INSTITUTO POLITÉCNICO
DE VIANA DO CASTELO

Andreia Rafaela Teixeira Ribeiro

RELATÓRIO FINAL DE PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA

A comunicação e a resolução de problemas de padrão em matemática:
um estudo com alunos do 2º ciclo do ensino básico

Mestrado em 1º e 2º ciclos do Ensino Básico

Trabalho efetuado sob a orientação da
Professora Doutora Isabel Vale

setembro de 2012

Agradecimentos

Este trabalho só foi possível de ser realizado graças à participação de várias pessoas.

Assim, um primeiro e grande agradecimento vai para as pessoas mais relevantes, que foram sem dúvida, o apoio, a orientação e as sugestões da professora Doutora Isabel Vale, assim como, dos alunos que participaram neste estudo e o tornaram possível.

Um segundo apoio e essencial foi sem dúvida da minha família, um agradecimento especial ao Fernando Paiva pela paciência e apoio ao longo do desenvolvimento de todo o trabalho, e à minha mãe, pois sem ela não seria possível de concretizar esta grande experiência.

Agradeço especialmente à Samanta Aguiar e ao Paulo Brás pelo apoio incondicional e moral nos momentos mais críticos e pela paciência que tiveram de possuir, um grande obrigado pela amizade ao longo de todos estes anos. Assim como, agradeço, ainda, à Samanta pela participação na investigação e apoio ao longo das aulas e na recolha de dados.

Agradeço ainda à minha irmã, Patrícia Paiva, à Judite Marinha, à Liliana Ribeiro e Vitor Sousa pelo apoio e pela ajuda que me forneceram para alguns momentos ao longo da realização deste trabalho.

Por fim, agradeço a todos os meus amigos que me transmitiram pensamento positivo e sempre me encorajaram, em particular, à Stephanie Ferreira, ao Carlos Silva, ao Renato Maia, à Cristiana Ferreira e ao Vitor Ramalho.

Resumo

Este relatório refere-se ao trabalho desenvolvido durante a Prática de Ensino Supervisionada II, num contexto de 2º ciclo, onde foram lecionadas quatro áreas: a Língua Portuguesa, História e Geografia de Portugal, Ciências da Natureza e a Matemática. Ao longo deste período foi realizado um estudo de intervenção na área da matemática.

Esse estudo desenvolveu-se numa turma de 5º ano de escolaridade e centra-se em duas das capacidades transversais em matemática, a resolução de problemas e a comunicação, sendo os padrões o contexto privilegiado do estudo. O principal objetivo é compreender como é que os alunos comunicam as suas ideias quando estão a resolver tarefas de resolução de problemas com padrões.

Para ajudar a delinear e estruturar esta investigação formularam-se quatro questões orientadoras: (a) Como se caracteriza o desempenho dos alunos na resolução de problemas de padrão, identificando as principais dificuldades? (b) Como se poderão caracterizar as principais dificuldades detetadas na comunicação, quer oral, quer escrita das ideias matemáticas envolvidas na resolução de tarefas que envolvem padrões? (c) Que relação se pode identificar entre a resolução de problemas propostos e a comunicação matemática? (d) Que reações manifestam os alunos perante as tarefas de padrão?

Optou-se por uma metodologia de investigação qualitativa com carácter interpretativo, baseada em dois estudos de caso. A recolha de dados recorreu a observações, entrevistas, vários documentos e a registos áudio e vídeo, tendo a investigadora um papel relevante na sua recolha. Da análise dos dados foi possível verificar que os alunos-caso conseguiram realizar todas as tarefas propostas mostrando interesse e entusiasmo na realização das mesmas. Apesar destes alunos nunca terem realizado este tipo de tarefas não demonstraram de modo geral, grandes dificuldades quanto à interpretação do enunciado das tarefas de padrões. As maiores dificuldades que os alunos sentiram foram ao nível da generalização, sobretudo na sua formalização. Revelaram também grandes dificuldades principalmente ao nível da escrita recorrendo a maior parte das vezes a uma linguagem natural, apresentando um discurso confuso. Notou-se contudo uma evolução nos alunos em relação à comunicação, quer escrita quer oral, tendo conseguido expressar o seu modo de “ver” através de expressões numéricas e algébricas.

Palavras-chave: resolução de problemas, comunicação, padrões, generalização, representações.

Abstract

This report refers to the work done during the Supervised Teaching Practice II, in a context of 2nd cycle, where they were taught four subjects: Portuguese Language, History and Geography and Portugal, Natural Sciences and Mathematics. Throughout this period it was developed a study in mathematics.

This study was developed in a class of 5 th grade and focused on two cross-cutting capabilities in mathematics, problem solving and communication being patterns the privileged context of the study. The main goal is to understand how students communicate their ideas when they solve problem solving patterns.

To help shape and structure this research were formulated four guiding questions: (a) How is characterized students' performance in problem-solving pattern, identifying the main difficulties? (B) How can characterize the main problems detected in communication, whether oral or written ideas involved in solving mathematical tasks involving patterns? (C) What relationship can be identified between problem solving and mathematical communication proposed? (D) What reactions manifest the students when they solve pattern tasks?

We opted for a qualitative and interpretative research, based on two case studies. Data collection relied on observations the two interviews, the various documents and records audio and video, and the researcher an important role in its collection. From the data analysis we found that case-managed students perform all tasks proposal showing interest and enthusiasm in their realization. Although these students have never done this type of tasks generally showed no major difficulties in the interpretation of the statement of task patterns. The biggest difficulties that students felt were at the level of generalization, especially in its formalization. Also revealed major difficulties mainly at writing using most often a natural language, presenting a speech confused. It was noted, however, a trend in students regarding communication, whether written or oral, having managed to express the way they "see" through numerical and algebraic expressions.

Keywords: problem solving, communication, patterns, generalization, representations.

Índice Geral

Índice de Tabelas

Índice de Imagens

Lista de Abreviaturas

- APM – Associação de Professores de Matemática

- DNA – Deoxyribonucleic Acid

- ME – Ministério da Educação

- NCTM – National Council of Teachers of Mathematics

- PES I – Prática de Ensino Supervisionada I

- PES II – Prática de Ensino Supervisionada II

PARTE 1 – ENQUADRAMENTO DA PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA II

Nesta parte do trabalho apresentar-se-á de forma sucinta uma caracterização da área envolvente à escola onde decorreu a Prática de Ensino Supervisionada II (PES II) durante a Intervenção em Contexto Educativo (ICE), assim como, uma breve caracterização da escola, dos recursos humanos e atividades. Por fim far-se-á uma descrição global da turma.

CAPÍTULO 1 - O CONTEXTO EDUATIVO E A TURMA

1. O Meio Envolvente e a Escola

Monserrate é uma freguesia do concelho de Viana do Castelo com cerca de 4.927 habitantes. Onde é possível de encontrar algumas lojas, cafés, centro comercial, igrejas, santuários, indústria naval, um jardim de infância (de Monserrate), uma escola do 1º ciclo (de Monserrate), uma escola E.B. 2,3 Dr. Pedro Barbosa, uma escola secundária e a Escola Superior de Tecnologia e Gestão, entre outras instituições.

Assim, vamo-nos focar na escola básica de 2º e 3º ciclo Dr. Pedro Barbosa, onde decorreu a Prática de Ensino Supervisionada II (PES II) durante cerca de três meses, que está inserida no Agrupamento do Atlântico, na freguesia de Monserrate.

Neste sentido, o agrupamento é constituído pela própria escola e pelas escolas: E.B. 1 de Monserrate; E.B. 1 da Avenida; E.B. 1 de Areosa; E.B. 1 de Afife; E.B. 1 de Carreço; Jardim de Infância de Monserrate; Jardim de Infância da Areosa; Jardim de Infância Freixeiro S. e Jardim de Infância de Carreço.

A escola é administrada por uma direção formada por três professores do agrupamento.

A escola pode receber alunos das freguesias de Monserrate, Areosa e Carreço. Esta tem a capacidade máxima de receber 30 turmas, correspondente a 650 alunos, contudo, a otimização das suas instalações é atingida com um máximo de 24 turmas (500 alunos). O horário de funcionamento da escola é o normal, com práticas letivas entre as 8.30 horas e as 16.30 horas, havendo atividades de enriquecimento curricular nos tempos livres dos alunos que podem ocorrer entre as 8 horas e as 18 horas.

A escola apresenta uma construção recente (1995/1996) não tem uma arquitetura acolhedora, tendo zonas confinadas e excessivamente frequentadas. Não possuí instalações de desporto cobertas, utilizando os pavilhões municipais que se encontram ao lado da escola. Os restantes espaços letivos apresentam uma tipologia normal. Apresenta uma biblioteca e salas apropriadas para atividades laboratoriais, para aulas de música e de expressão plástica.

De modo geral a escola contém recursos disponíveis para trabalho com os alunos a várias disciplinas. Como por exemplo, possuí microscópios e materiais e produtos de apoio para a realização de experiências ou atividades práticas na área das ciências. Possuí também diversos materiais educacionais como máquinas de calcular, tangrans, réguas, esquadros, entre outros materiais para trabalho na área da matemática. Pode-se encontrar um armário com vários manuais escolares e cd's interativos de apoio ao professor para as diversas áreas.

A maior parte do corpo docente é constituído por professores do quadro com grande experiência profissional.

Quanto aos alunos apresentam grande heterogeneidade. Este grupo diminuiu entre 2000 e 2007, mantendo-se atualmente com cerca de 500 alunos, somando um total de 24 turmas de 2º e 3º ciclos.

Este grupo é apoiado por cerca de 15 funcionários, sendo estes atribuídos consoante um rácio de AAE/aluno de 1/35.

2. A Turma

A turma, onde decorreu a PES II, era composta por vinte alunos, dez do sexo feminino e dez do sexo masculino, entre os 10 e os 11 anos, tendo um aluno inserido no plano das necessidades educativas especiais. Esta turma era bastante heterogénea, quer a nível socioeconómico, de personalidades e comportamentos entre os alunos, como a nível de aproveitamento escolar, com quatro alunos com mérito no final do 1º ciclo do ensino básico. Todos os alunos residem com pelo menos um dos pais, sendo esses os encarregados de educação.

Para perceber em parte a turma é talvez necessário perceber em que contextos familiares estão inseridos. Desta forma, e acima de tudo, a educação de uma criança deve ser acompanhada não só pelo docente mas sobretudo pelo encarregado de educação e pais. Contudo, a maior parte dos encarregados de educação dos alunos não comparecia às reuniões nem os acompanhava devidamente na situação escolar, havendo constantemente atrasos matinais de alguns alunos, sendo em parte os encarregados de educação culpados. O contexto familiar é também ele heterogéneo, pois, a maior parte dos encarregados de educação apresentam qualificações entre o 2º e o 12º anos de escolaridade, havendo apenas cinco com qualificação ao nível de licenciaturas.

Em relação ao comportamento a turma regrediu no final do ano, pois iniciou o ano letivo sendo uma das melhores turmas, terminando sendo uma das piores. Isto porque alguns alunos tinham comportamentos indevidos fora da sala de aula, desrespeitando por vezes as funcionárias. Dentro da sala de aula o comportamento da turma era melhor, havendo momentos de trabalho, momentos de diálogos participativos e acima de tudo momentos de ensino-aprendizagem por parte dos alunos. Porém, também havia momentos em que os alunos desrespeitavam as regras de sala de aula e desrespeitavam-se entre si, colegas de turma, acabando por prejudicar o bom funcionamento das aulas. Realizavam na maior parte das vezes as tarefas propostas, acabando por se distrair ao fim de algum tempo. Nesta turma existiam alunos que se empenhavam e interessavam pela aula e conteúdos a aprender, outros que continham algumas dificuldades, quer de aprendizagem quer de motivação.

Dentro da turma podem-se encontrar três grupos de alunos distintos. Assim, há o grupo dos alunos com dificuldades de aprendizagem e ritmo de trabalho. Neste grupo estão inseridos aqueles alunos que necessitam de apoio, alguns deles usufruem de apoio extracurricular. Ao longo das aulas estes alunos necessitam mais do apoio do professor para ajudá-los a ultrapassar algumas dificuldades e a empenharem-se mais nas tarefas. Ainda neste grupo encontram-se os alunos que têm dificuldades mas que não se empenham para as ultrapassarem, negando por vezes a ajuda do docente. O segundo grupo que se pode identificar é o dos alunos razoáveis que mantêm um ritmo de trabalho e aprendizagem idênticos. Estes alunos consoante os conteúdos, as áreas disciplinares e as tarefas propostas apresentam comportamentos diferentes. Deste modo é essencial captar-lhes a atenção e mante-los motivados durante as tarefas, como também, incentivar a uma participação ativa na sala de aula por parte deste grupo, para que não percam o interesse e consequentemente favoreça o aparecimento de novas dificuldades.

Por fim, o terceiro grupo diz respeito aos alunos que têm facilidade de aprendizagem. São participantes ativos e raramente apresentam dificuldades. Quando surgem essas dificuldades apenas são momentâneas e correspondentes a novas matérias, quando assimilado bem os conteúdos trabalham a um ritmo bastante acelerado, terminando as tarefas um pouco mais depressa que a restante turma.

Devido ao comportamento já evidenciado de alguns alunos na sala de aula outros saem prejudicados porque querem adquirir aprendizagens e estar atentos ao longo das aulas, perante esta situação esses alunos prejudicados revelaram que pretendiam mudar de turma no ano letivo seguinte. Devido à alteração de comportamento da turma, esta teve punições durante os intervalos, liderados pela diretora de turma, de forma a transmitir valores e comportamentos adequados, levando alguns dos alunos a refletir acerca das suas atitudes. Contudo, na maioria a turma é simpática, divertida, bem-disposta, humilde, apresentando alguns distúrbios principalmente entre os rapazes e entre três raparigas. Havendo outros alunos com espírito de entreajuda para com os colegas que apresentam maiores dificuldades.

CAPÍTULO 2 - UMA PEQUENA E GRANDE EXPERIÊNCIA

Uma vez que esta formação habilita lecionar quatro áreas distintas, torna-se necessário refletir um pouco acerca de cada uma, e da experiência sentida e vivida em cada uma delas. Deste modo será apresentada uma planificação de uma aula e a reflexão para a mesma aula. As planificações analisadas encontram-se em anexo, as restantes planificações e reflexões encontram-se em anexo digital (*CD*).

1. Língua Portuguesa

Começando pela *Língua Portuguesa*, a planificação (Anexo 1) escolhida refere-se ao tema das lendas, mais precisamente a lenda dos nove irmãos e os advérbios e esta não foi a melhor nem a pior a aula. Contudo, foi a minha primeira aula observada, quer na disciplina quer no contexto do 2º ciclo, mas também onde cometi e ocorreram determinadas incorreções ao longo da aula que me fizeram aprender. Assim, como primeira aula e para ser algo diferente da rotina da turma tentei criar um enigma como motivação à turma para decorrer da aula. Este correu bem e os alunos aderiram a ele com entusiasmo descobrindo o tema da restante aula. Nesta aula teria de dar uma lenda sobre a formação do arquipélago dos Açores, deste modo lembrei-me de fazer uma atividade que envolvesse nove lendas, uma de cada ilha do arquipélago e cada grupo de alunos teria de recontar a sua lenda à restante turma. Com esta atividade pretendia que os alunos desenvolvessem a comunicação oral e o poder de síntese, ou seja, um porta voz do grupo teria, depois de ler a lenda, de fazer um pequeno resumo da mesma de forma oral à turma. Contudo, a atividade não correu como eu pensava, pois a turma dispersou-se, alguns alunos aproveitavam o facto de estarem em grupo para falarem, ficando mesmo um grupo sem fazer o reconto porque não sabiam faze-lo e outro necessitou da minha ajuda para construir algumas partes da história. Penso que como futura estratégia deva primeiramente trabalhar com os alunos a pares e ensinar-lhes as regras de trabalho de grupo, porque algumas crianças não o sabem fazer, e esta turma não tinha hábitos de trabalho de grupo. A metodologia utilizada não foi a melhor, deverei futuramente, apresentar um pequeno resumo da mesma para facilitar a atividade e não prejudicar tanto o tempo de aula com pausas desnecessárias. De seguida, a lenda que o manual apresentava e que reportava à formação do arquipélago apresentei-a em *PowerPoint* como um pequeno filme, gravando inclusive as vozes das personagens. Porém, a certa altura as falas deixaram de dar e as colunas não projetavam um som relativamente alto para que toda a turma conseguisse ouvir claramente. Assim, um momento que pretendia que fosse diferente acabou por falhar e não consegui ultrapassar esta situação. Portanto como perspetiva futura, deveria ter desligado o computador e continuar no manual, ou, continuado apenas a visualização do *PowerPoint* mas fazendo eu as vozes no momento da aula. Para terminar, elaborei outro *PowerPoint* para inserir os advérbios à turma. Contudo, devido ao sumário ter sido escrito no início da aula, quando o *PowerPoint* estava a mostrar as falas entre as personagens, um aluno alegou imediatamente que este se tratava dos advérbios. Nesta situação deveria ter questionado o mesmo acerca do que eram então os advérbios, facto que o aluno não sabia. Devido a este percalço o sumário passou a ser escrito no final das aulas de modo a que os alunos fizessem uma breve síntese do que foi abordado ao longo da aula. Quanto ao recurso de matérias informáticos e diferentes das rotinas os alunos demonstraram interesse e motivação de forma que esta estratégia foi utilizada para outras aulas posteriores.

2. História e Geografia de Portugal

Quanto à disciplina de *História e Geografia de Portugal* a planificação (Anexo 2) escolhida por mim diz respeito também à primeira aula, cujo tema era o Império Português no século XVI, mais precisamente a exploração da Ásia. Esta aula também foi a primeira observação à disciplina, contudo acho que foi uma das melhores aulas por vários motivos. Durante a aula circulei bastante pela sala de aula, deslocando-me sempre que necessário para o lado dos alunos que estavam a perturbar a aula, controlando a turma. Uma vez que esta estratégia funcionou utilizei-a sempre. Outra estratégia iniciada nesta aula foi a realização de um esquema no início da aula que seria completado ao longo da aula com a matéria abordada, de modo a sintetizar os principais conteúdos. Nesta aula houve grande diversidade de imagens e documentos para serem analisadas pelos alunos, assim, todos os alunos participaram na aula porque eu questionava-os sobre os conteúdos envolvidos, quando alguém não sabia responder promovia a entreajuda entre a turma, pedindo a outro aluno para ajudar o que tinha dificuldades. No entanto, no final desta aula apresentei um *PowerPoint* com as principais especiarias vindas do Oriente, este gerou um pouco de barulho e distração porque todos os alunos queriam dizer qual era o nome do produto apresentado não respeitando uma das regras de sala de aula, que era levantar o dedo e esperar pela sua vez, respeitando os colegas e professor. Desta forma deveria ter explicado o que pretendia antes de apresentar os slides. Finalizei a aula com a escrita do sumário, sendo este elaborado pelos alunos sob a minha orientação, realizando simultaneamente uma síntese dos conteúdos abordados, estratégia esta seguida nas aulas seguintes.

3. Ciências da Natureza

Quanto à área das *Ciências da Natureza* a planificação (Anexo 3) esta reflexão diz respeito à primeira aula, cujo tema era as propriedades do ar. A aula começou já com os grupos formados por mim, esta é uma estratégia que evita perda de tempo e conflitos. A aula iniciou com um diálogo com os alunos de modo a criar um pequeno debate e descobrir algumas ideias dos alunos. Porém, este diálogo teria sido mais motivante se surgisse a partir de um pequeno jogo que motivasse os alunos para o próprio tema, assim eles apenas respondiam o que sabiam ou iam procurar no seu manual. A aula continuou envolvida numa história apresentada em *PowerPoint*, com personagens de um filme que os alunos conheciam. Esta estratégia foi motivante e entusiasmante para os alunos, porque era uma aula diferente do normal e tinham que resolver uma situação problemática. O facto de terem de realizar atividades práticas para descobrirem as propriedades do ar e assim ajudarem a personagem foi algo de gratificante para a turma. Uma vez que a aula estava organizada de forma diferente a turma teve momento de grande agitação, havendo alunos que desrespeitaram as regras de sala de aula, mesmo depois das regras serem revistas. Devido a este motivo, uma das estratégias para precaver este tipo de situações seria o aluno que teve essa atitude realizar a restante aula sozinho. Para entusiasmar ainda mais a turma e em parte evitar conversas paralelas seria realizar as mesmas atividades práticas mas em forma de desafio. Ou seja, cada grupo seria uma equipa, as atividades já estariam preparadas e distribuídas por estações, assim os alunos teriam de passar por todas as estações de modo a efetuarem as atividades e responderem às questões. Quem terminasse primeiro teria direito a um prémio, como por exemplo saírem mais cedo dois minutos, um diploma, um crachá, entre outras coisas.

4. Matemática

Para a área de *Matemática* a planificação (Anexo 4) é da terceira aula que lecionei, tendo como tema a descoberta do valor de "pi". Relativamente a esta aula, apesar de ter corrido bem existem certos pormenores que correram menos bem. Assim, um dos aspeto positivos foi sem dúvida as questões colocadas durante o diálogo com os alunos acerca da diferença entre círculo e circunferência, entre outros conteúdos, contudo, a minha postura deveria ter sido mais dinâmica de modo a que os alunos fossem também mais ativos nas respostas e na sua participação. A tarefa prática de serem os alunos a descobrirem o valor do "pi" através do perímetro do círculo foi uma atividade que os deixou motivados e entusiasmados, realizando a atividade com empenho. Contudo, esta tarefa demorou demasiado tempo fazendo com que alguns alunos dispersassem um pouco ao fim de determinado tempo. Deste modo deveria ter dado um certo tempo de realização para cada alínea e corrigir essa mesma alínea em seguida, de modo a controlar o trabalho dos alunos. Outro aspeto importante foi uma falha minha na correção da tarefa onde deveria ter projetado a tabela no quadro que os alunos deveriam preencher, de modo a que os alunos fossem acompanhando o que estava a ser corrigido e permitiria que comparassem os resultados obtidos em cada grupo. Resultados, estes que foram distintos, mas, que conseguissem verificar que o valor do "pi" era constante, podendo assim refletir em conjunto, não ficando a ideia no "ar".

5. O Tema Para o Estudo

A área escolhida para o trabalho de investigação foi a matemática. Durante a minha experiência no 1º ciclo, PES I, contactei também com estas quatro áreas e deparei-me logo nesse contexto que das quatro áreas a matemática era a área à qual os alunos tinham mais dificuldades, e dentro dessas dificuldades, uma delas era a falta de comunicação e o fraco desempenho na realização de situações problemáticas. Neste sentido, iniciado as observações na área de matemática, no contexto do 2º ciclo, PES II, a problemática detetada no 1º ciclo evidenciava-se ainda mais neste ciclo. Neste contexto os alunos apenas realizavam tarefas rotineiras e onde se "queixavam" que não gostavam das aulas de matemáticas onde só realizavam "exercícios". Tendo em conta que a resolução de problemas e a comunicação são duas das grandes áreas transversais que o novo programa de matemática destaca, achei relevante que a minha investigação incidisse nesta temática. Por este lado, como através da resolução de problemas pode desenvolver-se a comunicação matemática, optei por implementar tarefas deste tipo para poder analisar a evolução dos alunos e verificar o nível de motivação. É importante ainda referir que a comunicação é transversal a todas as áreas disciplinares. Uma vez desenvolvida numa área pode influenciar as outras, porque se o aluno está habituado a comunicar e a argumentar os seus pensamentos numa disciplina, quando pedido em outra disciplina será muito mais fácil de o fazer. Os padrões são temas que proporcionam conexões tais como a resolução de problemas, deste modo, foi pertinente juntar estes dois temas para contribuir não só para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, como também para o desenvolvimento da comunicação e assim contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

PARTE II – O TRABALHO DE INVESTIGAÇÃO

Nesta secção abordar-se-á o trabalho investigativo desenvolvido no contexto da Prática de Ensino Supervisionada II, numa turma do 5ºano. Assim, será apresentado o problema e as questões orientadoras do estudo efetuado, assim como todo o seu desenvolvimento.

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo sintetiza a importância do tema do estudo, assim como apresenta o seu objetivo e as questões orientadoras. Finalizando com o modo de organização deste trabalho escrito e o que cada capítulo retrata.

1. Pertinência do Tema

Uma vez que a matemática é uma área com muita relevância e tem evoluído cada vez mais ao longo dos últimos anos, o tema deste estudo incide nesta área. Deste modo, durante a Prática de Ensino Supervisionada II no contexto do 2ºciclo, mais propriamente numa turma de 5ºano do ensino básico, foi detetada uma dificuldade dos alunos na comunicação oral e escrita, e na resolução de tarefas abertas, como a resolução de problemas.

