) = \log_5 x$ **c)** $h(x) = \log_{0,8} x$

13 Analisem as funções no que toca à interseção com os eixos coordenados.

a) $f(x) = \log_4 x$

b) $g(x) = \ln x$

c) $h(x) = \log_2(x-2)$

14 Analisando o gráfico da função $f(x) = \log_3 x$ indiquem o valor de:

a) $\lim_{x \to +\infty} \log_3 x$

b) $\lim_{x \to 0^+} \log_3 x$

Fevereiro de 2023,
Alberto Codeço

Anexo 15 – Tarefa 7 (Propriedades algébricas da função logarítmica)

Propriedades algébricas da função logarítmica

Para responder às questões abaixo apresentadas, acedam ao ambiente de geometria dinâmica Geogebra através do endereço www.geogebra.org/m/hpwpxcuw.

Usem os vários seletores apresentados (4) e a caixa de verificação (Verificação).

Usem o botão (Repetir) sempre que pretendam gerar novos valores.

1 Depois de explorar o aplicativo, simplifiquem cada uma das expressões apresentadas.

a) $\log_5(6 \times 8) =$

b) $\log(3 \times 5 \times 4) =$

c) $\log_7(6) + \log_7(10) =$

d) $\log 4 + \log 5 + \log 2 =$

e) $\log_5\left(\frac{25}{11}\right) =$

f) $\log_4 40 - \log_4 10 =$

g) $\ln 10 + \ln 1 - \ln 5 =$

h) $\ln\left(\frac{e}{3}\right) =$

i) $\log_{10}(5^2) =$

j) $5\log_2 3 =$

k) $\log 4 + 2\log 4 =$

l) $\log_e(4 \times e^2) =$

m) $\frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2} =$

n) $e^{9\ln 2} =$

2 Inferindo propriedades a partir do trabalho desenvolvido nesta tarefa, completem as expressões algébricas que são apresentadas.

Sendo $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^+$ tem-se

a) $\log_a(xy) =$

b) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) =$

c) $\log_a(x^y) =$

d) $\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} =$

e) $e^{x\ln(a)} =$

Anexo 16 – Tarefa 8 (Exercícios com logaritmos)

Exercícios com logaritmos

Para responder às questões abaixo apresentadas, acedam ao ambiente de geometria dinâmica Geogebra através do endereço www.geogebra.org/m/uwsucnnf.

Na aplicação, introduzam os valores corretos nas caixas de texto (3) respetivas. Para análise das respostas dadas usem a caixa de verificação (☐ Verificação).

Usem o botão (Repetir) sempre que pretendam gerar novos valores.

1 Escrevam as expressões na forma de um único logaritmo.

a) $\log_5 2 + \log_5 3 =$

b) $\log(x^5) + \log(x^2) =$

c) $\log_4(7x) - \log_4(x) =$

d) $2\log_3 9 =$

e) $\dfrac{\ln 3}{4} + \ln 3 =$

2 Simplifiquem as expressões.

a) $\log_2(2) =$

b) $\log_9(9x) =$

c) $e^{x \ln 5} =$

d) $\log_8(1) =$

e) $\ln(e^2) =$

f) $10^{\log_{10} 4} =$

g) $5^{2 \log_9 3} =$

Fevereiro de 2023,
Alberto Codeço

Anexo 17 – Tarefa 9 (Equações e inequações com logaritmos)

Equações e inequações com logaritmos

Abram a aplicação www.geogebra.org.

1 Com recurso ao *GeoGebra* vamos resolver graficamente a equação

$$\log_3(x+2)+\log_3(x-2)=\log_3 5$$

Sigam as seguintes etapas:

1 No menu Álgebra (Álgebra) digitem o comando $f(x)=\log_3(x+2)+\log_3(x-2)$
Para inserir o logaritmo de base 3 pode-se escrever log_3.
Podem, em alternativa, usar a caixa de ferramentas e, na opção f(x), escolher $\log_{\square}$.

2 No menu Álgebra digitem o comando $g(x)=\log_3 5$

3 No menu Ferramentas (Ferramentas) escolham a ferramenta Interseção de Dois Objetos

4 Selecionem os dois elementos desenhados (a curva e a reta)

5 Fica destacado o ponto de interseção dos dois gráficos (ponto A).
A abcissa do ponto A é a solução da equação. Para obter a abcissa desse ponto introduzam, no menu Álgebra, o comando $x(A)$.

Completem a expressão: $\log_3(x+2)+\log_3(x-2)=\log_3 5 \Leftrightarrow x=$ ... .