Sendo a comunicação um tema transversal é importante que o professor a desenvolva na sala de aula, ajudando os alunos a compreender o seu próprio pensamento, o pensamento da turma e a ver várias perspetivas de solução para o mesmo problema. Porque, segundo Ponte, Boavida, Graça & Abrantes (1997) o aluno necessita de falar com os seus colegas e com o professor para que possa explicar o significado de certos conceitos, para discutir, aplicar e verificar as soluções dos problemas. Estas estratégias fornecem dados importantes ao professor para que este perceba a forma como os alunos pensam e identificar quais as suas dificuldades.

Deste modo o professor tem um papel essencial na sala de aula, porque é ele que realiza a escolha das tarefas e é através dele que os alunos adquirem experiências e conhecimentos. Cabendo ao professor atender às características da sua turma e desse modo tomar decisões que favoreçam as suas aprendizagens. O programa de matemática (Ponte, et al., 2007) menciona que o professor deve propor tarefas diversificadas, explicando o que se pretende em cada uma e dar apoio na sua realização. Este, refere ainda que "ouvir e praticar são actividades importantes na aprendizagem da Matemática mas, ao seu lado, o fazer, o argumentar e o discutir surgem com importância crescente" (ME, 2007, p.9), logo o professor deve propor tarefas que desenvolvam estas capacidades.

Escolheu-se trabalhar a comunicação escrita e oral na resolução de problemas de padrões, uma vez que a resolução de problemas é outra capacidade transversal "que tem vindo a assumir um papel fundamental no currículo de Matemática" (Barbosa, Palhares & Vale, 2008) e que se interliga com a comunicação, ao convidar o aluno a explicar como pensou para chegar ao resultado. Ou seja, é na fase da discussão/reflexão que o professor deve "estimular a comunicação entre os alunos" (Fonseca, Brunheira & Ponte, 1999, p.8), tendo estes que argumentar e defender as suas ideias. É ao refletir que se adquire conhecimento estabelecendo conexões entre as ideias já adquiridas com as novas ideias. Por outro lado, estas tarefas ao incidirem nos padrões desenvolvem ainda o pensamento algébrico. Pois, segundo Barbosa et al. (2008) as tarefas de exploração de padrões desenvolvem as capacidades de resolução de problemas, a organização de ideias, a formação de conjeturas e a generalização. Assim, selecionaram-se tarefas de padrões que fossem acessíveis a alunos do 5º ano de escolaridade e que centralizassem alguns temas da matemática, como sejam: áreas e perímetros, números naturais e números racionais.

2. Problema e Questões do Estudo

Assim, devido às ideias apresentadas anteriormente, o objetivo desta investigação é compreender como é que alunos do 5º ano de escolaridade comunicam as suas ideias quando estão a resolver tarefas de resolução de problemas com padrões. Para orientar este estudo formularam-se quatro questões essenciais às quais se pretende responder no final da investigação:

- Como se caracteriza o desempenho dos alunos na resolução de problemas de padrão, identificando as principais dificuldades?

- Como se poderão caracterizar as principais dificuldades detetadas na comunicação, quer oral, quer escrita das ideias matemáticas envolvidas na resolução de tarefas que envolvem padrões?

- Que relação se pode identificar entre a resolução de problemas propostos e a comunicação matemática?

- Que reações manifestam os alunos perante as tarefas de padrão?

3. Organização do Estudo

Este estudo encontra-se dividido em sete capítulos, sendo o sétimo capítulo as referências bibliográficas que sustentam esta investigação. Assim, o primeiro capítulo diz respeito à presente introdução, onde se explica a importância do tema e da problemática em estudo e se apresenta a estrutura do estudo.

O segundo capítulo é o enquadramento teórico que fundamenta este estudo. Neste capítulo aborda-se sucintamente a evolução do ensino de matemática, identificando as principais diferenças entre o ensino tradicional e o ensino exploratório. Assim, a resolução de problemas de padrões são as tarefas adequadas ao ensino exploratório e ainda permitem o desenvolvimento da comunicação. Deste modo, aborda-se a resolução de problemas, a comunicação e os padrões, identificando algumas das suas características segundo a perspetiva de vários autores.

O terceiro capítulo diz respeito à metodologia em que se enquadra o presente estudo, ou seja, uma metodologia qualitativa com carácter interpretativo. Inicia-se o capítulo pela caracterização da investigação qualitativa na modalidade do estudo de caso. Especifica-se qual o papel da investigadora e quais os critérios adotados para a seleção dos dois alunos-caso. Descrevem-se, ainda, os procedimentos seguidos neste estudo e quais os métodos adotados para a recolha e análise dos dados.

O quarto capítulo é dedicado às tarefas implementadas na sala de aulas, este encontra-se estruturado segundo a proposta didática para o ensino dos padrões e apresentam-se as expetativas de resolução esperadas para cada tarefa.

O quinto capítulo debruça-se sobre a descrição dos dois alunos-caso: a Mariana e o Martim. Começando por uma descrição da turma na realização das tarefas.

No sexto capítulo faz-se uma comparação entre os dois alunos-casos, especificando semelhanças e diferenças. Sintetiza-se ainda as principais conclusões desta investigação, enquadradas com as principais conclusões dos estudos empíricos e textos revistos. Para finalizar apresentam-se as limitações do estudo e perspetivas para estudos futuros.

CAPÍTULO 2 - ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Este capítulo tem como objetivo fazer o enquadramento teórico do presente estudo, abordando os temas relevantes e utilizados ao longo de toda a investigação e ainda, temas que são essenciais e necessários para se perceber a essência deste trabalho. A primeira temática aborda sucintamente a evolução no ensino-aprendizagem da matemática fazendo-se referência ao papel das tarefas e do professor na condução da sala de aula e da gestão das aprendizagens dos alunos. A segunda temática foca-se nas capacidades transversais em matemática, em particular a resolução de problemas e a comunicação. Neste subtema pretende-se demonstrar qual a importância destas duas grandes áreas que fazem parte do currículo nacional e que devem ser desenvolvidas na sala de aula. A terceira temática complementa a segunda e centra-se no tema de padrões. Isto porque, optou-se por trabalhar a resolução de problemas no tema dos padrões. Assim, importa começar por discutir o conceito, assim como a sua importância e relação com a resolução de problemas.

1. O Ensino-Aprendizagem da Matemática e as Recentes Orientações Curriculares

1.1. Breve Referência aos Diferentes Tipos de Ensino da Matemática

Como se sabe, o ensino tem sofrido várias mudanças ao longo dos anos, sofrendo reformas sucessivas, o que consequentemente se reflete no ensino-aprendizagem da Matemática que tem evoluído paralelamente. Para esta evolução tem contribuído os novos modelos a implementar na sala de aula seguidos e defendidos por determinados autores, condicionando o tipo de ensino. Contribui, ainda, o professor, o seu papel dentro da sala de aula e as suas escolhas acerca dos recursos a aplicar aos alunos para desenvolver a sua aprendizagem, ou seja, em específico as tarefas. Desta forma, começar-se-á por analisar um pouco da evolução do ensino, focando em seguida nos tipos de ensino existentes, nomeadamente, o ensino exploratório.

Tentar definir o conceito de educação é algo complexo, pois, a sua definição varia de autor para autor e consoante o tempo. Ferreira (2004) discute o termo educação com base em dois autores transcritos seguidamente, assim, para Santos (1961) existem dois modos de definir "educação":

> Educação proeminente do verbo latino – *educo*, *as*, *are*, que significa nutrir ou alimentar, sendo *educare* ou Educação uma alimentação ou assimilação. Educação proeminente do latim *educere* que significa tirar de dentro para fora, ou seja, no educando há potencialidades que o educador deve fazer desenvolver (citado em Ferreira, 2004, p.27).

Enquanto para Luzuriaga (1977,p.1) o conceito de "Educação" é interpretado como a:

> influência intencional e sistemática sobre o ser juvenil com o propósito de formá-lo e desenvolve-lo. Mas significa também a acção genérica e ampla de uma sociedade sobre as gerações jovens com o fim de conservar a existência colectiva (citado em Ferreira, 2004, p. 28).

Assim, quando falamos em educação referimo-nos a um termo muito vasto que tem evoluído ao longo dos séculos, reunindo um conjunto de características e teorias importantes para o desenvolvimento e evolução do ensino-aprendizagem. Várias teorias foram adotadas e defendidas até aos dias de hoje, dando-se a principal evolução nos finais do século XIX. De acordo com Campos (2001), durante décadas vigorou o ensino tradicional, que era enciclopédico e estático e recorria à memória, ao livro de texto, onde o seu objetivo era transmitir conhecimento, onde a educação era sinónimo de adestramento. Mais tarde surgem novos movimentos, por exemplo, o Movimento da Educação Nova suportado em várias teorias de pedagogos. Este movimento opõe-se à escola tradicional, pois, recorre à inteligência, é contra o uso exclusivo de livros (anti-compêndio), tem como objetivo o "saber-fazer" e a educação é sinónimo de auto-formação, é eclética e dinâmica. A escola nova tem precursores importantes que contribuíram para o que a educação é hoje, ou seja, Erasmo que é contra a disciplina e a memorização; Montaigne que dá valor à liberdade dos estudantes; Descartes que evidencia a importância da matemática; e Rousseau ao defender a ideia de, que o aluno não aprende Ciência, mas tem que a descobrir. A concordar com Rousseau aparece John Dewey ao defender que a educação é "pragmática e instrumentalista: educação pela acção ("Learning by doing" – aprender fazendo)" (Campos, 2001, p.92).

Falou-se até aqui numa evolução da educação em geral, no entanto, esta evolução afeta todo o ensino, inclusive, o ensino-aprendizagem da matemática. Desta forma, Ponte (2003) confirma a existência do ensino tradicional na matemática, dominante nos anos 40 e 50, sendo este mecânico e com recurso à memorização. Sendo os curriculos da matemática bastante reformulados nos anos 60, "introduzindo uma nova abordagem da Matemática" (Ponte, 2003, p.5). Nesta década surge Sebastião e Silva, também contra o ensino tradicional, defende o modelo da redescoberta usado por George Pólya que diz o seguinte:

> A modernização do ensino da Matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos alunos é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os alunos e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta. (citado em Ponte, 2003, p.6).

Mas é apenas nos anos 90 que se altera o programa de Matemática dando ênfase a determinados conteúdos importantes nesta área, como a geometria, a resolução de problemas e o uso das novas tecnologias (Ponte, 2003).

O currículo da Matemática volta a ser reajustado sofrendo algumas alterações e surgindo a sua implementação em 2007, sendo o que vigora até hoje (ME, 2007). Este trouxe novas mudanças a todos os ciclos de ensino, apresenta uma organização por ciclos, melhorando a articulação entre estes, e, inserindo, as três competências transversais (comunicação, raciocínio e resolução de problemas), que podem ser desenvolvidas ao longo de todo o ensino-aprendizagem da disciplina de matemática. Estas fazem conexões entre si e entre outras áreas do saber.

Atualmente, com o currículo que está em ação, Ponte (2005) defende a existência de duas estratégias na aprendizagem da matemática, existe, assim, o ensino direto e o ensino exploratório, ambas, se encontram em ação pelos professores de matemática.

O ensino direto está um pouco ligado ao ensino tradicional, ou seja, para Ponte (2005) o professor é o elemento principal de informação, explicando de forma clara determinadas situações e vários exemplos, o aluno apenas ouve o que o professor diz, para além desta, a outra tarefa do aluno é a realização sistemática de exercícios com o objetivo de adquirir as técnicas, já explicadas pelo professor. Desta forma aprender é sinónimo de ”saber como se fazem todos os tipos de exercícios susceptíveis de saírem em testes” (Ponte, 2005, p.13). Este ensino tem como objetivo a transmissão de conteúdos, logo, o professor e o manual são as fontes de exposição da matéria.

Contrariamente a este ensino existe o ensino exploratório, no qual a frase de Dewey, “educação pela ação”, que se interliga com o ensino exploratória da matemática. Pois, é um ensino no qual o aluno tem de explorar e aprender o seu conhecimento, tem de agir para adquirir conhecimento. Ponte (2005) carateriza esse ensino como um ensino onde o alunos tem de descobrir e construir o seu próprio conhecimento, onde o professor apenas explica o essencial, deixando essa tarefa para o aluno, ou seja, segundo este autor é quando ocorre um ensino-aprendizagem. Este autor afirma ainda que o “ensino-aprendizagem exploratório não significa que tudo resulta da exploração dos alunos, mas sim que esta é uma forma de trabalho marcante na sala de aula” (p.14).

Uma das principais diferenças entre o ensino direto e o ensino exploratório é que no ensino direto, o conhecimento teórico é o que vem em primeiro lugar, só depois, é que vem a prática, com a exploração de exercícios. O ensino exploratório é, de novo, oposto ao ensino direto, assim, a prática vem em primeiro lugar, onde os estudantes têm um grande envolvimento, só no fim, é que se discutem os resultados e fundamentam-se teoricamente. (Ponte, 2005). Desta forma, o tipo de tarefas privilegiadas pelo ensino exploratório são as investigações, problemas, projetos ou seja, tarefas abertas, com possibilidade de exploração, reflexão e discussões entre o professor e alunos. Indo de encontro a este ensino surge o modelo das cinco práticas.

A exploração das tarefas deve seguir o modelo das *cinco práticas* de modo a orientar uma boa discussão dentro da sala de aula, defendido pelas suas autoras Smith, Hughes, Engle e Stein (2009). Assim, este modelo, como o nome indica tem cinco etapas, ou seja, as cinco práticas essenciais para a exploração de tarefas. Vejamos mais concretamente em que consiste cada uma dessas cinco práticas.

A primeira prática diz respeito ao *antecipar*, logo, o professor, perante as tarefas a implementar na sala de aula, deve antecipar as respostas dos alunos. Deve prever as diferentes maneiras de resolver a tarefa, antecipando as várias soluções que podem surgir, tendo em conta, como os alunos podem interpretar matematicamente o problema. A segunda prática diz respeito ao *monitorizar,* nesta fase, o professor deve acompanhar os alunos no desenvolvimento das tarefas. Assim, de acoedo com as autoras o professor deve circular pela sala de aula e prestar atenção aos alunos, observando e ouvindo-os, no entanto, este também deve ajudar a clarificar o pensamento dos alunos, orientando-os através de questões, para que eles possam aperfeiçoar e rever as suas estratégias. Deve-se, ainda, seguir o que Lampert (2001) defende, ou seja, ter atenção aos alunos enquanto trabalham, de modo a usarem-se essas observações para se decidir no que se focar e em quem, ajudando a implementação da próxima fase. A terceira prática deste modelo é a *selecionar,* tal como o nome indica, é aqui, nesta etapa, que se vai selecionar os alunos para partilharem as suas ideias matemáticas acerca da tarefa explorada. O professor ainda pode partilhar uma estratégia que nenhum aluno tenha realizado, para que os alunos visualizem outra estratégia que também poderia funcionar. A quarta prática é o *sequenciar,* ou seja, qual será a ordem pela qual os alunos devem apresentar, quem deve ser o primeiro. Tal como afirmam Smith et al. (2009), tanto a seleção e a sequência escolhida para a aula dependem dos objetivos que o professor tem. O professor pode ter vários objetivos, pode querer demonstrar a estratégia mais utilizada, ou a menos utilizada, ou uma estratégia que é complexa mas intessante, tudo depende do que o professor pretende atingir. A quinta e última prática deste modelo de referência é o *estabelecer conexões,* o objetivo desta última fase é interligar as diferentes respostas matemáticas dos alunos para que surjam as ideias, os conceitos matemáticos. Estas surgem através de uma boa discusão das tarefas de modo a que os alunos consigam retirar e interligar conteúdos, assimilando estratégias de resoluação para futuramente poderem eles próprios aplicar. Assim, as autoras confirmam que através das discusões os alunos entendem qual o padrão matemático presente nos problemas e qual a precisão de resolver problemas. Esta última etapa é talvez a que tem mais importância uma vez que é nela que os alunos trocam as ideias, refletem e comunicam as suas resoluções.

Para que este tipo de ensino e modelo, ou outro diferente funcione, é importante o papel do professor, a escolha das tarefas e a própria sala de aula. Neste sentido serão abordados de seguida esses tópicos.

1.2. O Professor e a Aula de Matemática

Tal como o ensino também o papel do professor sofreu uma evolução ao longo dos tempos, assim, de acordo com Ferreira (2004) durante o Estado Novo, o professor era visto como um modelador e transmissor dos valores e princípios que o estado pretendia transmitir. Com a instauração do 25 de abril o papel do professor sofreu alterações, assim, em 1979, o professor já tem como função motivar os alunos, dar explicações teóricas que os alunos compreendam, selecionar tarefas onde o enunciado destas fosse claro e simples de perceber, para que a dificuldade dos alunos não fosse a compreensão do enunciado, dentro das tarefas selecionadas, o professor devia impor problemas ligados à vida quotidiana e ao mesmo tempo, que fizessem conexões com outras áreas disciplinares, nestas, os temas abordados deviam desenvolver determinadas aptidões, como, "analisar, sintetizar, criticar e criar". O papel do professor dentro da sala de aula foi-se modelando ao tipo de ensino em vigor nas salas de aulas, definido pelo governo. No entanto, hoje em dia, apesar de se defender (e o programa de matemática ir nesse sentido), o ensino exploratório, existem professores ainda "acorrentados" ao ensino tradicional.

Antigamente, o professor era o centro das atenções na sala de aula, todo o processo de ensino era centrado nele e não no aluno. Era apenas ele que falava, o aluno tinha como obrigação decorar o que o professor dizia. Não podendo esclarecer ou retirar qualquer dúvida que existisse. Hoje em dia o papel do professor já não é o mesmo, pois, o professor, deve dar mais atenção aos alunos, o foco passou para os alunos. O papel do professor é proporcionar situações de ensino-aprendizagem em que seja o aluno a procurar o seu próprio conhecimento, explorando tarefas abertas e de investigação, levando por isso os alunos a manipular objetos e a criar situações de curiosidade e motivação pelas aulas.

Segundo Ponte (2003) a aprendizagem da Matemática é um processo complexo que surge em diversos momentos na sala de aula, estes momentos devem permitir a "exploração, a formalização e a integração das ideias matemáticas". Por outro lado, considerando, de acordo com Davis e Hersh (1995, citado em Ponte, 2003, p.14) "A Matemática é um campo do saber com características próprias, marcadas pela sua tendência para a generalização, a abstracção e a formalização"

Deste modo, ser professor de matemática exige que o professor saiba Matemática, necessitando de um "conhecimento profissional", que envolve o conhecimento científico, o conhecimento didático, o conhecimento do programa e o conhecimento dos métodos de aprendizagem (Ponte, 2001). Assim, este autor defende que o professor deve saber Matemática, deve de igual modo ter em atenção às características do aluno e do contexto que o rodeia. Pois a imagem do professor como alguém a "debitar matéria", voltado para o quadro, de costas para os alunos, a passar exercícios do manual e a fazer dois testes por período é, hoje em dia, uma caricatura desatualizada. O professor hoje em dia se quer ter sucesso com os seus alunos não pode ser assim. É de senso comum que a matemática é uma das áreas com mais insucesso escolar, tendo desta forma, o professor uma responsabilidade acrescida, pois, tem de motivar os alunos para esta disciplina, incutindo-lhes o gosto pela mesma, porque "a capacidade matemática é inseparável do gosto pela Matemática" (APM, 1988, p.4). Isto porque, os alunos ao iniciarem a sua vida escolar já têm contacto com a matemática devido às situações do dia-a-dia que contêm implicitamente conceitos matemáticos, como irem às compras com os pais, como saberem a sua idade, entre outras coisas, logo, estão predispostos a aprender. No entanto, necessitam de situações de aprendizagem que os envolvam e os motive a uma participação ativa. Isto porque, a escola tem a função de desenvolver a capacidade matemática dos alunos. À medida que aprendem ficam habilitados a analisar, fazer conjeturas, a resolver problemas e a raciocinar matematicamente, desenvolvendo também a comunicação matemática (APM, 1988).

Uma vez que o aluno é o principal interveniente no processo de ensino-aprendizagem, o professor deve saber quais os seus gostos e conhecer os seus pensamentos, pois só despertando o gosto pela aprendizagem é que este se envolve e aprende (Ponte, 2003). O professor deve deste modo planear as aulas tendo em conta as características dos seus alunos, de modo a criar situações de aprendizagem recorrendo a determinados recursos como fichas de trabalho, computador, projetor e o manual escolar (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997). Como afirma o programa de matemática (ME, 2007) o manual tem um papel muito importante na escola, porque está adaptado ao curriculo, assumindo percursos de aprendizagens que nem sempre estão de acordo com as caraterísticas dos alunos. É nesta fase que o papel do professor se torna essencial, pois tem de analisar o manual e selecionar as tarefas que estão de acordo com os seus alunos. O programa de matemática (ME, 2007) e Ponte (2005) defendem ainda que o manual deve conter uma diversidade de tarefas e possibilitar diversas formas de trabalho por parte dos alunos, no entanto, alguns manuais não apresentam tarefas diversificadas; apresentando em predominância os exercicios mecanizados, e um ou outro problema, em vez de terem tarefas abertas que permitam o desenvolvimento das competências transversais, ou seja, o raciocínio, a comunicação e a resolução de problemas. Estes temas vão ser explorados mais adiante.

Uma das ferramentas poderosas que o professor deve utilizar é o questionamento aos alunos, pois através dele consegue detetar nos alunos dificuldades em determinados conceitos, e assim, ajudar a turma a pensar da melhor forma, a motivá-la e a incentivar a participação dos alunos na aula (Ponte et al., 1997). Deste modo, os alunos devem expor o seu pensamento, para que o professor consiga perceber se entenderam ou não a matéria. Os alunos devem participar na sala de aula, retirar dúvidas e devem falar não só para o professor, como também para os seus colegas, possibilitando situações de interajuda e de aprendizagem entre os discentes.

O professor deve procurar nunca dar a resposta diretamente ao aluno, mas sim, fazer com que ele consiga obter a resposta que deseja explorando e raciocinando, tal como afirmam Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) o professor deve "incentivar o espírito crítico, a reflexão e a procura de argumentos e razões que permitam aos alunos confirmar ou não as suas conjecturas" (p.8). O professor deve questionar, e caso o aluno em questão não saiba responder, o docente deve procurar encontrar a resposta à dúvida nos alunos da turma, ou seja, orientar a aprendizagem coletiva e cooperativa. Deve incentivar os alunos a corrigirem-se entre eles, vendo isso como algo positivo e de cooperativo na sala de aula e na aprendizagem, tendo sempre como objetivo a não desmotivação dos discentes. Ponte et al. (1997) defendem o mesmo, ou seja, que "os alunos devem explicar o significado de conceitos, fazer conjecturas, propor estratégias e soluções para os problemas, devem poder discutir, testar, aplicar e verificar as suas descobertas" (p.15). Pois só através da participação e exposição em voz alta acerca das suas ideias matemáticas os alunos desenvolvem uma aprendizagem em cooperação, onde os alunos descobrem conexões dentro de conceitos matemáticos, adquirindo maior segurança nas suas próprias ideias e discurso matemático, permitindo através dessa discussão desenvolver o seu raciocínio e a criatividade (Fonseca, Brunheira & Ponte, 1999). Bishop e Goffree (1986) afirmam que a aprendizagem que ocorre na fase da discussão de ideias é essencialmente devido à reflexão que se faz sobre a atividade realizada, pois, como já afirmado anteriormente, estabelecem-se conexões com outras ideias matemáticas. Ponte (2003) reforça a ideia de Bishop e Goffree, ao defender que o aluno aprende com o fazer e a refletir sobre esse fazer. Assim, o professor deve implementar na sala de aula a resolução de problemas, pois, estes permitem desenvolver o raciocínio matemático, a argumentação e a reflexão dos discentes, permitindo realizar conexões entre ideias matemáticas e sobretudo com a realidade, de modo, que o aluno perceba a importância que a matemática tem, porque a "Matemática serve as necessidades dos indivíduos" (p.11).

Cabe ao professor, como já afirmado, perceber e interpretar o currículo tendo em conta as caraterísticas dos seus alunos, os objetivos a atingir e os recursos que tem a seu dispor, assim, o professor deve planificar a nível macro (planificação anual ou planificação por período) e a nível micro (planificação de uma aula ou unidade) (ME, 2007). O programa de matemática vai mais longe ao afirmar que toda a planificação pressupõe uma estratégia de ensino e que deve conter uma diversidade de tarefas, prevendo diversos momentos de trabalho para a sala de aula. No entanto, para além do papel do professor, também a sala de aula, ou seja, o contexto que envolve a aprendizagem é importante.

1.3. A Aula de Matemática

Quando se pensa em sala de aula apenas nos lembramos do espaço físico em si, ou seja, o quadro, as mesas, as cadeiras, as janelas, o projetor e o quadro interativo. Todas estas condições influenciam uma aula, pois as cadeiras, convém que sejam confortáveis, e que permitam uma postura direita para permitir o trabalho dentro da sala de aula; a mesa também tem de ser espaçosa para se poder trabalhar; o quadro é onde se explicam os conteúdos abordados e onde se escreve o sumário, entre outras coisas; o projetor e o quadro interativo são materiais importantes para manter uma aula didática e dinâmica; a sala de aula também deve isolar o barulho de fora, de modo, a não perturbar a aula. Assim, a sala de aula é relevante para o ensino-aprendizagem, pois, é neste contexto que ele se realiza. Mas é sobretudo o que se passa dentro deste espaço físico que realmente vai condicionar o que se ensina e aprende em matemática. Desta forma dentro da sala de aula existem três fatores importantes, que influenciam este processo, as tarefas (matemáticas), os alunos e o professor, podendo formar um triângulo onde estas três componentes/fatores se interligam.

Assim, esta dinâmica depende do professor, porque é ele que leciona e conduz toda a aula, é ele que escolhe as tarefas a realizar dentro da sala e como se vai realizar o trabalho dentro da sala de aula. Logo, como já referido, a influência deste na sala de aula depende do modo como ele apoia os alunos e da sua competência profissional. Os alunos influenciam as aulas, na medida em que, a aula depende das suas atitudes e conhecimentos matemáticos, com os seus gostos, e de modo geral, da forma como defrontam a escola. Por fim, temos as tarefas, estas têm de ser abordadas de diferente forma, de modo a distinguir tarefa de tarefa, pois, uma tarefa que apenas seja para realizar exercícios não pode ser abordada da mesma forma que uma resolução de problemas ou uma investigação (Ponte et al., 1997). Quanto à importância desta será abordada no ponto seguinte.

O ambiente que surge na sala de aula depende da interligação destes três fatores e é relevante para a aprendizagem, porque, é através da interação destes três elementos que se "desenvolvem as capacidades cognitivas e se promovem as atitudes e valores"(Ponte et al., 1997, p.2) que se desejam atingir com todos os alunos numa aula de matemática. Reforçando uma vez mais, a influência do professor neste triângulo didático, porque as atitudes dos alunos depende do que se pratica dentro da sala de aula, quer as tarefas como os modos de trabalho. Segundo Ponte et al. (1997) existem três modos de trabalhar dentro da sala de aula, de modo individual, a pares ou em grupos, onde cada um se adequa mais a determinadas tarefas do que a outras, cabe ao professor fazer essa organização da melhor forma para atingir os objetivos esperados. Também o programa de matemática (ME, 2007) defende as várias formas de trabalho dentro da sala de aula, focando o trabalho individual ao referir que este é necessário tanto dentro da sala de aula, como fora dela, referindo que "o aluno deve procurar ler, interpretar e resolver tarefas matemáticas sozinho, bem como ler, interpretar e redigir textos matemáticos" (p.10). O programa refere, ainda, que a vantagem de trabalhar a pares é a troca de ideias e o esclarecimento de dúvidas existente entre os alunos. Os modos de trabalho dependem do tipo de tarefas implementadas, assim, é necessário perceber que tarfas podem ser implementadas dentro da sala de aula.

1.4. As Tarefas de Matemática

Pelo que já foi abordado até agora, evidencia-se a importância das tarefas, pois, é através delas que os alunos adquirem conhecimentos e constroem a sua aprendizagem. Isto porque, elas permitem a construção de determinados conceitos, a apreensão da linguagem matemática, a perceção de alguns procedimentos e conexões entre várias áreas do saber e vida real (Vale, 2011). É necessário então, implementar tarefas diferenciadas, que não criem situações mecanizadas e de rotinas. É importante, nesta medida, analisar os manuais escolares de modo a visualizar que tipo de tarefas contêm, para que o professor complemente as tarefas dos manuais preparando um conjunto de tarefas que ajudem a desenvolver as capacidades e competências necessárias nos alunos.

Deve dar-se importância a investigações e tarefas que recorram a materiais manipuláveis, de forma que o aluno explore livremente e construa o seu conhecimento, privilegiando as tarefas devem ter mais que um caminho para chegar à mesma solução. Assim, o programa de matemática (ME, 2007) defende o mesmo ao afirmar que "o aluno deve ter diversos tipos de experiências matemáticas, nomeadamente resolvendo problemas, realizando actividades de investigação, desenvolvendo projectos, participando em jogos e ainda resolvendo exercícios que proporcionem uma prática compreensiva de procedimentos" (p.8).

As tarefas para que proporcionem a desejável aprendizagem dos alunos devem ter uma boa apresentação: contextualizando-a e interpretando-a; durante o desenvolvimento da mesma o professor deve dar apoio e feedback aos alunos, na discussão deve haver participação, argumentação e reflexão e permitindo duma discussão fazer uma síntese acerca dos conteúdos abordados e aprendidos pelos estudantes (Vale, 2011). Desta forma o professor deve ter em conta as orientações metodológicas ao selecionar as tarefas a implementar na sala de aula, porque estas devem desenvolver as capacidades transversais e devem privilegiar momentos de discussão e reflexão de estratégias e soluções obtidas pelos alunos.

No entanto, o professor deve ainda ter em atenção o tipo de tarefas que escolhe consoante o objetivo a desenvolver. Neste sentido Ponte (2005) distingue vários tipos de tarefas: os exercícios, os problemas, as investigações e as explorações. Os *exercícios* classificam as tarefas que são conhecidas como tarefas de rotina ou mecanizadas, porque envolvem um conhecimento já adquirido pelo aluno e o discente conhece instantaneamente o processo de resolução da tarefa, fazendo com que o aluno perca o interesse e fique desmotivado ao realizar exercícios constantemente. Ponte (2005) baseia-se em Pólya (1975, 1981) para classificar os *problemas*, defendendo que estes devem ser implementados na sala de aula porque são desafiantes e promovem o desenvolvimento de várias capacidades matemáticas. Pólya defende também, que este tipo de tarefas ajuda a perceber e a promover o gosto pela Matemática. Este tipo de tarefas será retomado e desenvolvido à frente neste capítulo. As *investigações* para este autor envolvem mais o aluno, defendendo que a importância destas é semelhante à da resolução de problemas, porém têm de ter a participação mais ativa do aluno desde o início até ao fim da tarefa, podendo encontrar vários caminhos e diferentes métodos, não tendo apenas o objetivo de encontrar a resposta, como nos problemas. Por fim, as *explorações* são tarefas muito parecidas às investigações, e simultaneamente, aos exercícios. Ponte (2005) refere que o enunciado de uma exploração pode ser o mesmo que de um exercício, a diferença reside no conhecimento que os alunos detêm. A diferença entre os exercícios e as investigações está no grau de desafio, que será explicado já em seguida.

Este autor agrupa estas tarefas em duas dimensões fundamentais, que demonstram a potencialidade que cada tarefa pode ter. Assim, temos o grau de desafio, que está relacionado com o *grau de dificuldade* da tarefa, podendo ter um grau elevado ou reduzido de dificuldade. A outra dimensão é o *grau de estrutura*, esta atribui à tarefa o grau de ser "aberta" ou "fechada". Se for uma tarefa aberta não específica o que é realmente exigido, contendo um grau de indeterminação, se for fechada específica de modo claro o que é dado e pedido. Desta forma, um exercício é uma tarefa fechada com desafio reduzido, um problema é uma tarefa fechada com grau elevado de desafio, uma investigação é uma tarefa aberta e com desafio elevado e as explorações são tarefas abertas e com dificuldade e desafio reduzido.

Importa então o professor ter em conta os benefícios que cada tarefa traz aos seus alunos, promovendo uma diversidade de tarefas na sala de aula para desenvolver determinados objetivos curriculares. Logo, Ponte (2005) afirma:

> As tarefas de natureza mais *fechada* (exercícios, problemas) são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados. As tarefas de natureza mais *acessível* (explorações, exercícios), pelo seu lado, possibilitam a todos os alunos um elevado grau de sucesso, contribuindo para o desenvolvimento da sua auto-confiança. As tarefas de natureza mais *desafiante* (investigações, problemas), pela sua parte, são indispensáveis para que os alunos tenham uma efectiva experiência matemática. As tarefas de cunho mais *aberto* são essenciais para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas, etc. (p.17)

No entanto, o professor ainda detém outra "obrigação" na seleção das tarefas a desenvolver na sala de aula. Para além do tipo e critérios que cada uma das tarefas contém, sendo umas mais apropriadas a determinadas situações que outras, o professor é relevante na apresentação das tarefas. Pois, o modo de as apresentar à turma e a maneira como se exploram pode aumentar ou diminuir o nível cognitivo das tarefas (Ponte, 2005; Serrazina, 2012).

Explicando a relevância do papel do professor na exploração das tarefas aparecem as autoras Stein e Smith (1998) defendendo o "Quadro das Tarefas Matemáticas". Este quadro apresenta três fases pelas quais passa cada tarefa que é implementada. A *primeira* fase diz respeito à forma como elas surgem ou no currículo, manual ou enunciado fornecido pelo professor. A *segunda* fase corresponde ao modo como o professor apresenta a tarefa e por fim, a *terceira* fase, como a tarefa é implementada realmente pelo aluno. A passagem da tarefa por estas três fases resulta na aprendizagem do aluno, é ainda na terceira fase que é percetível de ver os conhecimentos adquiridos pelos alunos.

Assim, o professor deve circular pela sala de aula verificando o trabalho dos seus alunos, motivando-os e ajudando-os para que mantenham o nível cognitivo esperado na tarefa que propôs. O professor deve estar consciente que pode prejudicar o nível cognitivo da tarefa, para que isso não se suceda, deve explicar apenas o seu objetivo, não dando indicações de como se faz; deve dar tempo adequado à realização das mesmas, nem demasiado nem pouco; deve saber responder às diferentes solicitações dos discentes apoiando-os nas suas dúvidas dando um bom feedback; as tarefas devem ter em conta os conhecimentos já adquiridos pelos estudantes; deve promover discussão e reflexão no fim de cada tarefa de modo e efetuar conexões (Vale, 2011).

Concluindo, as tarefas devem ser diversificadas atendendo aos tipos de tarefas e às duas dimensões que Ponte (2005) defende; devem ter um objetivo, estando de acordo com as orientações curriculares e efetuando conexões entre ideias matemática ou com a vida real; o professor deve ter em atenção o modo como apresenta as tarefas, de acordo com Stein e Smith (1998), para que o nível cognitivo da tarefa seja mantido; e por fim, as tarefas apresentadas numa aula devem ter um encadeamento entre elas para permitir a aprendizagem dos alunos (Vale, 2011). Pelo que foi revisto deve-se dar predominância às tarefas mais abertas, porque são aquelas que proporcionam momentos mais ricos de discussão, onde os alunos expõem as suas ideias matemáticas, "apresentam as suas justificações e questionam-se uns aos outros" (Ponte, 2005, p.16). Estas ideias vão de encontra a um ensino exploratório de matemática. As tarefas a implementar numa aula de matemática permitem o desenvolvimento das capacidades transversais expressas no programa de matemática, torna-se deste modo relevante a elucidação das competências transversais e a sua importância.

2. As Capacidades Transversais na Aula de Matemática

As capacidades transversais, devido à sua importância para a aprendizagem da matemática, fazem parte do novo programa de matemática como um objetivo a desenvolver em todos os alunos. Estas são transversais porque atravessam conteúdos matemáticos e não matemáticos, fazendo conexões entre vários conceitos e ainda, entre eles. As três capacidades: resolução de problemas, a comunicação e o raciocínio todas são importantes para desenvolver na sala de aula, pois qualquer tarefa matematicamente rica envolve as três. Apesar da interligação entre estas três capacidades e ser difícil falar de uma sem falar nas outras, para efeitos deste trabalho apenas se irá aprofundar a resolução de problemas e a comunicação, pois o raciocínio está presente nestas duas. Resolver um problema recorre necessariamente ao raciocínio e à comunicação, quer oralmente, quer por escrito.

2.1. A Resolução de Problemas

A resolução de problemas é um tema defendido por vários autores como essencial no ensino-aprendizagem da matemática desde há uns anos até aos dias de hoje. Este tema começou a ganhar importância, essencialmente, a partir dos anos oitenta. Desenvolveram-se várias opiniões e teorias acerca da resolução de problemas na matemática, sendo um dos grandes autores que influenciou esta tendência George Polya com a sua obra "How to solve it".

Começando por rever o que é um problema, não é tarefa fácil, pois, a definição de problema é complexa, uma vez que esta varia não só de autor para autor, mas também de indivíduo para indivíduo, porque, o que para algumas pessoas pode ser um problema, para outras não o é, por outro lado vai depender da situação e do conhecimento em que cada pessoa se encontra. Um problema pode ser uma situação do dia-a-dia à qual não se encontre resposta e se tenha de "pensar" para encontrar a solução. Abrantes (1988) afirma que na vida real ao sermos confrontados com um problema nunca sabemos a resposta antecipadamente, logo, esta situação adapta-se aos problemas da matemática, Vale e Pimentel (2004) reforçam esta ideia dizendo que esta é a definição de senso comum, como defendem que ao resolver estas situações problemáticas o sujeito adquire conhecimento ficando apto a resolver outras situações idênticas. Definir problema matematicamente já é algo mais complexo, tal como já se afirmou, assim, segundo Polya (1980) "resolver um problema é encontrar uma saída da dificuldade, é encontrar um caminho à volta de um obstáculo, para obter um fim desejável, que não está disponível de imediato através de meios apropriados"(Polya citado em Vale & Pimentel, 2004, p.12). Muito semelhante a esta está a definição que Mayer (1985) atribuí, afirmando que "um problema ocorre quando se é confrontado com uma situação inicial e se pretende chegar a outra situação final, sem se conhecer um caminho óbvio para a atingir" (citado em Vale & Pimentel, 2004, p.13). Assim, um problema é algo com que nos deparamos e não sabemos como resolver, tendo que encontrar o, ou os "caminhos" necessários para conseguir resolver essa situação, desta forma, tem de se elaborar e escolher determinadas ações para chegar à solução, isto designa-se assim por resolução de problemas (Vale & Pimentel, 2004).

A resolução de problemas é uma das capacidades que está presente no novo Programa de Matemática (ME, 2007), pois, segundo este, "a resolução de problemas não só é um importante objectivo de aprendizagem em si mesmo, como constitui uma actividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos" (p.8). De acordo com Vale e Pimentel (2004) tanto a APM (1988) como o NCTM (1989) afirmam que a resolução de problemas deve estar no centro da aprendizagem matemática. A aplicação destas tarefas na sala de aula tem benefícios extraordinários ao nível da apreensão de conceitos matemáticos, contribuindo desta forma para um ensino-aprendizagem mais eficiente e também gratificante.

Assim, para vários autores (e.g. APM, 1988; Fonseca et al., 1999; Abrantes, 1988; Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008) a resolução de problemas são tarefas não rotineiras, porque necessitam de um conjunto de estratégias e métodos para encontrar a solução, estas devem permitir ao aluno compreender a Matemática fora da sala de aula e no seu dia-a-dia, devem motivar e despertar a curiosidade no aluno, de modo a que este tenha um papel ativo na sua aprendizagem, permitindo a aplicação de conhecimentos e exploração e descoberta de novos conceitos. Com estas tarefas os alunos podem formular, testar e provar conjeturas, investigar, argumentar, explorar ideias e discutir o seu próprio pensamento e dos seus colegas. É desta forma que se constrói o conhecimento e se adquire a aprendizagem, permitindo desenvolver o espírito crítico nos alunos. Reforçando estas ideias, Boavida et al. (2008) afirmam que a resolução de problemas "proporciona o recurso a diferentes representações e incentiva a comunicação; fomenta o raciocínio e a justificação; permite estabelecer conexões entre vários temas matemáticos e entre a Matemática e outras áreas curriculares; apresenta a Matemática como uma disciplina útil na vida quotidiana"(p.14).

Desta forma cabe ao aluno explorar qual o(os) melhor(es) caminho(s) para obter a resolução ao problema proposto pelo professor, mas, para aprender a resolver problemas é essencial ser persistente no modo de pensar e conseguir comunicar o seu pensamento (Boavida et al., 2008), e simultaneamente, tal como Polya (1973) afirma, o aluno tem de imitar o que as outras pessoas fazem ao resolverem os problemas, logo, o professor deve propor várias tarefas de resolução de problemas para que os alunos aperfeiçoem a sua técnica de resoluçao de problemas; pois "aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os" (p.6). No entanto, o professor deve ter em atenção e o cuidado ao escolher os problemas a implementar na sala de aula, porque o aluno deve desejar resolver o problema e neste sentido os problemas devem ser motivantes e estimulantes (Boavida et al., 2008). É sobretudo de acordo com Polya (1973) o aluno deve compreender o problema, pois, "acontecerá o pior se o estudante se lançar a fazer cálculos e a traçar figuras sem ter compreendido o problema. É geralmente inútil executar detalhes sem perceber a conexão principal" (p.7).

Há que ter em conta na seleção dos problemas que uns facilitam a aquisição de todas as ideias expostas até agora, e ainda, o interesse e motivação dos alunos, enquanto, que outros não. Existe deste modo várias tipologias de problemas, uma das mais conhecidas é defendida pelos autores Charles e Lester (1986), para eles, existem: os problemas de *um passo* e de *dois ou mais passos*, onde se baseiam nas operações aritméticas; os problemas *tipo puzzle* que necessitam quase que de "flash" para serem resolvidos; os problemas de *aplicação* sendo problemas que recorrem a dados da vida real, do dia-a-dia, onde as decisões tomadas por quem o resolve têm um papel de relevo, podendo utilizar uma operação ou estratégia de resolução; e os problemas de processo não se resolvem com a aplicação de um algoritmo, são os mais desafiantes, pois, recorrem a uma ou mais estratégias de resolução de problemas, não sendo problemas de rotina e mecanizados (Ferreira, 2004; Vale & Pimentel, 2004; Vale, Sousa, & Pimentel, 2009).

Logo, para se poder resolver problemas de uma forma eficaz e explora-los corretamente, Pólya defende um modelo que enquadra quatro fases: a *compreensão do problema*; *estabelecer um plano* depois de ver as interligações entre os dados; *executar o plano*; e, *refletir sobre a resolução*, discutindo e revendo os resultados obtidos (Polya, 1973). No entanto, Fernandes, Vale, Silva, Fonseca e Pimentel (1998, referidos em Vale & Pimentel, 2004) adaptaram este modelo e simplificaram-nos em três fases: *ler e compreender o problema*; *fazer e executar um plano*, onde se escolhem quais as estratégias a utilizar, como utilizá-las e pondo-as em ação; e, *verificar a resposta*, analisando as soluções e comparando com os dados do problema.

Mas, para se resolver um problema, na fase da escolha do plano, e essencialmente nos problemas de processo, é necessário que o aluno tenha adquirido um conjunto de estratégias que ajudem a "atacar" o problema. Estas devem ser proporcionadas pelo professor, emergindo de diferentes problemas propostos aos alunos, logo desde o início que se implementam estas tarefas na sala de aula, para, ao longo do tempo, o aluno escolher e adaptar a estratégias de resolução que mais lhe convém e que caracteriza melhor o pensamento de cada aluno. Assim, as estratégias mais utilizadas são: lista organizada; usar uma tabela; fazer um desenho ou um diagrama; trabalhar do fim para o princípio; eliminar casos; fazer tentativas; procurar um padrão, regra ou lei de formação; decompor num problema mais simples; dramatização, entre outras (Abrantes, 1988; Vale & Pimentel, 2004; Boavida et al., 2008). A estratégia mais conveniente destas todas é a descoberta de um padrão, existindo os problemas de padrões, e, é neste tipo de problemas que o aluno consegue uma aprendizagem mais eficaz, onde o modelo das cinco práticas, já abordado, encaixa na perfeição, dando relevância à reflexão, mas, mais adiante será abordado e analisado este tipo de problema.

Contudo, como Boavida et al. (2008) afirmam e chamam a atenção para este pormenor, é necessário distinguir os modelos, quer de Polya, quer o de Fernandes et al. (1998) das estratégias de resolução de problemas. Isto porque, o modelo indica como nos podemos mover na resolução do problema, ao contrário das estratégias que são o meio de resolução do problema, que algumas vezes, durante o processo de resolução de problemas, podem ser bastante vantajosas.

Sintetizando, a resolução de problemas pode ser utilizada como: um processo, ou seja, quando o objetivo do professor é ensinar e aperfeiçoar as estratégias de resolução de problemas; uma finalidade, quando o objetivo é explorar, pesquisar, discutir aspetos matemáticos; e, um método de ensino, quando o objetivo é a aquisição de novos conceitos matemáticos, envolvendo na mesma a investigação e exploração (Vale & Pimentel, 2004). Portanto, "comunicar, analisar, explorar, conjecturar e provar, ou seja, actividades *com sentido matemático*, é aquilo que a Matemática realmente é. Na verdade, (…) deveria ser a principal actividade da escola" (Schoenfeld, 1996, p.11).

É importante referir que, como já relatado anteriormente, é refletindo e discutindo os resultados obtidos que o aluno aprende, estando estas diretamente ligadas com a comunicação matemática, outra capacidade transversal interligada com a resolução de problemas, e que se analisa de seguida.

2.2. A Comunicação

A comunicação, apesar de alguns professores não lhe darem muito relevo, é uma capacidade que o aluno deve desenvolver durante as aulas de matemática, tendo tanta relevância como a resolução de problemas. É através da comunicação que o professor consegue analisar o que o aluno sabe e quais as suas dificuldades. É através dela, que os alunos interagem uns com os outros expressando as suas ideias matemáticas oral ou por escrito e partilhando-as com a turma, gerando, ou não, discussão das mesmas.

Antes de mais, torna-se relevante analisar o que é comunicar. Pois, a comunicação é algo que se usa no dia-a-dia para expressar pensamentos, ideias, sentimentos, entre outras coisas, é algo que é necessário para a socialização humana. Esta pode existir através de várias formas, porque, pode-se comunicar pessoalmente com as pessoas, e ainda, via correio eletrónico ou telemóvel. No entanto, todos eles envolvem o termo comunicar. Analisando este conceito no ensino-aprendizagem não difere muito do contexto real, pois a comunicação é a "essência do próprio processo educativo" (Martinho 2009, p.64). Para comunicar matematicamente significa haver um processo interativo com um intercâmbio de ideias, onde a comunicação, para se desenvolver, necessita de tarefas matematicamente desafiantes e é necessário também que o professor estimule essa comunicação (Guerreiro, 2012; Menezes, 2005, citado em Boavida & Menezes, 2012).

Apesar de não parecer, a comunicação é essencial na sala de aula, esta depende essencialmente de dois agentes, os alunos e os professores (Menezes, 2000a), e tal como o Programa de Matemática afirma, através dela, o aluno é capaz de expressar as suas ideias e de compreender as ideias dos seus colegas, conseguindo participar nas discussões de sala de aula acerca de processos matemáticos, e ainda, esta desenvolve o raciocínio e a resolução de problemas (ME, 2007).

A comunicação possuí por duas grandes vertentes: a comunicação oral que é um alicerce ao pensamento do aluno sendo importante a nível escolar na aquisição de conhecimentos e a comunicação escrita, que abrange todo o tipo de registos simbólicos, pictóricos e geométricos, também tendo essencial para o processo de ensino-aprendizagem (Ponte, Quaresma e Costa, 2010).

Centrando-nos na vertente oral desta capacidade, é através dela que o aluno, nas discussões de sala de aula, exprime o seu raciocínio, as suas conceções e estratégias, confrontando-as com as dos seus colegas, influenciando-se reciprocamente e permitindo a aquisição de novos conteúdos (Martinho & Ponte, 2005b; Passos, 2008; Ponte, et al., 2007). Deste modo, o professor detém o papel importante ao orquestrar o discurso na sala de aula, devendo questionar os alunos para poder detetar dificuldades e colocá-los a refletir, permitindo uma interação entre alunos que clarifique e aprofunde determinados conteúdos e estimule novas descobertas, resultando isto, numa aprendizagem benéfica e mais sólida de novos conceitos matemáticos através das conexões entre os novos conhecimentos com os que já se possuem (Boavida et al., 2008; Buschman, 1995 citado em Martinho & Ponte, 2005a; Martinho, 2009; Martinho & Ponte, 2005b; Medeiros & Ponte, 2010). Esta interação é importante porque "se os alunos forem incentivados a apresentar e ouvir diferentes pontos de vista, o diálogo constitui um apoio do pensamento no sentido de dar significado às aprendizagens" (Domingues & Martinho, 2012, p.323). Os os alunos desenvolvem processos de argumentação e de raciocínio através destas discussões na sala de aula, conseguindo, portanto, expressar e interpretar processos matemáticos (Pinto & Santos, 2010). Contudo, deve-se ter cuidado nesta interação entre alunos, pois vários autores afirmam que os alunos sentem-se mais à vontade para expressarem o seu pensamento em pequenos grupos, do que para toda a turma, porque, ou se sentem mais constrangidos perante toda a turma, ou não estão tão à vontade perante o professor por terem medo de errar (Martinho & Ponte, 2005a, 2005b; Menezes, 2000b).