2 Resolvam graficamente, com recurso ao *geogebra*, a equação

$$\ln(x+3)=\ln(x-1)+\ln 2$$

Sigam as seguintes etapas:

1 No menu Álgebra (Álgebra) digitem o comando $y=\ln(x+3)$

2 No menu Álgebra digitem o comando $y=\ln(x-1)+\ln 2$

3 No menu Ferramentas (Ferramentas) escolham a ferramenta Interseção de Dois Objetos

4 Selecionem os dois elementos desenhados (curvas)

5 Fica destacado o ponto de interseção dos gráficos (ponto A).
A abcissa do ponto A é a solução da equação. Para obter a abcissa desse ponto introduzam, no menu Álgebra, o comando $x(A)$.

Completem a expressão: $\ln(x+3)=\ln(x-1)+\ln 2 \Leftrightarrow x=$ ... .

3 Seguindo os dois exemplos anteriores, determinem os números reais que são solução da equação

$$(e^x - 1)\ln(5 - 2x) + e^x \ln(3 - x) = \ln(3 - x)$$

(Exame nacional – 2022 – 1ª fase)

Sigam as seguintes etapas:

1 `No menu Álgebra introduzam o comando` $y = (e^x - 1)\ln(5 - 2x) + e^x \ln(3 - x)$

2 `No menu Álgebra digitem um segundo comando` $y = \ln(3 - x)$

3 `No menu Ferramentas escolham a ferramenta Interseção de Dois objetos`

4 `Selecionem os dois elementos desenhados (curvas)`

5 `Selecionem novamente os dois elementos desenhados`

6 `Para obter as abcissas dos pontos, introduzam, no menu Álgebra, os comandos` $x(A)$ `e` $x(B)$

O conjunto-solução da equação é $S = \{\ldots\ldots\ ,\ \ldots\ldots\}$.

4 Resolvam, em $\mathbb{R}$, a inequação $\ln(x - 2) - \ln 3 > \ln(x - 3)$, exprimindo a solução como intervalo ou união de intervalos.

Sigam as seguintes etapas:

1 `No menu Álgebra escrevam o comando` $f(x) = \ln(x - 2) - \ln 3$

2 `No menu Álgebra digitem um segundo comando` $g(x) = \ln(x - 3)$

3 `No menu Ferramentas escolham a ferramenta Interseção de Dois objetos`

4 `Selecionem os dois elementos desenhados (curvas)`

5 `Selecionem novamente os dois elementos desenhados`

6 `Para obter o valor da abcissa do ponto de interseção, introduzam, no menu Álgebra, o comando` $x(A)$

Para identificar o conjunto-solução da inequação é necessário identificar os valores de x para os quais a curva da função f se situa acima da curva da função g.

Completem a expressão: $\ln(x - 2) - \ln 3 > \ln(x - 3) \Leftrightarrow x \in$ ____________________

5 Determinem o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_2(x + 1) \leq 3 - \log_2(8 - x)$$

Apresentem a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

(Exame nacional – 2018 – 2ª fase)

Fevereiro de 2023,
Alberto Codeço

Anexo 18 – Tarefa 10 (Estudo de funções envolvendo exponenciais)

Estudo de funções envolvendo exponenciais

Abram a aplicação www.geogebra.org.

1 Com recurso ao *geogebra* vamos estudar a função $f(x) = xe^x$, determinando o domínio, o contradomínio, os zeros, a interseção com os eixos coordenados, os intervalos de monotonia e os extremos relativos, o sentido das concavidades e os pontos de inflexão e as equações das assíntotas ao respetivo gráfico.

Sigam as etapas abaixo apresentadas e respondam às alíneas propostas.

a) Observando o gráfico da função, indiquem o domínio e o contradomínio de f.

1 No menu Álgebra (Álgebra) digitem o comando **f(x)=xe^x**

2 O comando **Extremo(f)** pode auxiliar a vossa resposta

$D_f =$ $\qquad\qquad$ $D'_f =$

b) Qual é o zero da função f?

3 No menu Álgebra (Álgebra) digitem o comando **Intersetar(f,EixoOx)**

4 A abcissa do ponto é zero da função. Introduzam, no menu Álgebra, o comando **x(A)**.

$Zeros_f =$

c) Estudem a monotonia da função. Na resposta, indiquem o(s) intervalo(s) de monotonia e os extremos relativos, caso existam.

5 No menu Álgebra (Álgebra) digitem o comando **Derivada(f)**

6 Desativem a função f. Para tal, devem clicar no botão f(x) = x e^x do menu Álgebra.

7 Para obter o(s) zero(s) da função derivada escrevam, no menu Álgebra, o comando **Intersetar(f',EixoOx)**

8 Para obter o valor do extremo digitem **ext = y(Extremo(f))**

Completem, agora, a tabela.

x	$-\infty$		
Sinal de f'			
Variação de f			

f é estritamente crescente em .... e estritamente decrescente em ....
.... é .... relativo da função em $x =$ ....

d) Estudem a função f quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão.