Concentramo-nos agora na comunicação escrita, tal como a oral também esta é relevante e permite a aquisição e desenvolvimento do ensino-aprendizagem. De acordo com o Programa de Matemática (ME, 2007) através da escrita os alunos conseguem clarificar o seu raciocínio e estratégias utilizadas, desenvolvendo a linguagem matemática. Para Boavida et al. (2008) "as nossas ideias tornam-se mais claras para nós próprios quando as articulamos oralmente ou por escrito" (p.62), no entanto, estas autoras ainda afirmam que se comunicar oralmente o nosso pensamento já é complicado ao nível de organização e clarificação de ideias, fazê-lo por escrito torna-se um processo ainda mais complexo, mas, torna-se um processo relevante porque obriga a refletir acerca das ideias desenvolvidas. A par com a comunicação escrita surgem interligadas a escolha das tarefas a realizar pelos alunos, pois são estas que podem ou não permitir o desenvolvimento da comunicação através da explicitação das estratégias utilizadas, de processos de argumentação e dos raciocínios envolvidos. Deste modo torna-se essencial o recurso às representações matemáticas, porque é através delas que os alunos comunicam as suas ideias matemáticas através da escrita. Logo, falar de comunicação escrita ou de representações podem ter entendimentos como termos equivalentes e sinónimos, pois, uma representação é uma forma escrita do aluno expressar o seu raciocínio.

Quando se fala em representações significa que existe um leque de representações e não apenas uma representação, assim é necessário distinguir as possíveis representações que se podem obter por parte dos alunos. De acordo com Bruner (1962, citado em Boavista et al., 2008) podemos encontrar três grandes tipos de representação: as representações ativas, as representações icónicas e as representações simbólicas. Assim, as representações ativas estão relacionadas com a ação, sendo através desta ação que ocorre o conhecimento; as representações icónicas consitem na utilização de imagens, esquemas, diagramas ou desenhos, porque estes (desenhos) emergem "como um poderoso meio para descobrir e expressar significado; para a criança, o desenho traz ideias para a superfície" (Woleck, 2001, p.215); e as representações simbólicas recorrem à linguagem simbólica, ou seja, utilizam símbolos para expressarem uma ideia matemática, estando associadas à escrita da comunicação matemática (Boavida et al., 2008). Estas três formas de representação demostram a relevância que têm ao interligar a "componente física, com a formação de imagens e, por sua vez, esta fase com a simbólica" (Barbosa, 2009, p.30). No entanto, existem outras formas de categorizar as representações.

Goldin (2008) e Barbosa (2009) defendem a existência de representações internas (são as formas cognitivas do indivíduo) e externas (formas de comunicar as ideias/pensamentos). As formas mais comuns de transmitir as representações externas são as palavras, figuras, tabelas, entre outras que vão surgindo quando se querem transmitir as representações internas (Barbosa, 2009).

Para as representações internas, e de acordo com a resolução de problemas, Goldin (2008) defende a existência de cinco sistemas que as caracterizam: (1) sistemas verbais, diz respeito à gramática e sintaxe; (2) sistemas imagéticos, são as representações visuais, auditivas, táteis, entre outras; (3) sistemas formais de notação, corresponde à linguagem simbólica da matemática; (4) sistema de planeamento, inclui o pensamento estratégico e o plano que se deve resolver; (5) sistema afetivo, representado pelas atitudes, estados sentimentais que ocorrem durante a resolução de problemas. Estes cinco sistemas permitem várias interpretações por outras pessoas, ou seja, o sistema externo: (1) linguagem falada e escrita; (2) desenhos, representações pictóricas; (3) fórmulas e equações matemáticas; (4) metas, intenções, decisões; (5) linguagem corporal, lágrimas, sorrisos, contato físico e visual, e tudo que transmita emoções. Este autor dá importância às emoções porque estas são necessárias para se compreender a ligação e motivação dos alunos perante a matemática.

Já os autores Lesh, Post e Behr (1987, referidos em Clement, 2004) e Barbosa (2009) desenvolveram o modelo das representações, onde defendem a existência de cinco maneiras diferentes de representar uma ideia matemática estando todas elas interligadas. Assim temos: (1) as *pictóricas (semi-concretas)* onde as crianças recorrem ao desenho para expressarem o seu pensamento matemático; (2) as *manipulações* (concretas), os alunos recorrem ao uso e manipulação de materiais que sustentam e ajudam a resolver problemas e a compreenderem ideias matemáticas, ao compararem os objetos com as representações matemáticas; (3) a *linguagem (verbal)*, esta pode desdobrar-se em dois tipos, ou seja, a maneira como os alunos descrevem as suas respostas e o caminho que utilizam para indicarem o seu raciocínio; (4) os *símbolos escritos (notação)*, são as palavras e símbolos matemáticos que por vezes são mais abstratos para os alunos, do que são as outras representações; (5) *situações relevantes (contextuais)*, estas situações podem estar diretamente ligadas a situações reais, estas podem ser qualquer tipo de situações, desde que envolvam o contexto matemático e a participação das crianças. O professor deve ajudar os alunos a interligar estas representações e a fazer conexões através delas, principalmente os símbolos, pois, são mais difíceis de compreender para determinados alunos (Clement, 2004).

Tripathi (2008) afirma que uma representação pode incluir algo concreto, simbólico, pictórico, numérico, verbal, gráfica, contextual, todo o tipo de representações que possa interpretar, comunicar e argumentar as ideias matemáticas. Este autor defende que o modelo de representações desenvolvido por Lesh, Post e Behr deve ser adaptado ao nível cognitivo de cada criança, pois utiliza diferentes habilidades cognitivas. Este propõe uma reclassificação ao modelo das representações de Lesh, Post e Behr, onde as representações concretas e semi-concretas se devem juntar dando origem às representações visuais. Tripathi atribui grande importância a esta última, porque são a ponte entre materiais manipuláveis que os alunos utilizam inicialmente para perceberem conceitos matemáticos e entre as formas verbais que os discentes utilizam posteriormente para se referirem a esse mesmo conceito já adquirido. Isto porque, a visualização é relevante para o raciocínio, resolução de problemas e para conjeturar (Arcavi, 2003, referido em Tripathi, 2008), e deve-se fazer conexões entre estas e a linguagem escrita, explicando por palavras ideias associadas às imagens. A visualização não deve ser encarada apenas como a simples criação e interpretação de meras imagens ou desenhos, pois, esta possibilita a clarificação de ideias matemáticas e a interiorização de conceitos matemáticos através da assimilação de informação sob a forma de figuras (Barbosa, 2009).

Comunica-se através de gestos, atitudes, palavras, silêncios entre "outras formas de expressão" (Medeiros, 2006), assim, "comunicar para aprender" (Boavida et al., 2008), sintetiza na perfeição o conceito de comunicar, porque a comunicação é simultaneamente um meio para se ensinar e aprender, e um objetivo do mesmo ensino (Menezes, 2000a), permitindo desenvolver a "capacidade de pensar" dos alunos (Menezes, 2000b). Deste modo, o professor deve pedir aos alunos para explicitarem a forma como pensaram, questionando-os e ouvindo-os, permitindo que a aula de matemática tenha momentos onde os alunos possam "raciocinar e comunicar as suas ideias" (Lappan e Schram, 1989, citados em Menezes, 2000b, p.17), orientando os seus raciocínios, porque podem recorrer inicialmente a representações não convencionais e o professor deve proporcionar a progressão para as representações convencionais (ME, 2007).

Logo, os problemas de padrões são tarefas ricas para desenvolver a capacidade de visualizar e desenvolver a argumentação, explicação, justificação, produção de conjeturas, e desse modo, desenvolvem a comunicação. Verifica-se deste modo a interligação das três capacidades transversais a que o Programa de Matemática (2007) alude, porque "raciocinar matematicamente é indissociável da resolução de problemas e da comunicação" (Boavida & Menezes, 2012, p.289). Estes problemas de padrões vão ser aprofundados de seguida.

3. Os Padrões no Ensino-Aprendizagem da Matemática

Os problemas de padrões são tarefas fundamentais numa sala de aula, porque, tal como já foi referido, estes desenvolvem as capacidades transversais defendidas pelo Programa de Matemática (ME, 2007), pertencem ao grupo das tarefas abertas, promovendo discussões na sala de aula entre os alunos, para assim desenvolver a argumentação e reflexão dos conteúdos abordados. Contudo, antes de nos debruçarmos sobre este tipo de atividades é necessário compreender e definir padrão. Pois, afinal o que é um padrão? Este é um conceito complexo e difícil de definir tal como o conceito de Matemática, porque, ambos os termos se interligam, pois há autores que definem a matemática como a ciência dos padrões. Deste modo, definir matemática e padrão é complexo e vasto, dependendo da perspetiva e interpretação de cada autor. Ponte (2009) confirma este facto, defendendo que a "noção de padrão não é uma noção matemática propriamente dita, inserida num campo da Matemática bem definido, mas sim uma noção de "meta-matemática", transversal aos mais diversos campos" (p.169), como na Matemática, apresentando padrões em diversas áreas, como a geometria, álgebra, etc. Porém, Devlin (2002) defende a existência de vários padrões: numéricos, de formas, de movimento, de comportamento, entre outros, este autor afirma, portanto, que o que os matemáticos estudam são estes padrões abstratos que podem ser reais, imaginários, "visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais que recreativo" (p.9). O autor apresenta como exemplo de padrões numéricos a sequência dos números naturais, e ainda, que podemos encontrar na geometria padrões visuais, de forma e simetrias. Os padrões existem para além da matemática, ao interpretarmos a sucessão dos dias e das noites, das fases da lua, o revestimento de alguns animais, entre outras coisas referimo-nos também aos padrões. Neste sentido as autoras Vale e Pimentel (2005) referem, ainda, as estações do ano como um padrão previsível, mas, são estes padrões que têm ajudado a compreender o mundo à nossa volta e ajudado no desenvolvimento da ciência, por exemplo, na descoberta do DNA.

Contudo, existem outros termos matemáticos interligados ao conceito de padrão, tais como repetição, regularidade e simetria, isto porque, quando se procura ordem ou estrutura em matemática associamos estes termos a uma unidade base que se repete constantemente, de acordo com uma lei de transformação comum a todos os objetos que se replicam. E é através destas regularidades que se consegue estimar o que vem a seguir, prevendo a possibilidade de continuar a construção desse mesmo padrão (Barbosa, 2009; Ponte, 2009; Vale, 2009).

Pode-se concluir que através do conceito padrão é possível realizar conexões entre diversas áreas e temas matemáticos. Desta forma pode verificar-se no Programa de Matemática (ME, 2007) ao longo dos ciclos a alusão aos padrões, estes iniciam-se no 1ºciclo de forma implícita, estando apenas mais explícitos a partir do 2ºciclo através do tema álgebra, como se pode verificar:

> As ideias algébricas aparecem logo no 1.º ciclo no trabalho com sequências, ao estabelecerem-se relações entre números e entre números e operações, e ainda no estudo de propriedades geométricas como a simetria. No 2.º ciclo, a Álgebra já aparece como um tema matemático individualizado, aprofundando-se o estudo de relações e regularidades e da proporcionalidade directa como igualdade entre duas razões. (p.7)

Torna-se necessário, portanto, desenvolver o pensamento algébrico nos alunos ao longo de toda a escolaridade, pois, através deste desenvolvimento os alunos adquirem as capacidades de generalizar ideias matemáticas e de as comunicar, podendo desta forma, segundo Barbosa (2009) observarem, proporem hipóteses, experimentarem e criarem. Assim os padrões são um tema transversal em toda a matemática, pois conseguem preparar os estudantes para a aprendizagem de novos conteúdos, tais como o conceito de função e adquirir as bases para mais tarde utilizarem uma linguagem simbólica e construírem expressões algébricas com significado. Deste modo através dos padrões os alunos adquirem conceitos básicos em diferentes temas matemáticos, essencialmente no domínio da álgebra (Mestre & Oliveira, 2012; Vale & Pimentel, 2005; Vale, 2009). Tal como já foi referido anteriormente os alunos através da exploração de padrões conseguem desenvolver determinadas capacidades (resolução de problemas e comunicação), e ainda, conseguem: organizar e sintetizar informação; promover a exploração; a experimentação; a formulação; as conjeturas; a generalização de resultados e de regras; a reflexão e as discussões. Assim, os símbolos e a generalização (próxima ou distante) são importantes na área da matemática devendo o professor propor tarefas desafiantes tendo em conta as potencialidades dos padrões, ou seja, deve ser transmitido aos alunos a noção de que os problemas de padrão podem ter vários caminhos para chegar a uma solução com o objetivo de incentivar os discentes a explorá-los. (Barbosa, Palhares & Vale, 2008; Borralho & Barbosa, 2009; Vale, 2009).

3.1. A Importância dos Padrões

Através da exploração de padrões desenvolve-se a capacidade de “ver” ou visualizar recorrendo às estratégias de contagens em sequências e problemas, podendo desse modo formular expressões numéricas que traduzam o seu modo de ver, não recorrendo apenas à linguagem natural, e simultaneamente, verbalizá-las e defende-las perante os colegas. Mais tarde, os professores devem levar os alunos a conseguir fazer uma generalização distante para progressivamente conseguirem generalizar o padrão através de expressões algébricas (Vale, 2009; Vale & Pimentel, 2009). Contudo estas duas expressões, numérica e algébrica, nos níveis mais iniciais são possíveis de se obter mais facilmente através de uma generalização baseada nas propriedades de uma imagem, e não apenas através das propriedades decorrentes apenas de uma sequência numérica. A situação mais comum será recorrer às propriedades em simultâneo das sequências quer figurativas quer numéricas. Tudo isto permite que o aluno ao mesmo tempo desenvolva o seu pensamento algébrico, seja curioso e criativo e adquira o gosto pela disciplina de matemática (Vale, 2012).

Visualizar adquire um carácter importante, neste contexto, na medida em que se torna mais percetível de entender e memorizar/relembrar uma imagem mais facilmente do que relembrar um texto ou uma expressão. A análise dessas imagens são influenciadas pelos conhecimentos que os alunos possuem e ainda com os seus interesses pessoais, desta forma existem crianças que conseguem "ver" apropriadamente, tendo esta competência desenvolvida, contudo, outras já não contêm esta capacidade tão desenvolvida necessitando do auxílio e orientação do professor (Vale, 2009).

Como já foi abordado anteriormente os padrões e a visualização permitem o desenvolvimento da generalização. A importância desta atividade matemática pode ser reforçada pelas ideias de Barbosa (2009)

> A generalização é um objectivo fundamental no ensino e na aprendizagem da matemática, tanto como um processo como um produto. No entanto, constitui ainda um veículo para a construção de novo conhecimento, agindo como um catalisador para potenciar a aprendizagem, principalmente, no campo da álgebra. (p.59)

Deste modo é essencial perceber o que significa este conceito. Assim, generalizar é investigar/descobrir uma lei e conjeturar algo que possa ser aplicável a mais que um objeto, logo, vários objetos têm de ter alguma característica em comum para que a regra seja possível de aplicar a todos e assim chegar a uma generalização.

Stacey (1989) considera dois tipos de generalização, a generalização próxima, a qual podemos associar ao pensamento recursivo, e a generalização distante, a qual podemos associar ao pensamento funcional. Quanto à generalização próxima caracteriza-se por descobrir uma regra para os termos próximos daqueles que são dados e/ou se podem obter á custa da descoberta de um padrão entre um termo e o seu antecessor, isto é pensar recursivamente. Quanto à generalização distante, como termo indica, refere-se a descobrir uma lei que permita construir qualquer termo da sequência distante dos dados. Aqui pensar recursivamente já não o permite, ou não é prático, e tem de se procurar uma regra funcional que relacione qualquer termo da sequência com a sua posição na sequência. É nesta situação que o contexto figurativo pode ajudar (Vale, 2009).

Fazer uma generalização distante não é fácil para os alunos, devido muitas das vezes à sua incapacidade de pensar visualmente e que é referida por alguns autores (e.g. Barbosa, Palhares & Vale, 2008; Barbosa, 2009; Stacey & MacGregor 1995 citados em Barbosa, 2009; Vale, 2009). É um trabalho para o qual o professor deve apoiar.

Podemos considerar dois grandes tipos de padrões, os padrões em sequências de repetição, nestas existem um conjunto de objetos que se repetem ciclicamente; e os padrões em sequência de crescimento onde cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior (Pimentel, Vale, Alvarenga, & Fão, 2011). Em qualquer um dos casos o seu estudo permite reconhecer um padrão, generalizar leis e explicá-las recorrendo à comunicação, quer oral, quer escrita, utilizando linguagem simbólica mais ou menos formal de acordo com o nível dos alunos.

Para que o pensamento algébrico seja adquirido pelos alunos da melhor forma convém seguir uma certa estrutura de aprendizagem, iniciando-o com tarefas mais simples e ao longo do tempo ir progressivamente aumentando o grau de complexidade (Vale & Pimentel, 2005) recorrendo à proposta didática desenvolvida por Vale *et al.* (2009) que será explicada no ponto seguinte.

4. A Experiência Didática

A experiência didática que foi adotada neste estudo teve como base a proposta didática de Vale *et al.* (2009) para o ensino e aprendizagem dos padrões como uma capacidade transversal a ser desenvolvida em todos os alunos de qualquer nível e que pela sua natureza está intimamente ligada, não só com aos conteúdos matemáticos, mas com a resolução de problemas e o pensamento algébrico. Estes autores propõem várias tarefas de padrões que possibilitam diferentes abordagens, onde privilegiam o contexto figurativo. Deste modo, no seu desenvolvimento, o professor deve selecionar tarefas motivadoras, de acordo com a idade e caraterísticas dos seus alunos e com os objetivos de desenvolver. A visualização, o raciocínio, a comunicação, a generalização e conexões matemáticas são capacidades também possíveis de desenvolver através da resolução de problemas de padrão. Portanto, esta proposta divide-se em várias fases. A primeira fase da tarefa diz respeito às (1) *contagens visuais básicas*, pretende-se desenvolver a capacidade de "ver", assim, os alunos devem começar a desenvolver as tarefas de contagens para adquirem o *subitizing* de modo a posteriormente conseguirem escolher qual a melhor maneira de "ver". Estas tarefas que permitem desenvolver o ver instantaneamente (identificação, decomposição, disposição, etc.) são a base para a descoberta de padrões em contextos figurativos, e os alunos devem ver, descrever e registar, entendendo-se por registar a tradução da visualização em expressões matemáticas (Vale, Pimentel, Alvarenga & Fão, 2011). Logo, "ver um padrão é necessariamente um primeiro passo na exploração de padrões" (Lee & Freiman, 2006, citado em Vale, 2012, p.8).

A segunda fase são as (2) *contagens visuais em contextos diversificados,* nestas os alunos reconhecem padrões de modo a conseguirem contar rapidamente e as tarefas de contagens abordam diversos contextos para aplicação do conhecimento adquirido na primeira fase. A terceira fase são as (3) *sequências*, nesta fase as tarefas propostas incluem explicitamente sequências de padrões de repetição e sequências de padrões de crescimento, que já foram referidos anteriormente. Por último, temos a quarta fase (4) *os problemas,* nesta categoria já não se incluem tarefas em que a sequência é dada explicitamente, mas terão que ser os alunos a descobrirem se é necessária e a construí-la, recorrendo à utilização de estratégias que permitam encontrar um caminho de chegar à solução, fazendo sempre que necessário conexões entre temas matemáticos. Como já aportado anteriormente, os alunos utilizam neste tipo de tarefas o pensamento recursivo que é mais pobre que o pensamento funcional por não permitir descrever o que se passa com um termo de qualquer ordem contrariamente ao pensamento funcional que "permite relacionar qualquer termo com a respectiva ordem e que fornece de imediato uma descrição sobre o modo de conhecer qualquer termo da sequência" (Vale, 2012, p.19).

Em qualquer tipo de tarefas desta proposta didática os alunos devem utilizar a comunicação para explicar não só a sua forma de pensar e de ver, como justificar as suas representações e estratégias, como ainda, conjeturar de modo intuitivo e atribuir significado às expressões que eles utilizam, não sendo estas apenas meros símbolos matemáticos sem significado (Vale, 2012).

No entanto, para além de desenvolver todas estas capacidades referidas até agora, estas tarefas, através da análise de várias estratégias permitem também promover a criatividade e imaginação nos alunos (Vale, 2012).

5. Estudos Empíricos

Para se poder comprovar a importância destas componentes abordadas até agora é necessário confrontá-los com estudos empíricos e verificar desse modo os resultados obtidos em algumas investigações que envolvem estas temáticas.

Um dos primeiros estudos realizados sobre padrões em Portugal foi o de Alvarenga (2006) realizado com alunos do 2º ciclo incidindo nas explorações de padrão como parte da experiência matemática dos alunos. Este tinha como objetivos efetuar uma caracterização dos trabalhos dos alunos na resolução de problemas de padrão; identificar os processos utilizados pelos alunos na resolução destes problemas, assim como o papel das representações neste contexto de tarefas de padrão. As conclusões que a investigadora constatou foram que todos os alunos conseguiram realizar as tarefas propostas com entusiasmo, recorreram a representações diferentes para explicar o padrão identificado. Conseguiram detetar e descrever padrões, assim como continuar um padrão até ao próximo termo. Em nenhuma das tarefas os alunos recorreram apenas a abordagens numéricas, evitando, a tradução imediata do padrão numa sequência numérica. As representações pictóricas ajudaram a clarificar o modo de construção/estruturação de um padrão, e apercebendo-se que uma alteração numa das variáveis condicionava a alteração da outra. A organização dos dados e o registo dos mesmos foram as situações que causaram mais dificuldades aos alunos, o que revela dificuldades a nível da comunicação escrita, o que já não se verificou na comunicação oral.

Uma segunda investigação foi realizada por Gonçalves (2008) numa turma do 1º ano do 1º ciclo do ensino básico, esta incidiu sobre o tema de problemas para desenvolver o sentido do número. Pretendia estudar as estratégias e dificuldades sentidas nos alunos e verificar qual o contexto que favorece a resolução de problemas numéricos. A investigadora verificou que os alunos recorreram a diversas estratégias desenvolvidas pelos alunos; conseguiram aprofundar o conhecimento sobre os números e as operações de adição e subtração; as dificuldades detetadas foram sobretudo na explicação por parte dos alunos, dos seus raciocínios, da interpretação dos problemas e compreensão do contexto do problema e o cálculo necessário.

A investigação efetuada pela Barbosa (2009) em duas turmas de 2ºciclo, mais precisamente, 6ºano do ensino básico, debruçou-se em avaliar o desempenho dos alunos na resolução de problemas de padrão em contextos visuais. Este estudo tinha como objetivo analisar as possíveis dificuldades e estratégias dos alunos, tendo em conta o papel da visualização no seu raciocínio, em particular no desenvolvimento da capacidade de generalizar. Verificou-se, portanto, que a maior parte dos alunos recorreu a várias estratégias de generalização, na maior parte de contagens visuais, a discussão destas estratégias em grande grupo e o debate de estratégias alternativas contribuiu para que os alunos melhorassem o seu desempenho na generalização. Estas discussões e reflexões são importantes na medida em que ajudam os alunos a criarem conexões entre diversas representações. Os alunos conseguiram melhorar o seu desempenho na continuação dos padrões de crescimento, contudo os padrões de repetição tiveram mais sucesso. Os alunos desta investigação sentiram dificuldades em realizar a generalização distante em algumas das tarefas propostas, o que a investigadora justifica e confirmando na literatura que um dos principais obstáculos da generalização é a utilização do pensamento recursivo por parte dos alunos. Constatou, também, que os estudantes revelaram dificuldades na utilização de uma linguagem apropriada para descrever as leis de formação de um determinado padrão. No entanto, a visualização foi útil e notou-se uma significativa progressão dos alunos na generalização do pré-teste para o pós-teste.