9 Executem o comando **Derivada(f')**

10 Desativem também a função f'. Para tal, devem clicar no botão f'(x) = Derivada(f)

11 Para obter o(s) zero(s) da segunda derivada escrevam, no menu Álgebra, os comandos **`int2dx = Intersetar(f'',EixoOx)`**

12 e **`zero2der = x(int2dx)`**.

Completem, agora, a tabela.

x	$-\infty$		
Sinal de f''			
Convavidades de f			

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em .... e ...

13 As coordenadas do ponto de inflexão podem ser determinadas usando o comando **`PI = (zero2der,f(zero2der))`**

.... são as coordenadas do ponto de inflexão.

e) Determinem as equações das assíntotas ao gráfico da função.

14 Executem o comando **`Assíntota(f)`**

.... é assíntota ao gráfico de f, quando x tende para ....

2 Estudem, com recurso ao *geogebra*, a função $g(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x - 1}$.

a) A função g tem zeros?

1 No menu Álgebra digitem o comando **`g(x)=(e^x+2)/(e^x-1)`**

2 Digitem o comando **`Intersetar(g,EixoOx)`**

b) Estudem a monotonia da função. Na resposta, indiquem o(s) intervalo(s) de monoto-nia e os extremos relativos, caso existam.

3 Introduzam o comando **`Derivada(g)`**

4 Desativem a função g. Para tal, devem clicar no botão da função g no menu Álgebra.

5 Para obter o(s) zero(s) da função derivada escrevam, no menu Álgebra, o comando **`Intersetar(g',EixoOx)`**

Completem, agora, a tabela.

x	$-\infty$		$+\infty$
Sinal de g'			
Variação de g			

g é estritamente ....

c) Estudem a função g quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão, caso existam.

6 Executem o comando **`Derivada(g')`**

7 Desativem a função g'

8 Para obter o(s) zero(s) da segunda derivada escrevam, no menu Álgebra, o comando **`Interseção(g'',EixoOx)`**

Completem a tabela.

x			
Sinal de g''			
Convavidades de g			

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em .... e ...

d) Determinem as assíntotas ao gráfico da função.

9 Ativem a função g

10 Executem o comando **Assíntota(g)**

e) Interpretando o gráfico da função, indiquem o domínio e o contradomínio de g.

f) Determinem o valor de $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

11 Introduzam o comando **Limite(g,-∞)**. O símbolo **∞** deve ser colocado com recurso à caixa de comandos e operadores (⌨), no separador **#&¬**

g) Determinem o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

12 Introduzam o comando **Limite(g,+∞)**. O símbolo **∞** deve ser colocado com recurso à caixa de comandos e operadores (⌨), no separador **#&¬**

h) Determinem o valor de $\lim\limits_{x \to 0+} g(x)$.

13 Executem o comando **LimiteàDireita(g,0)**.

Estudo de uma função logarítmica

3 Estudem, com recurso ao *geogebra*, a função $h(x) = \log\left(\frac{2x^2}{x+1}\right)$.

a) Observando o gráfico da função, indiquem o domínio e o contradomínio de h.

1 No menu Álgebra digitem o comando **h(x) = log10(2x^2/(x+1))**

b) Determinem os zeros da função h.

2 Introduzam o comando **Intersetar(h,EixoOx,-10,10)**

c) Estudem a monotonia da função. Na resposta, indiquem o(s) intervalo(s) de monotonia e os extremos relativos, caso existam.

3 Introduzam o comando **h'(x) = Derivada(h),x>-1**

4 Desativem a função h. Cliquem no botão ◯ da função.

5 Desativem os pontos A e B

6 Para obter o(s) zero(s) da função derivada, caso existam, escrevam o comando **Intersetar(h',EixoOx)**

Completem, agora, a tabela.

x				$+\infty$
Sinal de h'				
Variação de h				

h é estritamente ……….

d) Estudem a função h quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão, caso existam.

7 `Executem o comando` **`Derivada(h')`**

8 `Desativem a função` h' `(Desliguem a opção` $h'(x) = \text{Se}(x > -1, \text{Derivada}(h))$`)`

9 `Para determinar o(s) zero(s) da segunda derivada escrevam os comandos`

`S = NSoluções(h''(x)=0)`

`zero2der = Elemento(S,1)`

10 `As coordenadas do ponto de inflexão podem ser determinadas usando o comando` **`PI = (zero2der,h(zero2der))`**

Completem, agora, a tabela.

x						$+\infty$
Sinal de h''						
Convavidades de h						

O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em ………. e …

e) Determinem o valor de $\lim_{x\to -1^+} h(x)$.