Uma outra investigação que também aborda a resolução de problemas e a comunicação, foi realizada por Henriques e Ponte (2010). Este estudo teve como tema a comunicação matemática no contexto de atividades de investigação e o uso de representações matemáticas por estudantes universitários. Os investigadores observaram os alunos aquando a realização das tarefas (resolução de problemas) e recolheram relatórios elaborados pelos alunos sobre as tarefas realizadas. Estes investigadores concluíram que a tabela é uma representação a que os alunos recorrem com alguma frequência para organizar os dados. Os alunos também recorram a figuras geométricas para obter a solução, utilizando-as para visualizar a informação disponível, apoiar as suas estratégias, e simultaneamente, justificar os seus raciocínios. As respostas dos alunos são descritivas recorrendo à linguagem natural em todas as tarefas de modo a descrever e justificar os seus raciocínios. Quando lhes foi pedido para formalizarem as suas respostas os estudantes utilizaram uma linguagem mista, ou seja, utilizam a linguagem natural juntamente com alguma notação simbólica. A notação simbólica foi uma das dificuldades detetadas porque as expressões simbólicas nem sempre traduzem o que os alunos descrevem informalmente.

Sintetizando, ao longo deste capítulo foi possível verificar a importância da Matemática no dia-a-dia e na vida escolar dos alunos, assim como a relevância do professor na gestão da aula de matemática, e sobretudo na seleção e implementação das tarefas. Neste sentido torna-se necessário refletir sobre os objetivos que o professor pretende atingir nos alunos, quais as caraterísticas da turma para que possa fazer uma escolha criteriosa das tarefas a utilizar na sala de aula. Estas tarefas, como foi possível verificar devem ser tarefas abertas e desafiadoras, de modo a motivarem os alunos para a sua resolução. A resolução de problemas surge como uma tarefa que permite desenvolver várias competências nos alunos, nomeadamente a nível do raciocínio e da comunicação. Se a resolução de problemas por si só já permite o desenvolvimento de certas capacidades, se forem problemas de padrão ainda mais conexões se torna possível de realizar, quer entre ideias matemáticas como não matemáticas. Os problemas de padrão permitem o desenvolvimento do pensamento algébrico através da realização de conjeturas e da generalização, e sobretudo da discussão gerada entre os alunos acerca das estratégias e expressões usadas. Para que estas capacidades possam ser desenvolvidas na perfeição, as tarefas devem ser trabalhadas de acordo com uma proposta didática adequada através de um ensino exploratório.

CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS

Neste capítulo será explicado as razões pela opção metodologia de um estudo de natureza qualitativa na modalidade de estudo de caso. Será referido qual o papel da investigadora ao longo de toda a investigação, assim como, quais os critérios de seleção dos alunos-caso. Haverá uma breve descrição sobre os procedimentos ao longo dos quatro meses deste estudo, assim como os métodos e instrumentos utilizados na recolha de dados, finalizando com uma descrição sobre como decorreu a sua análise.

1. Opções Metodológicas

Tendo em conta que um dos objetivo deste estudo era compreender como é que os alunos comunicam as suas ideias quando resolvem problemas de padrões, optou-se por uma investigação qualitativa interpretativa. Isto porque, se pretendia compreender e interpretar o fenómeno em estudo que foi realizado em ambiente natural, apresenta dados descritivos sobre a forma de texto ou imagem, os dados foram analisados de forma indutiva e, por fim, o interesse deste estudo estava mais no processo, em que decorreu, e não nos resultados, que se poderiam obter (Bogdan & Biklen, 1994). Isto é, a investigação qualitativa/interpretativa privilegia o estudo dos processos em detrimento dos produtos. Por outro lado esta é uma investigação que trata de problemas relacionados com o ensino, por essa razão, uma investigação qualitativa interpretativa é a mais apropriada e utilizada em educação matemática (Vale, 2004).

É de conhecimento comum que as investigações de caractér qualitativo se preocupam mais com as descrições, com o contexto, com o indivíduo, ao contrário das investigações de carácter quantitativo que têm como objetivo generalizar e obter resultados numéricos, dependendo diretamente do estudo de variáveis.

Há várias teorias que defendem o uso de metodologias qualitativas e outras que defendem o uso de métodos quantitativos. Assim, existe uma grande controvérsia entre essas teorias, os positivistas defendem que só o uso do método científico pode ser válido e preciso e que os dados baseados no comportamento humano deixam bastantes dúvidas. Já os construtivistas defendem o contrário, assim, o conhecimento é realizado socialmente, onde os investigadores vão tentar compreender essa realidade dentro do próprio contexto em que se insere, de modo a que compreendam e conheçam essas construções sociais, porque não há uma realidade objetiva (Martens, 2009).

Assim sendo, esta investigação, como já se afirmou anteriormente, vai de encontro ao que os investigadores construtivistas defendem, e como Bogdan & Biklen (1994) afirmam, o método qualitativo pretende descrever e analisar experiências complexas, sendo também uma abordagem interpretativa.

Bogdan e Biklen (1994) defendem que um investigador que envergue pela investigação qualitativa só consegue estruturar um plano a seguir depois da recolha de dados e de algum convivio com os sujeitos a estudar, desta forma, o investigador é comparado a um "viajante", deliniando por alto o que pretende, mas não de forma meticulosa. Esta investigação enquadra-se no que estes autores defendem, desta forma, o leitor poderá comprová-lo através do planeamento e de descrição desta investigação ao longo dos capítulos desta narrativa.

No âmbito da investigação qualitativa optou-se pela corrente de estudo de caso pois, segundo Bruyne et al. (1975, citado em Lessard-Hébert & Gabriel Goyette, 2005) o seu campo de investigação é o "mais real, o mais aberto e o menos controlado".

Antes de se avançar mais, convém clarificar o que é um estudo de caso. Segundo Merriam (1988, citado em Bogdan & Biklen, 1994, p.89) "o estudo de caso consiste na observação detalhada de um contexto, ou indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico".

Na mesma linha de pensamento temos Yin (1989) e Ponte (1994), citados em Vale (2004), que defendem que o estudo de caso é adequado quando se quer conhecer o "como" e "porquê", quando é realizado em contexto real utilizando várias fontes para o caracterizar, tendo um caráter particularista, ou seja, centrando-se numa condição mais específica.

2. Contexto do Estudo

Esta investigação foi realizada no ano letivo de 2011/2012, numa escola de 2º e 3º ciclo do ensino básico, no concelho de Viana do Castelo, numa turma de 5º ano, ao longo do terceiro período, nas aulas de matemática.

2.1. Os Participantes

Ao longo desta investigação houve vários participantes, uns com papéis secundários e outros com papéis principais, no entanto, todos eles foram importantes para a concretização do presente estudo e para a compreensão do contexto em que se inseriu a investigação.

A turma era constituída por 20 alunos, todos com idades compreendidas entre os 10 e 11 anos, sendo 10 alunos do sexo feminino e 10 alunos do sexo masculino, não havendo repetentes, frequentando o 5ºano pela primeira vez. A maior parte da turma já se conhecia desde o 1ºciclo, havendo uma boa relação entre todos os alunos. Nesta, havia um aluno surdo profundo com necessidades educativas especiais, tendo um programa adaptado em algumas disciplinas, nomeadamente matemática, não assistindo às aulas. Esta turma foi a atribuída para a realização da PES II.

A escolha dos alunos-caso para o presente estudo foi um processo moroso e complexo. Para dar inicio ao estudo foram recolhidos dados acerca desses cinco alunos, onde se pretendia analisar a comunicação e as estratégias utilizadas na resolução de problemas de padrões dentro da sala de aula, mas só depois de todos os dados recolhidos optou-se definitivamente por dois alunos caso.

Neste paradigma o investigador tem um papel fundamental, pois, é a principal fonte de recolha dos dados no contexto natural onde decorreu este estudo, e terá de compreender e interpretar as ações dos diferentes intervenientes face às determinadas situações que o investigador pretende analisar (Vale, 2004). Assim, neste estudo a investigadora foi simultaneamente professora estagiária da turma em que se realizou o estudo e investigadora, durante três semanas. O par pedagógico foi essencial na recolha de dados, coube-lhe a tarefa de recolher os registos de vídeos e fotografia dentro da sala de aula, havendo sempre um trabalho em parceria. Ao fim dessas três semanas os papéis inverteram-se, devido a questões logísticas e organizacionais, da Intervenção em Contexto Educativo (estágio), e dessa forma, a parceira de estágio assumiu a regência das restantes aulas, passando a investigadora a efetuar as observações em contexto do presente estudo, fotografando, observando e questionando a turma, em particular os alunos que seriam os casos neste estudo, enquanto, que, a parceira de estágio implementava as tarefas para efeitos de recolha de dados.

Deste modo, torna-se relevante fazer uma breve descrição da colega de estágio, visto que, foi um elemento importante na investigação, auxiliando durante toda a recolha de dados ao longo de seis semanas consecutivas. Desde o início que houve sempre grande cumplicidade entre as duas, o que permitiu e facilitou o seu envolvimento neste estudo para a implementação da experiência didática. Tentou sempre ser empenhada, seguindo a mesma metodologia de abordagem às tarefas de acordo com a experiência didática que a própria investigadora, que será descrito no capítulo 4.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994) só depois de se recolher os dados, de os rever e explorar e de aprofundar a relação com os participantes do estudo é que se escolhem quem e quais se deve focar. Esta escolha recaiu na análise das respostas dos alunos e na análise das respostas nas entrevistas, pois, importava, acima de tudo, haver uma boa comunicação e boas estratégias utilizadas na resolução de problemas. Para estes dois alunos foram escolhidos nomes ficticíos de modo a preservar a identidade deles e protegê-los de quaisquer problemas que possam provir do estudo (Bogdan & Biklen, 1994).

2.2. Procedimentos

Uma vez definida a metodologia e os instrumentos de recolha de dados e depois do professor cooperante da turma estar a par do trabalho que iria ser desenvolvido, tendo concordado ajudar, caso preciso, foi necessário formular um pedido de autorização

(Anexo 5) aos encarregados de educação dos cinco alunos iniciais, para que se pudesse utilizar as filmagens que decorriam dentro da sala de aula para o presente estudo. Todos os encarregados de educação autorizaram o pedido para utilizar e recolher dados aos seus educandos.

Assim, em fevereiro, quando se soube qual o ano no qual se iria implementar este estudo, o principal objetivo foi escolher um tema, ou seja, detetar um problema possível de investigar durante as nove semanas de estágio em que se iria ter contacto com a turma. Para isto, o professor cooperante de matemática elaborou uma lista das principais dificuldades detetada nos seus alunos na área da matemática. Dessa lista o tema que mais chamou a atenção foi a comunicação matemática, uma vez que é um tema transversal e importante no novo programa de matemática. Outro fator que influenciou a minha escolha foi, que na minha experiência do 1º ciclo, um dos principais problemas era exatamente o mesmo, a comunicação matemática, quer escrita quer oral. Deste modo, este foi o tema escolhido. Para o trabalhar achou-se por bem, que fosse através da resolução de problemas, que, da mesma forma, é um tema transversal e importante no currículo, como já se afirmou nesta investigação. Dentro da resolução de problemas, os problemas de padrão são aqueles que permitem mais conexões e conseguem ser mais ricos de explorar. Assim, depois, destas decisões, já no mês de março, procedeu-se a escolha das tarefas a implementar. Simultaneamente a estas etapas, logo a partir do mês de fevereiro iniciou-se a revisão de literatura.

Ainda no mês de março decorreram as observações da turma em geral e da escolha dos alunos-caso para preparar o restante trabalho. Durante os meses de abril e maio as tarefas foi implementada na turma, a experiência didática que inclui as tarefas previamente selecionadas, sendo todas as aulas gravadas, estas eram implementadas todas as semanas, uma ou duas por semana, isto porque, havia também outros conteúdos programáticos a ser abordados nas aulas, e duas fichas de avaliação a serem realizadas. Ainda em abril, foi realizada a primeira entrevista aos cinco alunos, antes de terem qualquer contacto com as tarefas a serem utilizadas nas aulas. No mês de maio, depois das tarefas já terem sido todas realizadas e exploradas, realizou-se a segunda entrevista de modo a recolher informações acercas das tarefas que os discentes tiveram contacto. Simultaneamente a esta fase foram enviados os pedidos de autorização aos encarregados de educação. No mês de maio procedeu-se à caracterização da turma e dos alunos-caso para conter no presente estudo. Seguindo-se a opção pelos dois alunos-caso uma vez que a investigação foi realizada no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada, esta continha prazos de entrega, assim devido à falta de tempo para poder analisar os cinco, optou-se apenas por dois alunos. A revisão da literatura continuou depois da recolha de dados, pois tal como afirmam Bogdan & Biklen (1994) "Ainda que os investigadores possam ter uma ideia acerca do que irão fazer nenhum plano detalhado é delineado antes da recolha dos dados. (…)É o próprio estudo que estrutura a investigação, não ideias preconcebidas ou um plano prévio detalhado" (p.83). Em simultâneo iniciou-se a análise de dados e a redação deste relatório.

Em síntese para ser mais fácil de compreender as etapas deste presente estudo apresenta-se de forma sucinta o descrito anteriormente na tabela 1.

Tabela 1: Resumo dos procedimentos efetuados ao longo da elaboração do presente estudo.

Ano letivo	Meses	Fases	Procedimentos
2011/2012	fevereiro	Acesso à escola e à turma. Contato com o contexto: escola e turma.	Escolha da problemática a trabalhar. Opção metodológica. Recolha bibliográfica.
	março	Seleção dos alunos e das tarefas.	Observação dos alunos da turma; Seleção dos alunos participantes no estudo; Seleção das tarefas e da metodologia a utilizar na experiência didática; Recolha bibliográfica;
	abril/maio	Realização das entrevistas e da aplicação da experiência didática	Realização da primeira entrevista aos cinco alunos-caso; Execução das tarefas selecionadas na turma toda; Filmagem da comunicação oral dos alunos-caso; Pedido de autorização aos encarregados de educação para a filmagem aos alunos-caso; Aplicação da segunda entrevista aos cinco alunos-caso; Caracterização da turma e alunos-caso; Recolha bibliográfica.
	junho/ julho	Redação do relatório final	Seleção dos alunos-caso definitivos para o estudo; Recolha bibliográfica; Redação do relatório e análise dos dados recolhidos para o relatório final.

2.3. Recolha dos Dados

Antes de começar a recolha de dados e as observações em campo foi necessário tomar algumas decisões, nomeadamente, a seleção dos alunos a acompanhar neste estudo e as tarefas sobre as quais a investigação iria incidir.

A recolha de dados para este estudo utiliza os métodos mais utilizados numa metodologia qualitativos na vertente de estudo de caso são entrevistas, observações, documentos escritos incluindo notas de campo, fotografias e vídeos (e.g. Bogdan & Biklen, 1994; Vale, 2004).

2.3.1. Observações

A observação é uma das técnicas mais utilizadas na metodologia qualitativa, onde, o investigador é o principal instrumento de recolha de dados, estando em contacto com a realidade tal e qual como ela é. Assim, as observações são a melhor técnica de recolha de dados, deste modo convém registar os aspetos mais importantes que se observam uma vez que não se consegue registar tudo. As observações chamam à atenção do observador para comportamentos inconscientes, costumes, interesses, preocupações, etc. (Vale, 2004). Como refere Afonso (2005) "esta é uma técnica de recolha de dados particularmente útil e fidedigna, uma vez que a informação obtida não se encontra condicionada pelas opiniões e pontos de vista dos sujeitos" (citado em Alvarenga, 2006, p. 51). Assim, recorrendo à observação empírica têm-se uma melhor perceção do comportamento humano e, por consequência, reflete-se com maior clareza sobre determinados comportamentos (Bogdan & Biklen, 1994).

Desta forma, as observações para este estudo decorreram ao longo das seis semanas de estágio, começando de moo informal passando para um modo mais formal nas primeiras três semanas onde a investigadora tinha de simultaneamente ser investigadora e professora o que nem sempre foi fácil e dificultando a tomada de notas de campo que a maior parte das vezes eram efetuadas fora da sala de aula onde nas últimas três semanas, a investigadora já não estava a lecionar, no entanto, estava a efetuar registos. Este foi um dos aspetos em que o presente estudo teve como limitação, no entanto, as observações foram úteis para caracterizar os alunos-caso e a própria turma, percebendo e retirando certas conclusões acerca de determinados comportamento visualizados. Nestas observações não foi utilizado nenhum esquema de observação, mas estavam presentes os objetivos do estudo: o desempenho das tarefas, identificando possíveis dificuldades e a comunicação quer escrita, quer oral.

2.3.2. Entrevistas

A entrevista é uma técnica de recolha de dados que permite auxiliar a interpretação das opiniões e atitudes dos entrevistados. Estas são conversas que detém uma intenção, permitindo ao investigador movimentar-se no tempo de modo a compreender determinadas ações (Vale, 2004). Estas conversas devem ser realizadas como se fossem entre amigos, com um certo nível de confiança e à vontade, para que o investigador consiga captar o que realmente é importante (Bogdan & Biklen, 1994), ou seja, desde sentimentos, pensamentos, intenções, opiniões.

Desta forma foram realizadas duas entrevistas semi-estruturadas (Anexo 6). A vantagem destas, é que se torna mais fácil à posteriori de organizar e analisar os dados obtidos (Vale, 2004) e porque permitem o surgimento de novas questões que não estavam previstas, existindo uma grande flexibilidade na ordem das perguntas (Alvarenga, 2006).

Nas duas entrevistas realizadas as conversas foram abertas, pondo os alunos à vontade, estando livres para falarem e responderem o que quisessem. Dessa forma, antes das entrevistas foi explicado aos alunos que se iria fazer e começando por outros temas para que estes estivessem descontraídos. Uma das entrevistas foi realizada, como já foi referido, antes da implementação das tarefas de resolução de problemas de padrão, de modo a captar a opinião dos alunos acerca das aulas de matemática e sobre a matemática como disciplina. A segunda entrevista, já realizada no fim das implementações das tarefas, foi com o objetivo de compreender a opinião dos alunos acercas das tarefas realizadas, o que estas despertaram neles, o mais dificíl, o que mais gostaram e o que poderia ser melhorado. Os alunos foram também questionados sobre algumas das respostas escritas nas tarefas que, ou não esclareciam suficientemente, ou estavam incompletas, ou estavam confusas e não era percetível a identificação do raciocínio, isto, com o objetivo de compreender o pensamento dos alunos.

As questões realizadas nas duas entrevistas tinham sempre o propósito de colocar os alunos a refletirem e explicarem a sua opinião, evitando respostas como "sim" e "não", porque não são esclarecedoras nem comportam informação útil. Na segunda entrevista

Ambas as entrevistas foram realizadas aos cinco estudantes, pois, ainda não tinha sido efetuada a escolha de quem seriam os alunos-caso. Todas elas foram filmadas, sendo transcritas na íntegra para serem analisadas.

2.3.3. Recolha Documental

A recolha de documentos é outro método a utilizar numa investigação. Bogdan e Biklen (1994) referem que os dados são todos os materiais que o investigador recolhe no contexto em que desenvolve a sua investigação, e, segundo estes autores, os documentos criados por outros sujeitos, também se inserem nos dados, não sendo apenas considerados dados, os materiais produzidos e registados pelo investigador.

Assim, esta investigação incidiu em dois tipos de documentos, os primeiros que são de *origem administrativa*, ou seja, dados que só os professores e a direção da escola têm acesso, sendo estes dados existenciais, consultados para fundamentar o presente estudo.

Os documentos são, também, essenciais, porque podem ser produzidos de forma independente do objetivo da investigação (Merriam, 1991, citado em Alvarenga, 2006), ou seja, não têm exclusivamente de ser usados para a investigação, podendo ser realizados independentemente do estudo a ser realizado. Assim, o segundo tipo de documentos utilizados, foram produzidos *pelos alunos*, ou seja, consideraram-se as tarefas abordadas na sala de aula e resolvidas pelos alunos com a finalidade de identificar as estratégias e a forma como os alunos efetuavam os registos e comunicavam por escrito.

Desta forma, as tarefas propostas aos alunos poderiam não ser utilizadas para esta investigação e serem apenas tarefas de sala de aula, mas, como a grande preocupação deste estudo centrou-se nas capacidades transversais, optou-se, como contexto, a proposta didática sobre padrões que é operacionalizada através de um conjunto de tarefas previamente selecionadas e que é um contexto privilegiado para desenvolver capacidades, nomeadamente, a resolução de problemas e a comunicação.

2.3.4. Registos de Vídeos e Fotografias

Ao longo das aulas foram capturadas algumas fotografias à medida que a turma executava as tarefas. Foi também filmado a explicação oral, dos cinco alunos escolhidos inicialmente sobre a resolução das tarefas, de modo a que explicassem à turma o seu modo de pensar. A máquina fotográfica, usada simultaneamente para fotografar e filmar, foi um elemento perturbador na primeira aula em que se usou, no entanto, rapidamente passou despercebida, pois, como, enquanto a investigadora lecionava e orientava as aulas, o seu par de estágio é que estava encarregue da máquina fotográfica. Desta forma, a sua companheira apenas tinha o papel de fotografar e filmar, enquanto, a investigadora interagia com os participantes. Este método facilita a recolha de dados audiovisuais sem perturbar drasticamente o contexto natural que é a sala de aula (Bogdan & Biklen, 1994).

Optou-se por gravar em modo vídeo as entrevistas para que, ao serem analisadas, se pudesse compreender e visualizar o comportamento, atitudes, gestos e expressões que o aluno teve naquele momento, uma vez que poderiam ajudar a entender melhor o aluno e as suas respostas.

As gravações audiovisuais tinham de duração em média cinco minutos, dependendo do tempo de explicação que o aluno tinha. Estas eram realizadas individualmente no lugar do aluno mal ele tinha terminado a tarefa e ainda, quando este ia ao quadro explicar à turma como pensou.

Estes dados foram transcritos na sua totalidade para facilitar e complementar a análise documental recolhida, para ser descrita no presente estudo.

2.4. Análise de Dados

Para garantir a qualidade deste estudo, aquando à recolha de dados e depois da recolha estar concluída houve o cuidado de se efetuar uma leitura sucessiva dos dados e de cruzá-los com os dados empíricos. No entanto, para facilitar a análise de dados teve-se em conta a perspetiva de Miles e Huberman (1994, citados em Vale, 2004), ao defenderem que os dados são analisados através da redução dos mesmos, da sua apresentação e das conclusões e verificações sobre estes. Deste modo, a redução dos dados tem o objetivo de selecionar, simplificar e organizar os dados recolhidos para se extraírem mais facilmente as conclusões finais. Mas, quando se decidiu qual o tipo de investigação pelo qual este estudo iria envergar, quais os casos a estudar, as questões às quais se pretendia responder através do estudo e quais os métodos de recolha de dados, todos foram considerados na redução dos dados (Vale, 2004).

Depois de se ter iniciado a recolha de dados, um dos primeiros dados a ser analisado e transcrito fielmente, foi a primeira entrevista realizada aos cinco alunos. Isto para tentar perceber um pouco de cada e compreender as suas conceções. Posteriormente, enquanto se recolhiam os últimos dados documentais, aqueles já recolhidos foram analisados de modo a perceber o raciocínio dos cinco estudantes, bem como tirar algumas notas sobre qualquer incompreensão escrita ou de raciocínio. Isto porque, quando se fosse realizar a segunda entrevista, simultaneamente, esclareciam-se dúvidas existentes, tal como aconteceu para os cinco alunos. Realizou-se a segunda entrevista aos cinco alunos, mas esta já só foi transcrita para os dois alunos-caso, analisando-a e retirando o mais importante. Em simultâneo foram analisados profundamente os dados obtidos referentes aos dois alunos-caso de acordo com os objetivos propostos para o presente estudo. Analisou-se um aluno de cada vez, só no fim é que se confrontaram os dois estudos de caso.

A apresentação dos dados deve estar bem organizada, ser acessível e ser compacta para facilitar a extração de conclusões fundamentadas (Vale, 2004). Assim, depois de se analisarem todos os dados recolhidos foi mais fácil verificar o que realmente estava de acordo com o objetivo e questões orientadoras do presente estudo, recorrendo a uma codificação (Anexo 7) para mais facilmente identificar as categorias de análise principais: a comunicação e a resolução de problemas.

Na fase da extração de conclusões e verificação o investigador nota quais as regularidades e explicações existentes nos dados, percebendo o seu significado, identificando as conclusões aos poucos até que as fundamente. O processo de verificação pode ser curto, recorrendo a algumas notas de campo, ou longo, recorrendo à argumentação com o objetivo de desenvolver unanimidade e intersubjetividade. Foi nesta fase que se procedeu à escrita das conclusões fazendo o paralelismo entre a revisão bibliográfica e as conclusões obtidas, conseguindo desta forma a verificação.

Para além destes procedimentos, os mesmos autores (Miles e Huberman,1994, citados em Vale, 2004) propõem vários critérios para garantirem a qualidade de um estudo qualitativo. Esta investigação enquadra-se em alguns desses critérios, ou seja, a confirmabilidade, a fidedignidade e a credibilidade. A confirmabilidade diz respeito apenas aos participantes e aos dados recolhidos, de modo que não sejam influenciados assim, para demonstrar que as conclusões estão de acordo com a investigação, na análise dos estudos de caso foram transcritas frases exatamente como os participantes as enunciaram. A fidedignidade diz respeito à confiança do estudo, ou seja, se este fosse realizado por outro investigador se era possível de obter os mesmos resultados (Vale, 2004). Este critério está presente nesta investigação, porque os dados foram recolhidos pela investigadora e pela sua colega de estágio. Logo, os dados foram recolhidos por duas pessoas diferentes confirmando os resultados. Na credibilidade pretende-se saber se os resultados fazem sentido. Este critério interliga-se com a validade interna do estudo (Vale, 2004).

Vale (2004) enumera algumas estratégias que permitem dar credibilidade a um estudo. Assim, a primeira diz respeito ao envolvimento prolongado, o qual foi possível ser realizado nesta investigação, uma vez que, a investigadora esteve durante três meses e meio em contacto com o contexto a ser estudado. A segunda estratégia refere-se à confirmação pelos participantes. Nesta, os participantes têm a possibilidade de ler o que escreveram, foi o que aconteceu ao realizar a segunda entrevista, pois, simultaneamente, os alunos visualizam algumas das suas representações, podendo esclarecer as que não estavam tão percetíveis. A terceira estratégia refere-se à triangulação, esta está presente neste estudo pois utiliza vários métodos de recolha de dados. Na triangulação existem duas fontes de dados que transmitem mais conhecimento sobre determinado facto, logo as entrevistas e a recolha de dados documentais são as duas fontes de dados mais relevantes para esta investigação.

Em síntese neste capítulo justificou-se a opção da abordagem qualitativa explicando um pouco o seu significado e em que consistiu em parte este presente estudo, de acordo com os instrumentos e caraterização de uma investigação qualitativa. Procurou-se explicar como e porquê se utilizaram tais métodos/instrumentos descrevendo os procedimentos adotados. Faz-se referência ao papel da investigadora nesta investigação, e o papel dos restantes participantes do estudo. Por fim, refere-se quais os cuidados tidos para garantir os critérios de qualidade do estudo.

CAPÍTULO 4 – EXPERIÊNCIA DIDÁTICA

Este capítulo dedica-se essencialmente às tarefas escolhidas e desenvolvidas para a experiência didática, descrevendo a sua organização, o modelo utilizado e seguido para a exploração destas, os procedimentos adotados, tal como a proposta implementada nas aulas, referindo as expetativas e objetivos que cada tarefa pretendia desenvolver.

1. Desenvolvimento da Experiência Didática

Depois de se ter delineado o problema para se estudar, houve a decisão de como estudar esse problema. Dessa forma e como já abordado, a resolução de problemas era o meio mais eficaz para se poder estudar a comunicação dos alunos através das representações a que recorrem para descrever o pensamento. Tendo-se optado pelos padrões como contexto, não só por irem de encontro aos objetivos pretendidos, como também pelo contributo para o conhecimento matemático em particular na generalização do pensamento algébrico. Por outro lado, analisando o manual adotado pela escola, e tendo em conta o programa da matemática, esse mesmo manual, apesar de acordo com o programa atual da disciplina, não apresentava qualquer tipo de problemas que envolvessem padrões e fossem desafios para os alunos. Apresentava em grandes quantidades as típicas tarefas rotineiras de sala de aula, que se utilizavam no ensino tradicional e antigo programa. Uma vez que os manuais escolares são "tradutores das prescrições curriculares gerais e construtores do seu verdadeiro significado" (Gimeno, 1995, citado em Cabral, 2005, p.47) e que a sua principal função é dar apoio no processo de ensino-aprendizagem de modo a "criar condições que levem à aprendizagem" (Boostrom, 2001, citado em Cabral, 2005, p.47), o manual de matemática não poderia ser utilizado numa tentativa de colmatar as dificuldades encontradas. As tarefas utilizadas neste estudo já foram amplamente validadas e aplicadas em diversos estudos. As tarefas, tais como *Mais Flores*, *Morangos em V*, *Os Comboios de Polígonos, Com Quadradinhos, Regiões no Retângulo* e *A* *moldura* foram retiradas de Vale *et al*. (2009). Sendo as tarefas *As Caixas de Corações* e *Na Cantina* retiradas de documentos não publicados de Vale. A tarefa *Os Z* foi retirada de um artigo acerca da resolução de problemas de padrões de Vale, Barbosa e Palhares (2008) e a tarefa *Discos* foi retirada de Vale *et al*. (2011).

A escolha das tarefas foi efetuada quase em simultâneo com a sua implementação. As tarefas escolhidas para analisar incidiram na resolução de problemas de padrão de forma a poder-se analisar a comunicação aí obtida, sendo padrões de sequência, dando ênfase ao contexto figurativo. Estas foram escolhidas segundo vários critérios:

- adequadas à faixa etária dos alunos;
- adequadas ao nível de raciocínio da turma em gral, não sendo demasiado complexas;
- interligassem conteúdos do programa do 5º ano, preferencialmente um de cada bloco do programa de matemática;
- envolvessem sequências de crescimento.

Deste modo, foram escolhidas oito tarefas a serem implementadas nas aulas de matemática. No entanto, implementou-se uma inicial como forma de avaliar e analisar o modo como a turma encarava o tipo de tarefas a explorar e se já tinham tido contacto com as mesmas. Para finalizar e sem estar previsto, implementou-se uma sétima tarefa, mas numa ficha de avaliação.

Antes de iniciar as tarefas acerca dos problemas, iniciou-se uma tarefa de contagens para verificar o *subitizing* da turma e quantas formas diferentes de contar conseguiam ver. Na ficha de avaliação implementou-se, também, uma tarefa destas.

A planificação da proposta didática para o ensino de padrões, foi descrita no capítulo 2, é constituída por três tarefas de contagens, duas delas como exploração inicial, de forma a verificar o *subitizing* dos alunos e outra ocorreu na ficha de avaliação, tendo os alunos que identificar três maneiras diferentes de visualizar e contar. Houve ainda oito tarefas de resolução de problemas de padrões, de sequência, visando o contexto figurativo, indo todas elas de encontro aos objetivos propostos por este estudo e algumas delas, inseridas dentro dos conteúdos do programa de matemática, planificados anualmente pelo professor da turma. Assim, as tarefas foram implementadas no final das aulas, para não prejudicar o programa da disciplina, contabilizando um total de 8 aulas, tendo a exploração das tarefas a duração de cerca de 20-30 minutos. No entanto, algumas alongavam-se até aos 40 minutos, dependendo da dificuldade que a turma tinha.

As tarefas de resolução de problemas não foram todas enquadradas nos mesmos conteúdos, de áreas e perímetros, porque, um dos critérios definidos inicialmente era serem duas tarefas que abrangessem áreas e perímetros, duas sobre números e operações e as outras duas sobre números racionais. Isto, também, porque, os alunos poderiam achar fácil ou difícil apenas trabalhar um certo conteúdo, e não seria tão diversificado e motivante. No entanto, as tarefas escolhidas inicialmente, e de acordo com este critério eram um pouco complexas para a turma em questão. Assim, modificaram-se duas das tarefas iniciais, tendo-se mudado este critério de seleção para o critério já referido no capítulo anterior: sobre as tarefas interligarem conteúdos do programa do 5º ano, preferencialmente um de cada bloco do programa de matemática, sendo este mais abrangente.

Para o presente estudo optou-se por organizar as tarefas de acordo com as categorias da proposta didática utilizada por Vale *et al. (*2009). Esta tem quatro fases: as *contagens visuais básicas,* as *contagens visuais em contextos diversificados,* as s*equências* e os p*roblemas.* Desta forma, e como já se revelou anteriormente, as primeiras tarefas a serem implementadas e exploradas para esta investigação foram as de contagens, envolvendo o *subitizing* dos alunos e o modo como eles conseguem visualizar e agrupar por grupos de contagens. Seguidamente a estas tarefas foram exploradas as sequências de padrões, onde os alunos tinham, simultaneamente, envolvidas as contagens e as sequências, uma vez que, para conseguirem determinar e encontrar o padrão predominante na sequência, tinham de conseguir visualizar/ver a relação existente entre os termos anteriores e os seguintes. Finalizando, depois de exploradas estas fases anteriores, a última fase pretende chegar à solução através da generalização. Para que os alunos consigam chegar a esta última fase, as três anteriores são fundamentais, porque, se as crianças não conseguirem assimilar e perceber o padrão subjacente, também não conseguem encontrar uma solução para qualquer termo. Esta proposta é crucial, porque permite desenvolver o pensamento algébrico, pois, através da exploração de padrões em sequências figurativas consegue-se perceber as relações entre os termos sucessivos, podendo representar o padrão visual numa expressão numérica de modo a chegar à generalização (Vale, 2012).

Para complementar esta proposta e tornar mais ricas, quer as aulas dedicadas às tarefas, quer o pensamento da turma; para a exploração das tarefas seguiu-se o modelo das *cinco práticas* para orientar uma boa discussão dentro da sala de aula, este é defendido pelas autoras Smith, Hughes, Engle e Stein (2009). Assim, este modelo, como o nome indica tem cinco etapas, ou seja, as cinco práticas essenciais para a exploração de tarefas: *antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões.* Desta forma houve o cuidado de seguir todas as etapas deste modelo para benefício dos alunos, principalmente nas primeiras tarefas, pois não se sabia como é que os alunos iriam reagir com estas e se já tinham explorado resolução de problemas envolvendo padrões. A última etapa deste modelo é talvez a que tem mais importância, uma vez que é nela que os alunos trocam as ideias e comunicam sobre a sua resolução. Pode-se afirmar isso, porque, dos cinco alunos a quem se realizou as entrevistas, todos eles afirmam ter aprendido algo com a apresentação dos colegas confirmando que é importante porque assim aprendem novas estratégias de resolução de problemas, observando diferentes soluções das que eles utilizaram, e, chegando assim à conclusão que um problema não tem uma só solução.

Para a exploração desta proposta didática foi importante, como já referido no capítulo anterior, o apoio do par pedagógico. Assim, tal como a investigadora, também a sua colega da Intervenção em Contexto Educativo explicou o problema antes de ser dado a realizar aos alunos, e no fim, discutiu os resultados obtidos dos diversos alunos, escutando oralmente os raciocínios dos alunos-caso. Conseguindo desta forma explicar as várias soluções obtidas, e caso houvesse outra solução que não tivesse sido encontrada pela turma, a própria docente fazia-o perante os alunos.

Depois de fazer uma breve caraterização da companheira de estágio, torna-se também essencial explicar qual o papel da investigadora ao longo das seis semanas de recolha de dados, ou seja, nas tarefas de resolução de problemas de padrões. Em parte, o comportamento e exploração das tarefas enquanto professora, foram basicamente as mesmas da colega de estágio, explorando sempre as várias soluções e ouvindo preferencialmente os alunos. Enquanto investigadora, o seu principal foco de atenção eram os cinco alunos escolhidos para este estudo, tendo, circulando, fotografando e filmando sempre que eles diziam que tinham encontrado o "caminho" para a generalização de uma regra de modo a captar os seus raciocínios.

2. As Tarefas

Como se utilizou empiricamente a proposta didática, optou-se por organizar o trabalho através das categorias da mesma. Dando, nestas categorias, relevância às representações que poderiam surgir e aos conteúdos que estavam assimilados às mesmas.

Apesar de todas as tarefas serem diferentes e terem objetivos diferentes, a sua exploração foi sempre igual. Ou seja, foi sempre de acordo com o modelo de Stein, já referido neste capítulo. A única tarefa que foi diferente das restantes foi o problema que saiu na ficha de avaliação, onde os alunos não exploravam logo em seguida a correção do mesmo, nem ouviam os colegas a explicar o seu raciocínio. Estas duas últimas fases da exploração das tarefas, ficaram para a aula de correção da ficha de avaliação. No entanto, em vez de se ouvir vários alunos, apenas um explicava o seu modo de pensar, isto para não perturbar a restante aula planificada, uma vez que tinha de ser cumprida, devido a motivos organizacionais. Não foram utilizados materiais didáticos para a exploração dos problemas de sequência, pois as tarefas implementadas eram simples e não necessitavam de recorrer a material didático específico.

Quanto às tarefas de contagens, a sua exploração foi realizada no quadro, onde os alunos identificavam as várias formas de visualizarem e contarem rapidamente os elementos da imagem apresentada. A tarefa que esteve na ficha de avaliação, não foi corrigida de imediato, mas quando o foi, esta foi explorada da mesma maneira que a anterior.

Tal como já foi referido anteriormente, as tarefas de resolução de problemas deste estudo, têm vários caminhos possíveis para se obter a solução. Assim, é crucial perceber e analisar quais os possíveis processos de resolução, que poderiam também ser as estratégias utilizadas pelos alunos e que objetivos visavam desenvolver. Assim, de seguida serão vistas quais as expetativas esperadas para cada tarefa. Estas foram realizadas pela investigadora e pelo seu par de estágio, uma vez que ambas tiveram o mesmo papel na exploração dos problemas, só que em datas diferentes.

2.1. As Contagens

Nas contagens foram implementadas três tarefas, duas delas na primeira aula (M*ais Flores* e *Morangos em W*), e a última na ficha de avaliação de modo a recolher dados empíricos. As duas primeiras foram exploradas no quadro com a turma toda. O objetivo para as três tarefas era o mesmo, ou seja, desenvolver a capacidade de "ver" (identificação, decomposição, rearranjo, disposição) (Pimentel, 2010; Vale, 2012) nos alunos para que se tornasse mais fácil a exploração dos problemas de padrões, e de modo a que eles não contém um a um, cada elemento de cada imagem. Assim, pretende-se que contem rapidamente utilizando grupos de elementos para ajudar na contagem. Seguidamente apresentar-se-á várias formas de "ver" para cada uma das tarefas de contagens, no entanto, as diversas formas apesar de diferentes, são equivalentes, porque traduzem o mesmo resultado, apenas o "caminho" é diferente.

As três tarefas seguintes envolvem e pretendem desenvolver conteúdos como: decomposição de números; relações numéricas; operações e propriedades; expressões numéricas; orientação espacial e simetria.

Em *Mais Flores p*odemos visualizar diversas formas de "ver", no entanto, nesta tarefa o modo de contar mais óbvio é: 3x5 ou 5+5+5, estando presente o *subitizing*, ou seja, olhar para a imagem e automaticamente "ver" logo a representação do número cinco (Figura 1). Outra forma de contar será: 2x6+3 ou 2+2+2+2+2+2+3, podendo à partida estar também o "ver" automaticamente, pois, as flores do meio não têm de ser contadas, porque, visualiza-se logo a representação do número três (Figura 2). Poderá visualizar-se ainda: 3x(3+2), em que cada grupo de cinco flores seria vista 3+2, e são 3 grupos de cinco flores, ou, 3x3+3+3 (Figura 3). Outro modo seria contar as flores atendendo às cores, agrupando-as em cores iguais: 3 azuis+3 amarelas+3 cor-de-rosa escuro+2 cor-de-rosa claro+2 verdes+2 vermelhas. No entanto, apesar destas quatro formas de visualizar os elementos da mesma imagem, o total de flores é sempre o mesmo: 15 flores.

Figura 1– Possível resolução da tarefa "Mais flores" (1º exemplo)

Figura 2– Possível resolução da tarefa "Mais flores" (2º exemplo)

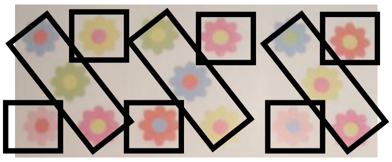


Figura 3 – Possível resolução da tarefa "Mais flores" (3º exemplo)

Em *Morangos em W* as expetativas em relação às resoluções esperadas com esta tarefa eram: 4+4+2+2+1 ou 2x4+2x2+1, assim, seriam 4 morangos nos "braços" laterais, 2 nos "braços" do meio e 1 no centro (Figura 4). Podiam visualizar também 3+4+4+2, sendo vistos por filas horizontais (Figura 5). Ou ainda, 4+3+3+3 ou 4+3x3, esta expressão traduz a visualização, onde se vêm 4 morangos no primeiro braço no "w" na vertical, seguindo da esquerda para a direita, contando seguidamente três conjuntos de três morangos, que formam o restante "w", correspondendo aos outros 3 "braços" (Figura 6).

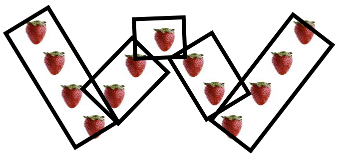


Figura 4 – Possível resolução da tarefa "Morangos em W" (1º exemplo)

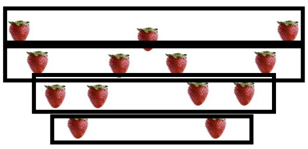


Figura 5 – Possível resolução da tarefa "Morangos em W" (2º exemplo)

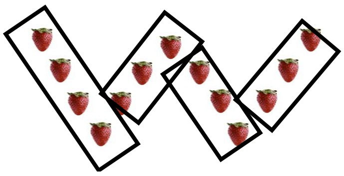


Figura 6 – Possível resolução da tarefa "Morangos em W" (3º exemplo)

Na tarefa *Discos* foi escolhida propositadamente para ser inserida na ficha de avaliação, de modo a que os alunos individualmente resolvessem a tarefa.

Tal como para as anteriores existem vários modos de "ver" e agrupar os elementos da imagem para os contar sem ser um a um, no entanto, apenas se explicitam três dos modos, pois, são os mais espectáveis na resolução dos alunos.

O processo mais facilmente visualizado é 5x4 ou 4+4+4+4+4 (Figura 7). Pode-se visualizar, ainda, 2x6+2x4 ou 6+6+4+4 (Figura 8). O terceiro processo, será traduzido pela expressão 4x5 ou 5+5+5+5 (Figura 9). Apesar de só se apresentarem estas soluções, existem diversas formas de visualizar, não quer dizer que sejam apenas estas.

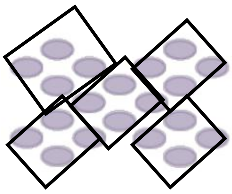


Figura 7 – Possível resolução da tarefa "Discos" (1º exemplo)

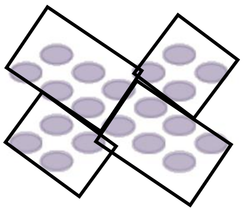


Figura 8 – Possível resolução da tarefa "Discos" (2º exemplo)

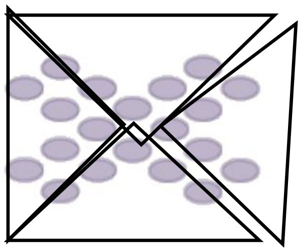


Figura 9 – Possível resolução da tarefa "Discos" (3º exemplo)

2.2. As Sequências de Crescimento

Para a resolução das tarefas nesta categoria espera-se que os alunos recorram ao que descreverem nas tarefas anteriores. As representações que os alunos podem utilizar nestas tarefas, para além das pictóricas, são as expressões numéricas. Espera-se levar os alunos a representações mais formais, recorrendo à linguagem matemática e recorrendo a variáveis para obter expressões algébricas.

Morangos em V (Anexo 8) foi a tarefa com a qual este estudo começou. Esta tarefa foi selecionada com o objetivo de ser a primeira a ser implementada. O objetivo da implementação desta tarefa era averiguar qual o envolvimento dos alunos com este tipo de tarefas, pois não se sabia o nível de desempenho uma vez que era o primeiro contato com estas tarefas e em particular com o pensamento algébrico, porque, apesar de constar no programa do 1º ciclo, não tinha ainda sido abordado. Desta forma, e para facilitar a exploração desta tarefa foi fornecido aos alunos, na folha do enunciado, uma tabela, para que orientasse os alunos na sua resolução.

Esta tarefa tem, para além dos objetivos já abordados, o objetivo de descobrir um padrão através dos modos de visualizar os termos da sequência e de os relacionar. Logo, para a sua resolução utiliza processos de contagens, conceitos de ordem e comparação, relações numéricas e expressões numéricas.

Assim, como se pode observar na Figura 10, o primeiro processo de resolução desta tarefa recorre ao pensamento recursivo. Os alunos por observação da tabela veem que o número de morangos de cada figura é sempre mais dois do que o número de morangos da figura anterior. Uma vez que através deste raciocínio não é possível generalizar para qualquer termo n, é necessário descobrir um padrão entre os diversos termos para poder generalizar. Assim, recorrendo à visualização é possível traduzir três modos de ver que dão origem às seguintes expressões algébricas: 1+nx2; 1+2xn e n+(n+1), tal como se pode verificar na Figura 11, estas expressões generalizam o número de morangos para qualquer figura n. As expressões traduzem formas de "ver" diferentes mas onde se igualam nos resultados obtidos, ou seja são expressões algébricas equivalentes.

Nº da Figura	Nº de Morangos	
1	3	
2	5	+2
3	7	+2
4	9	+2
5	11	+2
…	…	
10	21	
15	31	

Figura 10 – Possível resolução da tarefa "Morangos em V" (1º exemplo)

Modo de ver 1	Modo de ver 2	Modo de ver 3
		
1 + 2	1+2x1	1+ 2
1 + 2 + 2	1+2x2	2+ 3
1 + 2 + 2 + 2	1+2x3	3+ 4
1+2+2+2+2	1+2x4	4+ 5
1+2+2+2+2+2	1+2x5	5+ 6
…	…	…
1 + n x 2	1 + 2 x n	n+ (n+1)

Figura 11 – Possível resolução da tarefa "Morangos em V" (2º exemplo)

A segunda tarefa escolhida foi *As Caixas de Corações* (Anexo 9), esta envolve conteúdos de geometria, nomeadamente, o volume, as faces do cubo e a visualização espacial. Desta forma, para resolver esta tarefa utilizam-se quer explicitamente, quer implicitamente estes conteúdos, pois, o objetivo da tarefa é descobrir quantos corações serão necessários colar em caixas cubicas que se juntam de cubos.

Assim, para perceber o padrão presente nesta sequência, visualiza-se os três termos apresentados. Organizam-se os dados numa tabela (Figura 12), para ser mais fácil de visualizar o padrão, usando desta forma, o pensamento recursivo. Logo, o termo 1 correspondente a um cubo que contém seis corações, o termo 2 correspondente a dois cubos que contêm dez corações. Havendo a diferença de 4 corações de um termo para o outro.

Número de caixas	Número de corações
1	6
2	10
3	14
4	18
5	22

+4
+4
+4
+4

Figura 12 – Possível resolução da tarefa "As Caixas de Corações" (1º exemplo)

Pode-se recorrer a dois processos para generalizar para qualquer termo n, sem recorrer ao raciocínio recursivo. Assim, o *primeiro processo* é traduzir o modo de visualizar na seguinte expressão algébrica: nx4+2. Ou seja, n representa o número de caixas, o 4 representa o número de corações, e o 2 representa dois corações que se encontram numa das faces das duas caixas laterais (Figura 13).

O segundo processo é traduzido pela expressão algébrica: (2x5)+(n-2)x4. Deste modo, o "2x5" diz respeito ao número de corações nas duas caixas laterias, ambas têm cinco corações e estão presentes em todos os termos. O n diz respeito ao número total de caixas, mas, como já foram contadas duas, com cinco corações, subtrai-se o 2, obtém-se então n-2 caixas. Depois, é só multiplicar por 4, que é o número de corações existentes nas caixas que se encontram no meio em contacto com as restantes (Figura 14).