11 `Introduzam o comando` **`LimiteàDireita(h,-1)`**

f) Determinem o valor de $\lim_{x\to 0^-} h(x)$.

12 `Executem o comando` **`LimiteàEsquerda(h,0)`**

g) Determinem o valor de $\lim_{x\to 0^+} h(x)$.

13 `Executem o comando` **`LimiteàDireita(h,0)`**

h) Determinem o valor de $\lim_{x\to +\infty} h(x)$.

14 `Introduzam o comando` **`Limite(h,+∞)`**.

i) Escrevam as equações das assíntotas ao gráfico da função h.

Março de 2023,
Alberto Codeço

Anexo 19 – Tarefa 11 (Transformações do gráfico da função exponencial)

Transformações do gráfico da função $f(x) = e^x$

Acedam ao ambiente de geometria dinâmica Geogebra através do endereço www.geogebra.org/m/xtfhqwzk.

Em alternativa, abram o ficheiro *Transformações do gráfico de exp(x).ggb* e respondam às questões que vos são apresentadas.

Usem os quatro seletores existentes ( ) e as caixas de verificação (☑ Sinal) para responder às questões apresentadas.

Cliquem no botão (Repôr valores) sempre que pretendam repor os valores da função $f(x) = e^x$.

1 Considerem a função $f(x) = e^x$. Façam o estudo da função relativamente ao domínio, contradomínio, zeros, às coordenadas do ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy, à injetividade, monotonia, sinal, assíntotas e extremos.

2 Considerem a função $g(x) = e^x - 1$.

a) Como se pode obter a representação gráfica de g a partir da função $f(x) = e^x$?

b) Façam o estudo da função g relativamente ao domínio, contradomínio, zeros, interseção com o eixo Oy, injetividade, monotonia, sinal, assíntotas e extremos.

3 Considerem a função $h(x) = -e^x + 3$.

a) Como se pode obter a representação gráfica de h a partir da função $f(x) = e^x$?

b) Façam o estudo da função h relativamente ao contradomínio, zeros, interseção com o eixo Oy, monotonia, sinal e assíntotas.

4 Considerem a função $i(x) = 2e^{x+2} + 3$.

a) Como se pode obter a representação gráfica de i a partir da função $f(x) = e^x$?

b) Façam o estudo da função i relativamente ao domínio, contradomínio, zeros, interseção com os eixos coordenados, monotonia, continuidade, sinal e assíntotas.

5 Completem a seguinte tabela.

	$f_1(x) = e^{2x}$	$f_2(x) = -e^x + 2$	$f_3(x) = 4e^{x-10} - 20$
Domínio			
Contradomínio			
Zeros			---------
Interseção com o eixo Oy			
Injetividade			
Continuidade			
Monotonia			
Sinal			---------
Assíntotas			
Máximos			
Mínimos			

Março de 2023,
Alberto Codeço

Anexo 20 – Tarefa 12 (Transformações do gráfico da função $\ln x$)

Transformações do gráfico da função $f(x) = \ln x$

Acedam ao ambiente de geometria dinâmica Geogebra através do endereço www.geogebra.org/m/ws3tzp3y.

Usem os quatro seletores existentes ( ) e as caixas de verificação (☑ Sinal) para responder às questões apresentadas.

Cliquem no botão (Repôr valores) sempre que pretendam repor os valores da função $f(x) = \ln x$.

1 Considerem a função $f(x) = \ln x$. Façam o estudo da função relativamente ao domínio, contradomínio, zeros, às coordenadas do ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy, à injetividade, monotonia, sinal, assíntotas e extremos.

2 Considerem a função $g(x) = \ln(x + 2)$.

a) Como se pode obter a representação gráfica de g a partir da função $f(x) = \ln x$?

b) Façam o estudo da função g relativamente ao domínio, contradomínio, zeros, interseção com o eixo Oy, injetividade, monotonia, sinal, assíntotas e extremos.

3 Considerem a função $h(x) = -\ln x + 4$.

a) Como se pode obter a representação gráfica de h a partir da função $f(x) = \ln x$?

b) Façam o estudo da função h relativamente ao contradomínio, zeros, interseção com o eixo Oy, monotonia, sinal e assíntotas.

4 Completem a seguinte tabela.

	$f_1(x) = \ln(x-2) - 3$	$f_2(x) = -2\ln(4-x)$
Domínio		
Contradomínio		
Zeros		
Interseção com o eixo Oy		
Injetividade		
Continuidade		
Monotonia		
Sinal		
Assíntotas		
Máximos		
Mínimos		