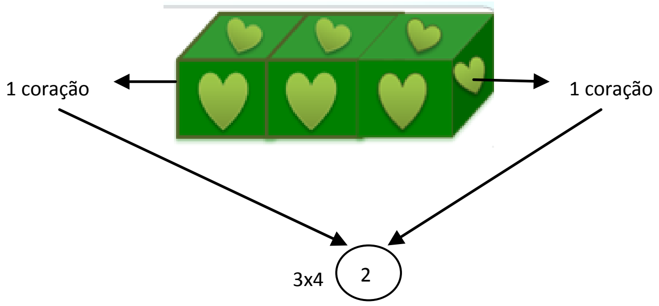


Figura 13 – Possível resolução da tarefa "As Caixas de Corações" (2º exemplo)

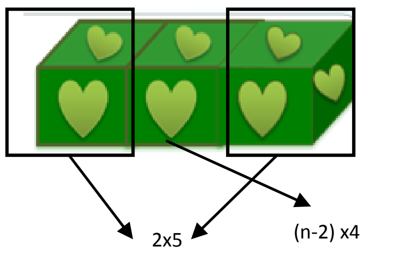


Figura 14 – Possível resolução da tarefa "As Caixas de Corações" (3º exemplo)

O que distingue *Os comboios de Polígonos* (Anexo 10) das anteriores é que envolve dois problemas num só, ou seja, tem como objetivo determinar o número total de palhinhas e também calcular o número de carruagens e o perímetro. Desta forma, esta tarefa envolve alguns dos conteúdos que estavam de acordo com o programa da disciplina para o 3º período, nomeadamente, o perímetro e a área, mas para além destes, ainda faz conexão com o conhecimento de polígonos (triângulos) e com os números pares e ímpares. Para se resolver a tarefa é necessário utilizar relações e expressões numéricas, assim como expressões algébricas, tal como nas tarefas anteriores.

Para relacionar e analisar o padrão presente nesta tarefa e visualizar as relações existentes entre os diversos temas, organiza-se a informação numa tabela (Figura 15). Observando a tabela facilmente se consegue preencher a tabela recorrendo ao pensamento recursivo. Estando sempre dependentes dos termos anteriores.

Número do comboio	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de carruagens (triângulos)	1	2	3	4	5	6	7	8
Perímetro	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de palhinhas	3	5	7	9	11	13	15	17

+2 +2 +2 +2 +2 +2 +2

Figura 15 – Possível resolução da tarefa "Os Comboios de Polígonos" (1º exemplo)

Analisando a tabela, verifica-se que o número do comboio é sempre igual ao número de carruagens. O perímetro é sempre mais um número que o número do termo anterior. O número de palhinhas anda sucessivamente de dois em dois, de termo para termo. Generalizando, o perímetro pode-se obter através da expressão algébrica: n+2, ou seja, n representa o número de comboios ou o número da figura, somando sempre dois, porque é o padrão que se encontra ao longo de todos os termos. Verificando isso na tabela (Figura 15) ao comparar as colunas correspondentes ao número de comboios com as do perímetro. Assim, para qualquer figura é possível determinar o perímetro sem ter de recorrer ao raciocínio recursivo.

Para efetuar a generalização para um número qualquer de palhinhas existem dois processos possíveis de ver para chegar à lei de formação. O *primeiro processo* é representado pela seguinte expressão: 2xn+1, nesta, o n é substituído pelo número de comboios, ou número da figura, isto porque, ao analisar a tabela (Figura 15) pode-se concluir que o número total de palhinhas é um número que pode ser representado através da multiplicação do número de comboios por 2, acrescentando 1, que será a palhinha que falta para chegar ao resultado. Como por exemplo, para o comboio número três, o total de palhinhas é 7, assim, como o número de comboios é 3, multiplica-se 2x3, obtendo o produto de 6, e adicionando a última palhinha, obtém-se o 7, o total de palhinhas para o comboio número 3 (Figura 16).

O segundo processo é traduzido pela expressão 3+(n-1)x2, ou seja, o 3, representa "as três palhinhas iniciais do primeiro comboio, às quais se vão acrescentando sucessivamente mais duas e mais duas" (Vale, et al., 2009), assim, uma vez que um dos comboios já está representado pelo 3, ao número total, representado por n, subtrai-se este, e esse total é multiplicado por 2, que são as duas palhinhas que são sucessivamente adicionadas (Figura 17).

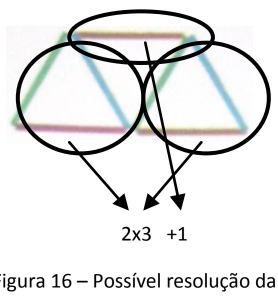


Figura 16 – Possível resolução da tarefa "Os comboios de Polígonos" (2º exemplo)

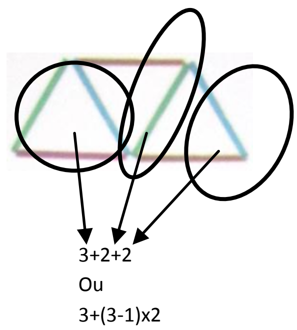


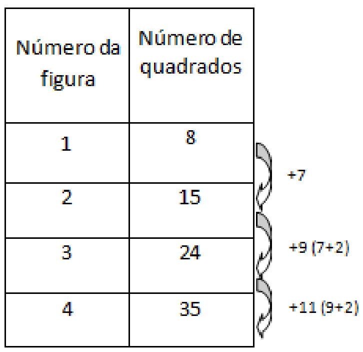
Figura 17 – Possível resolução da tarefa "Os comboios de Polígonos" (3º exemplo)

Com Quadradinhos foi mais uma tarefa (Anexo 11) que vai de encontra aos conteúdos que a turma estava a abordar na sala de aula, designadamente, a área. Envolve também conteúdos matemáticos que estão de acordo com a área e que já tinham sido abordados, ou seja, os polígonos. Isto, porque as figuras apresentadas utilizam polígonos (quadrados). Nesta tarefa os quadrados serão considerados a unidade de medida, pois, o objetivo principal desta tarefa é que os alunos descubram uma regra para determinar a área para qualquer termo n da sequência. No entanto, e como em todas as tarefas, é necessário recorrer a diferentes relações e a expressões numéricas e algébricas para conseguir responder às questões colocadas.

Para além de se poder visualizar o padrão através do pensamento recursivo que se visualiza, muito bem, se os dados estiverem em tabelas (Figura 18), e onde se utiliza sucessivamente o número de quadradinhos que aumentou no termo anterior mais dois quadradinhos, obtendo, a área do termo seguinte. Consegue-se, através de três processos diferentes, generalizar a área para qualquer figura n. Assim, o *primeiro processo* diz respeito à expressão algébrica (n+1)x(n+3), descobrindo qual o número de quadrados para qualquer termo, ou seja, a sua área. Nesta expressão, o n é traduzido pelo número da figura. A primeira expressão: (n+1) é a tradução da coluna esquerda, vista na vertical, que é a junção do número da figura com um quadradinho da última coluna. A segunda expressão: (n+3) é visualizada horizontalmente, sendo a junção do número de quadradinhos da figura com mais três. Estas duas expressões multiplicadas dão origem ao produto total de quadradinhos da figura, obtendo a área do retângulo formado (Figura 19).

O *segundo processo* é representado pela expressão n+[(n+1)x(n+2)]+1, também nesta, o n significa o número da figura. Esta expressão é construída através da visualização do número da figura, na primeira coluna da esquerda na vertical. Seguidamente, visualiza-se um retângulo, que diz respeito à expressão: [(n+1)x(n+2)]. Assim, o n+1, corresponde ao comprimento, ou seja, visto na vertical, que diz respeito ao número da figura mais 1. A expressão n+2 corresponde à largura do retângulo, sendo vista na horizontal, e formulada através do número da figura mais 2 quadradinhos. A adição do 1 no final de toda a expressão corresponde a um quadradinho, na última coluna, na parte superior direita (Figura 20).

O *terceiro processo* é traduzido através da expressão algébrica n+(n+1xn+1)+(n+2). Logo, mais uma vez, o n é expresso pelo número da figura. Assim sendo, o primeiro n corresponde à primeira coluna esquerda, vista na vertical. A expressão (n+1xn+1) foi traduzida através da visualização de um quadrado. Assim, tal como o cálculo da área deste indica, multiplica-se lado vezes lado, ou seja, o número da figura mais um, tanto na vertical, como na horizontal. A última expressão n+2 diz respeito à última coluna, visto da esquerda para a direita, sendo a primeira da direita. Esta é visualizada através do número da figura mais dois quadradinhos, na vertical (Figura 21).



Número da figura	Número de quadrados
1	8
2	15
3	24
4	35

Figura 18 – Possível resolução da tarefa “Com Quadradinhos” (1º exemplo)

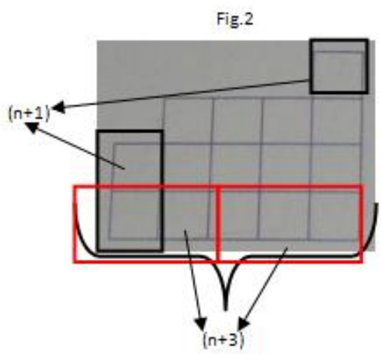


Figura 19 – Possível resolução da tarefa “Com Quadradinhos” (2º exemplo)

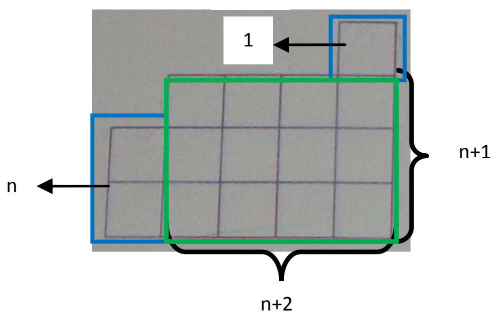


Figura 20 – Possível resolução da tarefa “Com Quadradinhos” (3º exemplo)

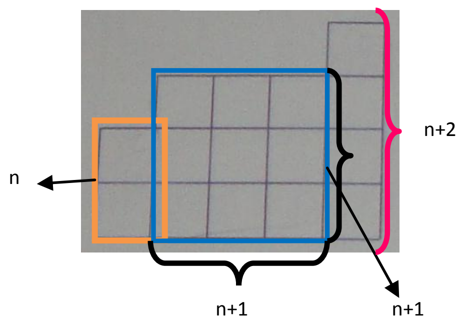


Figura 21 – Possível resolução da tarefa “Com Quadradinhos” (4º exemplo)

A tarefa *Regiões no Retângulo* (Anexo 12) é diferentes das restantes, no sentido em que utiliza implicitamente e explicitamente os conteúdos correspondentes aos números racionais, especificamente, as frações; pois é utilizado um retângulo que será dividido em retângulos mais pequenos de termo para termo. Para além deste conteúdo ainda envolve a área e conhecimentos de polígonos, porque, o objetivo da tarefa é determinar o número de regiões correspondentes a cada figura, ou seja, a área da figura envolvendo retângulos. Para determinar a lei de formação de qualquer termo é necessário utilizar e recorrer a expressões numéricas e expressões algébricas.

Como expetativas para esta tarefa, espera-se que os alunos utilizem raciocínio recursivo, onde se avança de três em três sucessivamente de termo para termo (Figura 22).

Número da figura	Número de regiões	
1	4	+3
2	7	+3
3	10	+3
4	13	

Figura 22 – Possível resolução da tarefa "Regiões no retângulo" (1º exemplo)

Como processos possíveis para chegar à generalização, recorrendo à visualização, existem dois. O *primeiro processo* é traduzido pela expressão nx3+1. O n diz respeito ao número da figura e corresponde ao número de vezes que o 3 será repetido, o 3 são as três regiões que se visualizam sempre em todos os termos e o 1 é a última região do canto superior direito (Figura 23).

O *segundo processo* é representado pela expressão (n-1)x3+4. Tal como no processo anterior o n corresponde ao número da figura. No entanto, para perceber a expressão (n-1) é necessário perceber primeiro o 4, assim, este equivale à última região em que o retângulo inicial é dividido. Deste modo, o n, o número da figura, identifica também, a quantidade de vezes que o retângulo inicial será dividido em conjuntos de regiões. Logo, como o 4 equivale a um retângulo dividido em 4 regiões, a expressão (n-1) irá expressar o último "conjunto" de três regiões dos restantes retângulos (Figura 24).

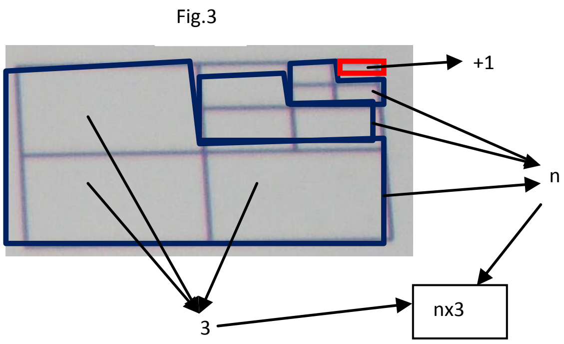


Figura 23 – Possível resolução da tarefa “Regiões no retângulo” (2º exemplo)

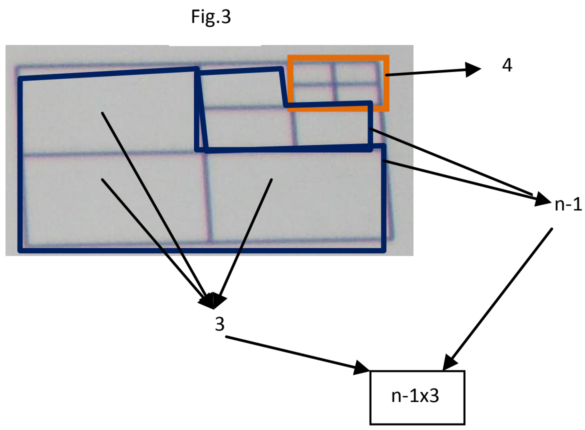


Figura 24 – Possível resolução da tarefa “Regiões no retângulo” (3º exemplo)

Os Z (Anexo 13), foi a tarefa escolhida para a ficha de avaliação. Uma vez que a ficha de avaliação incidia nos conteúdos de áreas e perímetros, esta tarefa envolve um desses conteúdos, ou seja, a área, já que o principal objetivo desta tarefa é descobrir qual o número de quadradinhos necessários para o termo n, logo, qual a lei de formação, geral, para descobrir a área de qualquer figura. Esta tarefa é bastante similar à tarefa *Com Quadradinhos*, apenas muda a forma, porque os objetivos e os conteúdos envolventes são os mesmos. Desta forma, para além de abordar a área, também, recorre ao conceito e propriedades de polígonos, o recurso a expressões numéricas e algébricas para se poder generalizar para qualquer termo.

Tal como em todas as tarefas até agora apresentadas, os alunos também podem recorrer ao raciocínio recursivo (Figura 25), ou seja, observar os termos anteriores, descobrindo o padrão presente na relação de termo para termo. No entanto, como o objetivo é formular uma regra geral, identificam-se dois processos possíveis para que isso se suceda.

Número da figura	Número de quadrados
1	2
2	5
3	10
4	17
5	26

+3
+5 (3+2)
+7 (5+2)
+9 (7+2)

Figura 25 – Possível resolução da tarefa “Os Z” (1º exemplo)

O *primeiro processo* trata-se de visualizar as sequências apresentadas e os seguintes termos desenhados. Constata-se que os termos, têm duas filas, inferior e superior, onde o número da figura é igual ao número de quadradinhos de cada uma dessas filas. Assim, estas duas filas, quer a inferior quer a superior, de cada termo, são representadas pela expressão 2xn. Depois de traduzir a visualização das duas filas, que correspondem às margens da figura, para uma expressão algébrica, falta analisar o interior da imagem. Desta forma, o interior irá formar um quadrado, logo, para saber a área desta figura basta aplicar a fórmula $\ell \times \ell$. No entanto, o lado de qualquer quadrado obtém-se através da expressão n-1, porque, se ao número da figura subtrairmos 1, e esse resultado for multiplicado por outro número igual, obtém-se o produto que dá origem à área do quadrado, ou seja, o interior da figura. Assim, a expressão geral que traduz o número total de quadradinhos para o termo n ou a área, é 2xn+[(n-1)x(n-1)] (Figura 26).

O *segundo processo* trata-se de adaptar a figura a um retângulo, aplicando a fórmula para calcular a área de um retângulo $c \times \ell$. Descobrindo a relação existente entre o número da figura e o número de quadradinhos necessário para o comprimento e o número de quadradinhos necessário para a largura, pode-se utilizar então a fórmula anterior. Neste caso, a expressão que permite chegar ao número necessário de quadradinhos para qualquer termo é (n+1)x(n-1). Portanto, o n equivale ao número da figura, se a ele adicionarmos 1, estamos a descobrir o comprimento (n+1), se a ele subtrairmos 1, estamos a abordar a largura (n-1). No final de calcular a área do retângulo sobram ainda dois quadradinhos, um no canto superior esquerdo e o outro no canto inferior direito. Desta forma a expressão geral que permite descobrir a área para a figura n, ou o número total de quadradinhos que forma essa imagem é (n+1)x(n-1)+2, esta relação é possível de visualizar na Figura 27.

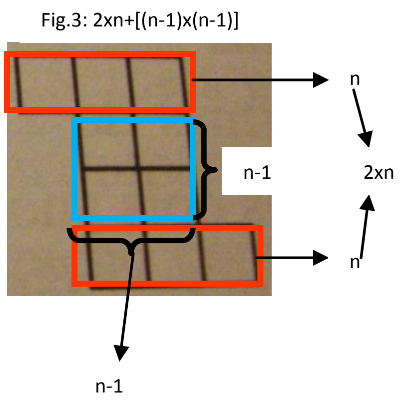


Figura 26 – Possível resolução da tarefa “Os Z” (2º exemplo)

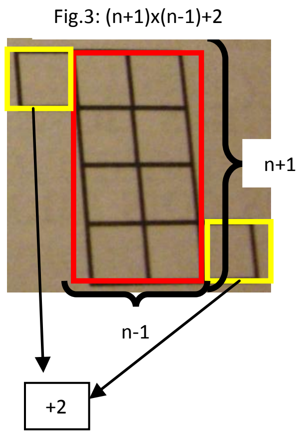


Figura 27 – Possível resolução da tarefa “Os Z” (3º exemplo)

2.3. Os Problemas

A tarefa *A Moldura* (Anexo 14) é considerada um problema de padrão, pois também ele envolve uma sequência, mas são os alunos que têm de descobrir essa sequência e descobrir por eles próprios o padrão, revendo as propriedades e relações da figura para chegar ao resultado esperado (Vale, 2012).

Esta tarefa envolve conteúdos ligados às propriedades das operações, interligando também o perímetro, porque, esta tem como objetivo descobrir quantos azulejos são necessários para construir a moldura de qualquer espelho. Logo, o que se pretende é descobrir o número de azulejos, da moldura à volta do espelho, para qualquer espelho com a forma retangular. É necessário ainda ter conhecimentos acerca dos polígonos, saber distinguir principalmente retângulo de quadrado, pois a moldura é retangular, mas os azulejos são quadrados. Para concluir esta tarefa é necessário envolver simultaneamente os seguintes tópicos: termos de uma sequência, termo geral, representação, expressões numéricas e algébricas.

Apesar de ser uma tarefa de livre exploração, à qual os alunos têm de investigar sozinhos sem nenhuma “pista” acerca do padrão a seguir, há duas expetativas de solução para esta tarefa.

O *primeiro processo* é associar de imediato à fórmula para calcular o perímetro do retângulo, ou seja, a soma de todos os lados, comprimento e largura, ou seja, 2x (cxh). No entanto, ao fazer essa soma, está a adicionar-se 4 quadradinhos a mais, que são os quadrados representados nos vértices da imagem, logo, a expressão que traduz este raciocínio e que permite aplicá-lo a qualquer espelho é 2xc+2xl-4 (Figura 28).

No *segundo processo* utiliza-se outra fórmula equivalente à anterior, assim, a expressão que traduz simbolicamente a imagem é 4+2x(c+l). Deste modo o 4 representa os quatro quadradinhos nos vértices do retângulo. O 2 significa que se multiplica o valor do comprimento e da largura duas vezes, mas, o comprimento e a largura correspondem apenas aos quadradinhos do meio, entre os quatro vértices (Figura 29).

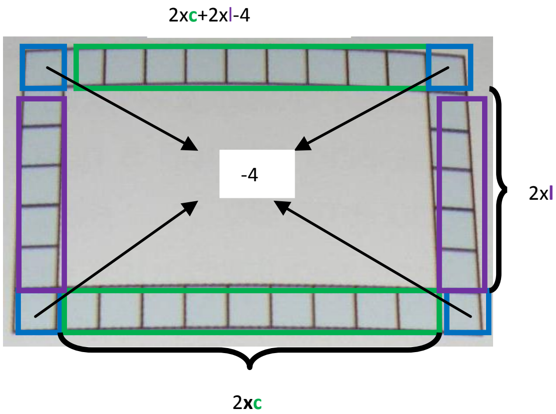


Figura 28 – Possível resolução da tarefa "A Moldura" (1º exemplo)

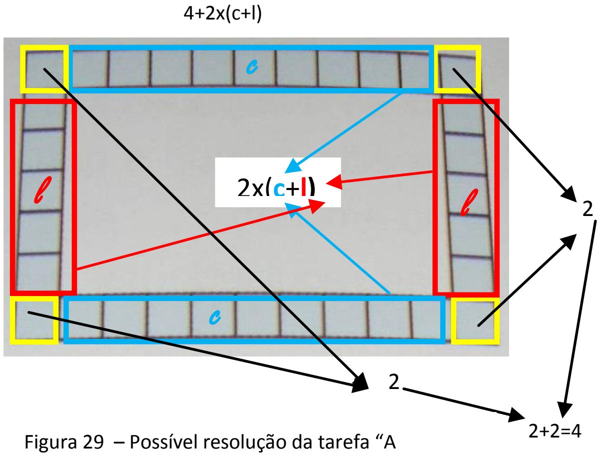


Figura 29 – Possível resolução da tarefa "A Moldura" (2º exemplo)

A tarefa *Na Cantina* (Anexo 15) é parecida à tarefa de *As Caixas de Corações*, a diferença é que esta não trabalha com volume e sólidos geométricos (cubo), mas sim com figuras planas, os polígonos. Tendo ainda como diferença, o facto de esta não apresentar nenhuma sequência, logo, os alunos têm de interpretar o enunciado e a partir dele fazer as suas representações e descobrir o padrão. Deste modo, o objetivo desta tarefa é encontrar uma relação entre o número de mesas e o número de alunos, determinando uma regra geral para qualquer número de mesas saber logo qual o número de alunos, sem terem de desenhar ou recorrer ao pensamento recursivo.

Esta tarefa envolve, para além do conteúdo dos polígonos, o perímetro e ainda uma situação da vida quotidiana que podia ser um problema que poderia acontecer na cantina da escola. Para concluir o objetivo desta tarefa, os alunos necessitam de recorrer a expressões numéricas e a expressões algébricas e ainda utilizar como estratégias, desenhos ou esquemas de modo a compreenderem o padrão presente na tarefa.

Desta forma, através do raciocínio recursivo é possível visualizar a existências de um padrão de repetição sucessivo de dois, ou seja, ao avançar de termo para termo adiciona-se sempre mais dois ao termo anterior para obter o seguinte (Figura 30). Assim, sempre que se aumenta uma mesa, podem sentar-se sempre mais duas pessoas.

Número de mesas	Número de alunos	
1	4	
		+2
2	6	
		+2
3	8	
		+2
4	10	

Figura 30 – Possível resolução da tarefa “Na Cantina” (1º exemplo)

No entanto, para além da tabela, os alunos podem recorrer ao desenho como resposta, utilizando na mesma o pensamento recursivo, utilizando a “informação fornecida no enunciado, de modo a ganhar uma maior consciência das regras de colocação das mesas e da localização das pessoas. A resposta às questões surge baseada exclusivamente nos dados geométricos” (Alvarenga, 2006, p.59) (Figura 31).

O processo de generalização previsto para esta tarefa, depois de se recorrer ao desenho das primeiras quatro mesas é traduzido pela expressão 2xn+2. Assim, antes de generalizar recorre-se ao elemento figurativo, visualizando a “construção” do padrão e só depois de o analisar é que se pode conjeturar. Logo, o n é substituído pelo número de mesas, que pode ser associado ao perímetro, no entanto, apenas se visualiza na horizontal. Desta forma, um dos lados horizontais das mesas, vão conter o mesmo número de pessoas que o número de mesas, mas, os dois lados justapostos, horizontais, vão conter o dobro do número de pessoas que o número de mesas. Os dois lados horizontais, correspondem à expressão 2xn. A adição do 2 representa os dois lados que faltam somar para obter o perímetro de toda a mesa, e da mesma forma, o número total de pessoas, correspondendo aos dois lados verticais, opostos, do conjunto de mesas (Figura 31).

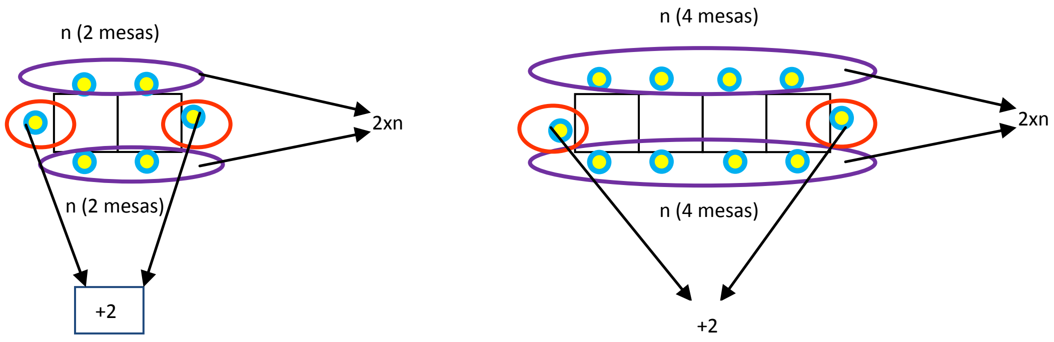


Figura 31 – Possível resolução da tarefa "Na Cantina" (2º e 3º exemplo)

Em síntese, escolheram-se tarefas segundo determinados critérios para implementar na turma e estas foram organizadas segundo o modelo da proposta didática e exploradas consoante o modelo das cinco práticas. Tudo isto com o objetivo de tirar o melhor proveito das tarefas de padrões e poder desenvolver a capacidade de "ver" e o pensamento algébrico.

Com este conjunto de tarefas pretendia-se deixar os alunos livremente a explorá-las para perceber como iriam explicar a sua maneira de pensar, ou seja, as suas representações. No entanto, para se conseguir avaliar e perceber as representações dos alunos é necessário ter algum tipo de expetativa para as respostas que possam surgir para mais facilmente se poder avaliar o trabalho dos alunos. A exploração em grande grupo das tarefas foi um modo de verificar-se a solução, mas também, com o intuito de os alunos serem confrontados com outros modos de chegar à mesma solução.

CAPÍTULO 5 – OS CASOS

Este capítulo dedica-se a descrever os alunos-caso neste estudo, assim como o desempenho nas tarefas da experiência didática. Inicia-se porém por uma caracterização da turma, focando-se na sua ligação com a matemática e analisando-se ainda o impacto que as tarefas tiveram.

1. A Turma

1.1. Caracterização e Relação com a Matemática

A turma do 5º ano, na qual os alunos-caso estavam integrados, era heterogénea. Era uma turma, inicialmente, calma e bem comportada, no entanto, ao longo do tempo, mudou, tornando-se uma turma instável, inquieta e desrespeitadora das regras de sala de aula. Apenas os alunos mais aplicados é que se empenhavam e realizavam diariamente os trabalhos de casa. A participação dos alunos era ativa, mas nem sempre a mais oportuna, perturbando os colegas que queriam participar positivamente. Às vezes, surgiam alguns comentários de alunos para outros, gerando alguma confusão.

Apesar de não se ter efetuado nenhum inquérito à turma acerca do gosto pela disciplina de matemática, verificou-se pelas classificações nesta disciplina e pelos comportamentos dos alunos durante as aulas, que como consequência do referido anteriormente alguns alunos não se empenhavam nos trabalhos de casa, nas tarefas propostas na sala de aula, revelando ao longo do desempenho das diferentes tarefas falta de estudo. Os alunos com mais dificuldades apenas se empenhavam e tentavam compreender temporariamente os conteúdos lecionados na sala de aula.

A primeira impressão dos alunos referente à resolução de problemas de padrão foi negativa, pois, não sabiam como resolver o problema. Na primeira tarefa de padrão apresentado, *Morangos em V* toda a turma ficou em silêncio, sem saber como o resolver, prestando, então, atenção às orientações da professora para a sua resolução. Apenas um aluno conseguiu chegar a uma generalização.

À medida que se iam implementando as restantes tarefas, a maior parte dos alunos interessava-se, tentando resolver as questões. No entanto, ao chegar à alínea de efetuar a generalização distante já não conseguiam. Alguns trocavam ideias, ficando próximos da generalização, mas, como os outros alunos perdiam o interesse pela tarefa acabavam por se distrair, não acabando a tarefa por falta de tempo, pois a aula tinha de avançar com a exploração das tarefas.

Durante a ficha de avaliação, alguns alunos da turma conseguiram desenvolver o seu pensamento, demonstrando isso na tarefa proposta, pois, conseguiram chegar individualmente à sua resolução, ficando bastante contentes e afirmando que tinha sido a primeira vez que conseguiram realizar a atividade do "explicar o seu pensamento" por escrito. Mas, apesar desses progressos, outros não conseguiram generalizar, sendo estes os alunos com mais dificuldades, e um ou dois nem sequer tentavam realizar as questões.

Estas atitudes refletem o comportamento e desinteresse de alguns alunos da turma, quer na disciplina de matemática, quer ao nível da própria aprendizagem em geral.

1.2. Exploração das Tarefas

Apesar de não terem sido utilizados materiais didáticos na resolução e exploração destas tarefas na sala de aula, estas foram bastante motivantes para toda a turma, porque lhes permitiu sair da rotina e da aplicação sistemática de tarefas mecanizadas, que apenas exigiam o conhecimento de regras de cálculo. Logo, estas tarefas, de exploração e problemas, abordam e interligam diversos conteúdos, apelando também ao desenvolvimento de várias capacidades, nomeadamente, as capacidades transversais presentes no programa de matemática, já referido anteriormente.

Desta forma, as atividades foram vistas de forma positiva, no entanto, o resultado não foi o esperado para a turma em geral, pois alguns alunos não conseguiram chegar às expetativas propostas.

Vejamos o desempenho da turma nas tarefas de *contagens*. A tarefa *Mais Flores* foi a primeira com a qual a turma teve contacto. A opinião geral é que esta tarefa foi muito fácil. A observação que a maior parte dos alunos fez de imediato foi a representação do número 5, ou seja, indo de encontro às expetativas esperadas, representado pela expressão 5+5+5. No entanto, a turma não conseguiu representar o seu modo de "ver" numa expressão, pois, nunca tinham tido contacto com este tipo de tarefas antes.

Morangos em W foi visualizada logo de seguida à anterior, foi igualmente fácil e os alunos corresponderam às expetativas esperadas, conseguindo contar rapidamente os morangos.

Discos foi proposta para a ficha de avaliação. As expetativas esperadas foram todas superadas. A maior parte da turma conseguiu "ver" três modos diferentes e representá-los segundo uma expressão.

Passar-se-á agora para o desempenho da turma nas tarefas de com *sequências.*

A tarefa *Morangos em* V não atingiu os objetivos esperados, pois quando se questionou a turma sobre: "Como podem de forma rápida contar os morangos em cada uma das figuras?", "Como visualizam esse modo de contar os morangos?". Todos os alunos ficaram a olhar em silêncio para a investigadora/professora. Só depois de se insistir bastante, de se dar início à exploração da tarefa e explicar uma possível forma de chegar à resolução, é que um aluno levantou o dedo e quis explicar o seu método de pensar e visualizar, estando correto o raciocínio deste aluno. Simultaneamente à exposição do seu pensamento, dois colegas, que estavam a seguir o seu raciocínio mostraram-se participativos na tentativa de o ajudar a concluir o seu pensamento.

As Caixas de Corações, apesar de ter sido a segunda tarefa a ser implementada, revelou, ainda, grandes dificuldades nos alunos em geral. Desse modo, apenas três ou quatro alunos conseguiram realizar as questões da tarefa. Ao longo da exploração do problema, foi possível verificar a existência de alunos desinteressados e de alunos que, apesar das suas dificuldades, tentavam realizar a tarefa em grupo, trocando algumas ideias entre eles. Assim, verificou-se que num grupo de quatro alunos, um deles estava a explicar que o número quatro tinha alguma relação com o problema, no entanto, não sabia qual era, ficando a discutir e a tentar encontrar a solução. Os alunos que conseguiram generalizar vieram ao quadro explicar o seu raciocínio, para que a restante turma compreendesse como pensaram e assimilasse as diversas estratégias, como recurso para as próximas tarefas.

A tarefa *Os Comboios de Polígonos* teve sucesso perante os alunos. Ficaram bastante motivados por terem de construir “comboios” mentalmente e alguns recorreram mesmo ao desenho. A descoberta do número de carruagens e do perímetro foi o mais fácil para a turma, no entanto, descobrir uma relação que levasse à generalização do número de palhinhas para qualquer comboio foi o mais complexo e difícil de alcançar para a maior parte da turma. O momento final, de corrigir e explorar as várias estratégias utilizadas pelos alunos, é sempre o que mais ajuda os alunos, principalmente, aqueles que têm mais dificuldades. Porque é nesta fase que percebem como generalizar e quais as estratégias que os colegas utilizaram para conseguirem encontrar a solução.

Com Quadradinhos foi a primeira tarefa a envolver o conceito de área. Os alunos aderiram bem, na medida em que, em geral, desenharam os termos seguintes corretamente. Conseguiram visualizar a maneira de construir as figuras, mas, à imagem do que se passou nas tarefas anteriores, a maioria dos alunos não conseguiu generalizar. Conseguiam ver a figura, mas não conseguiam explicar por escrito utilizando uma representação que fosse um desenho ou outro modo de descobrir a área para qualquer figura. Mais uma vez, só através da explicação oral e visual dos colegas é que conseguiram perceber e então generalizar.

A tarefa *Regiões no Retângulo* envolvia o conteúdo de frações. A grande maior parte da turma percebeu a relação entre cada termo, desenhando o seguinte. Conseguiram ainda perceber que o número 4 (última região dos termos) era importante para a resolução do problema. Houve um grupo de seis alunos que estava a discutir ideias entre eles. Este foi um dos problemas em que os alunos aproximaram-se mais da solução, mas, a grande dificuldade continuava a ser a mesma das outras tarefas anteriores. Só depois de ouvirem a explicação dos colegas é que resolveram a tarefa, os restantes alunos conseguiam generalizar e perceber as diversas estratégias para encontrarem a mesma solução.

Os Z foi proposta para a ficha de avaliação e foi uma das tarefas mais gratificantes, porque anteriormente, se alguns alunos que não conseguiam descobrir uma generalização e descreve-la recorrendo a diferentes representações, nesta tarefa conseguiram-no. Foi, também, motivante para esses alunos, pois um deles afirmou com grande alegria e entusiasmo: "foi a primeira vez que consegui *stora*, tive tudo certo". Apenas um ou dois alunos não responderam a nenhuma das questões, revelando o mesmo desinteresse por todas as tarefas e atividades dentro da sala de aula.

Por fim ver-se-á o desempenho da turma nas tarefas designadas por *problemas.*

A Moldura foi a tarefa mais complexa de implementar e da turma. A dificuldade começou pela compreensão do problema e identificar o que se pretendia. Isto porque não era dada a sequência, logo, tinham de ser os próprios alunos a explorar as diversas formas de chegarem a essa sequência. Desta forma, esta tarefa foi realizada a pares para se tornar mais fácil de explorar e trocar ideias. No entanto, devido ao seu grau de complexidade e ao facto de os alunos não estarem habituados a estes problemas, poucos conseguiram realizar a tarefa na sua totalidade. Mesmo a questão que pedia para desenhar várias molduras de diversos tamanhos, poucos foram os estudantes que conseguiram fazê-lo. Logo, nesta tarefa tornou-se ainda mais relevante a última fase de exploração e correção da tarefa, para que a turma conseguisse entender as várias formas de conseguir realizar e explorar o problema.

A tarefa *Na Cantina* foi a que teve mais êxito e tendo mais sucesso que a tarefa da ficha de avaliação. Apesar de a turma ter de interpretar o enunciado e a partir dele descobrir e realizar as questões do problema, esta foi concluída muito rapidamente, terminando em menos tempo que todas as outras tarefas. Duas das alunas com algumas dificuldades conseguiram generalizar e chegar à conclusão corretamente. A maior parte recorreu ao desenho para representar as mesas e assim conseguirem visualizar o padrão subjacente. Todos queriam explicar o modo como pensaram. Houve um reforço positivo da parte da professora com o objetivo de valorizar o trabalho efetuado, terem tentado e conseguido chegar à solução.

2. A Mariana

2.1. A Mariana como Aluna

A Mariana é uma aluna participativa, com intervenções positivas e oportunas, é possivelmente a melhor aluna da turma. É uma aluna inteligente e atenta, é cumpridora das regras de sala de aula, sendo, também muito prestativa em ajudar os colegas com maiores dificuldades. É tímida, ficando envergonhada quando está a explicar para toda a turma, questionando o professor(a) quase sempre: “tem mesmo de ser?”. Faz sempre os trabalhos de casa e apesar de ser sociável prefere trabalhar inicialmente individualmente, trabalhando/ajudando os colegas no final. Esta aluna por vezes revela não apreciar muito o barulho que a turma realiza durante as aulas, pois sente que este prejudica a sua aprendizagem.

A relação da Mariana com a Matemática é boa, pois a Mariana gosta desta disciplina, porque ela afirma que apesar das tarefas serem difíceis gosta de fazer “contas”, declara que só sente dificuldades em alguns conteúdos, tal como as frações. Acha a matemática difícil mas, simultaneamente divertida. Esta aluna tem a noção de que quase ninguém gosta da matemática, porém, considera que esta disciplina “é importante, porque, para qualquer profissão precisamos da matemática, para medir coisas (…) e no dia-a-dia” (EMA1). Esta revelou que as aulas de matemática são interessantes de vez em quando, mais propriamente quando são diferentes do habitual, ou seja, quando se vê algo no computador ou se realizam jogos para se motivar para aprender. Desta forma, a Mariana sugere que as aulas tenham mais jogos, principalmente nos conteúdos que ela tem mais dificuldades. A aluna confessou que estuda matemática todos os dias em casa com o apoio da mãe e da irmã, “elas fazem contas e exercícios nos cadernos e eu respondo aos exercícios” (EMA1). Ela acha que a matemática que aprendeu no 1ºciclo é igual à que está a aprender no 5º ano, mas "mais rigorosa, mais ao pormenor". É uma das poucas alunas que consegue fazer a "transposição" do seu raciocínio uma expressão algébrica.

2.2. A Mariana e a Experiência Didática

Depois de se conhecer um pouco acerca desta aluna, esta secção pretende analisar o trabalho desenvolvido pela mesma ao longo da resolução de todas as tarefas implementadas na sala de aula, focando-se na comunicação utilizada. Pretende-se analisar os conceitos matemáticos, as estratégias e representações utilizadas, seguindo o sistema de representação defendido por Bruner por ser o mais global, entre outros aspetos relevantes para o estudo.

2.2.1. A Exploração das Tarefas

Ao longo de todas as tarefas a Mariana não demonstrou qualquer espécie de dúvida relativamente à incompreensão do enunciado do problema, percebendo o que cada tarefa pedia. Em geral a aluna tentava sempre realizar as tarefas sozinha sem pedir apoio ou ajuda, logo em seguida ao terminar o seu trabalho virava a folha do enunciado para baixo de modo a que os seus colegas de mesa não conseguissem ver, pois segundo a alunos copiar é "mau".

Uma vez que a aluna revelou nunca ter tido experienciado este tipo de tarefas, na sua resolução não apresentou grande variedade de estratégias de resolução de problemas. A mais comum e devido à tipologia de problemas foi a descoberta de um padrão, apresentando mais duas estratégias diferentes em duas tarefas, uma delas foi o recurso ao desenho para poder compreender a estrutura do padrão. Porque essa tarefa (na cantina) não apresentava a sequência, tendo de ser a Mariana a descobri-la e a investigá-la. A outra estratégia a que recorreu foi a uma lista organizada com os dados do problema (*As Caixas de Corações*), isto porque foi uma das primeiras tarefas que a

Mariana tinha de realizar, e recorreu a esta estratégia como forma de a ajudar a ver o padrão (pensamento recursivo) e a ajudar a generalizar.

A Mariana ao resolver as tarefas seguia sempre a ordem que era proposta pelo enunciado de cada uma delas, conseguindo responder a todas as questões sem necessitar de realizar tentativas para chegar à solução. Poucas foram as vezes em que a aluna elaborou vários exemplos para testar a sua conjetura, no entanto, quando tinha a certeza apagava-os e apenas ficava um. Numa das tarefas implementadas a Mariana utilizou os termos já apresentados para conseguir generalizar. Ao chegar à fase da discussão, onde eram expostas várias formas de pensar, a Mariana era uma aluna que estava sempre atenta ao que os seus colegas diziam para conseguir perceber as várias formas de chegar à mesma solução, afirmando: "quando eles diziam a resolução deles eu via que afinal era mais fácil do que eu achava" (EMA2), revelando ainda que não esperava que houvesse mais que uma solução: "achava que só havia uma e que nunca ia lá chegar" (EMA2). Na tarefa *As Caixas de Corações* a Mariana não conseguiu generalizar, contudo quando um dos seus colegas explicou a forma que fez e visualizou para chegar à resposta a Mariana conseguiu, em diálogo com o colega construir a expressão algébrica no quadro que traduzia o pensamento do colega. Pois, o colega estava com dificuldades em elaborar a expressão, apenas explicou a forma de "ver" os termos e continuar a sequência. A explicação do professor é também relevante na face da discussão, porque, segundo a Mariana, alguns "alunos ficavam sem perceber estas tarefas e podia às vezes sair num teste ou qualquer coisa e eles não percebiam nada" (EMA2).

A Mariana quando questionada sobre o que achou mais difícil ao longo de todas as tarefas respondeu que era chegar até à expressão e explicar o modo como a determinar, afirmando: "fazer por desenhos conseguia, depois escrever como é que cheguei lá era para mim mais complicado" (EMA2).

A Mariana revelou gostar destas tarefas porque eram entusiasmantes, pois fugia da rotina de só exercícios realizados na sala de aula, confessando também que estas tarefas têm "um bocado de tudo", referindo-se à matemática, porque tem de se "aprender a achar uma fórmula e não é só estudar aquela matéria que o professor dá" e tinha de ser saber a matemática já aprendida nas aulas anteriormente, sugerindo a exploração destas tarefas em grupos de pares, porque um grupo muito grande conduziria a muito barulho. No entanto diz entender que as tarefas devam ser realizadas individualmente para que o professor consiga perceber se o aluno consegue chegar à resposta.

2.2.2. As Representações e a Comunicação

Contagens. A Mariana revelou interesse por este tipo de tarefas expressando na entrevista a vontade de continuar a descobrir mais formas de contar, e que ia conseguir "fazer melhor" quando voltar a realizar este tipo de tarefas.

As tarefas *Mais Flores* e *Morangos em W* foram as primeiras a serem implementadas na turma, deste modo, a sua exploração foi realizada em grande grupo para todos os alunos e não centralizada na sua exploração individual. Contudo, esta aluna foi uma das primeiras a demonstrar o seu *subitizing* em ambas as tarefas de contagens, não demonstrando qualquer dúvida na exploração das mesmas, depois de ter sido explicado pela professora.

Discos foi a tarefa de contagens, presente no teste, tinha como objetivo descobrir uma expressão numérica que traduzisse um modo rápido de contagem e consequentemente ligado com os diferentes modos de ver essa contagem. Esta aluna foi a que apresentou as expressões mais elaboradas.

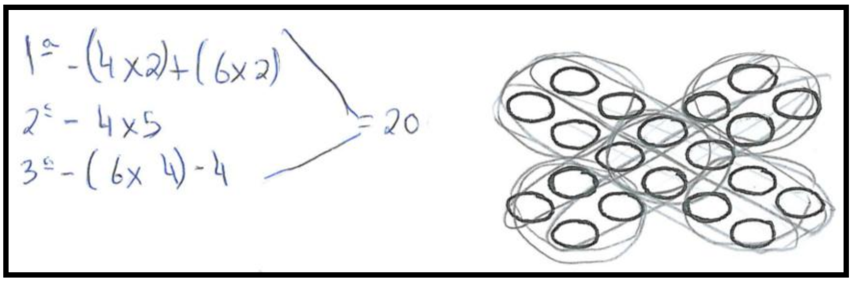


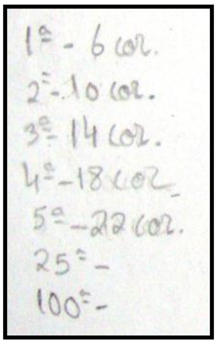
Figura 32 – Resolução da Mariana para a tarefa *Discos*.

Como se pode verificar na imagem (Figura 32) através da primeira expressão a aluna vê grupos de dois, mas, agrupa-os, vendo quatro grupos de dois discos que serão as pontas e seis grupos de dois discos que serão a parte do meio da figura. A segunda expressão não traduz o que a Mariana viu, que terá sido cinco grupos cada um com quatro discos, e não quatro grupos com cinco discos tal como a expressão o indica. A terceira tradução do seu modo de "ver" exprime um raciocínio mais complexo. Ela viu quatro linhas com seis discos que se sobrepõem 4x6 e depois retirou os quatro discos que contou duas vezes. Apesar de uma vez mais escrito 6x4 em vez de 4x6. Assim, a aluna compensa o seu raciocínio, acrescentando valores de um lado e retirando essa compensação do outro lado. A aluna revelou na entrevista a noção de ter elaborado esta expressão diferente da dos seus colegas, tendo a ideia de que essa estava errada: "(…) E eu fiz diferente porque eu contei os discos 6 e depois é que fiz a minha forma e reparei que tinha corrido mal" (EMA2).

Sequências de Crescimento. Quanto às tarefas de sequências a Mariana confessou que nunca as tinha elaborado antes e que gostou de as fazer, que não era comum realizar essas tarefas na sala de aula, pois, como foi referido durante as aulas apenas realizavam exercícios sobre a matéria, estas tarefas foram consideradas pela aluna as mais fáceis de elaborar ao longo da proposta didática.

Como já foi referido anteriormente, *Morangos em V* (Anexo 8) foi a primeira a ser implementada foi realizada em grande grupo, a Mariana não conseguiu responder a nenhuma das alíneas do problema, pois, nunca tinha realizado nenhuma tarefa deste género e sentiu-se completamente perdida. Assim, a resolução desta tarefa teve que ser realizado em grande grupo com toda a turma, no quadro explicitando o objetivo de cada questão.

As Caixas de Corações foi a segunda tarefa (Anexo 9) da proposta didática, a aluna já tinha adquirido alguma autonomia para a realização da tarefa. Assim, conseguiu relacionar corretamente o número das caixas com o número de semanas, conseguindo responder às alíneas 1 e 2. Então de imediato um cubo tem seis fases, logo, seis autocolantes. Para esta alínea recorreu a uma representação icónica. Mas, apesar das duas primeiras alíneas estarem corretas, na terceira revelou dificuldades. Recorrendo a representações simbólicos e não conseguindo ultrapassar o pensamento recursivo e descobrir o número de corações para as 25 caixas e para as 100 caixas (Figura 33).



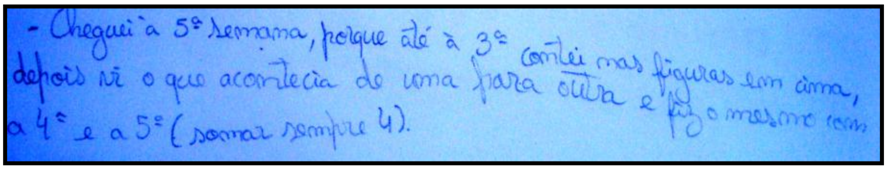


Figura 33 – Resolução da Mariana para as alíneas 3 e 4 da tarefa *As Caixas de Corações*.

Na última alínea onde a Mariana tinha de explicar o seu raciocínio, esta recorreu à linguagem natural, tentando descrever a sua forma de "ver" tendo utilizado um raciocínio recursivo (Figura 33).

A aluna foi confrontada sobre esta dificuldade na entrevista, respondendo de imediato "agora vendo já sei uma fórmula" (EMA2). Confessou que sentiu dificuldades nesta tarefa porque foi das primeiras e não conseguia perceber, porque tinha de formular uma regra e isso era complicado, não sabendo quanto teria de somar da 5ª até à 25ª. Assim, a investigadora questionou a Mariana:

> I - Achas que agora já conseguias?
> M - Para 100 caixas era 402 corações.
> I- Porquê?
> M - Porque aqui tem três caixas [apontando], e tem três aqui [apontando para a parte da frente das caixas], três em cima, três de lado e três em baixo. Então é o número de caixas vezes quatro, mais dois dos lados. (EMA2)

Os Comboios de Polígonos foi a terceira tarefa (Anexo 10) a ser implementada e é composta por cinco alíneas, nesta a Mariana já demonstrou mais confiança ao resolvê-la. Esta fazia conexões com o conceito de perímetro, logo, a aluna já teria de conhecer previamente este conceito. Assim, na primeira alínea da tarefa, apresentou o número correto de palhinhas utilizando uma linguagem natural, na segunda alínea a aluna recorreu a uma representação simbólica, associando o número de carruagens ao número da figura e, simultaneamente, tentando testar e formular já uma lei de formação, pois desenha a imagem correspondente à carruagem 14 e calcula já o número total de palhinhas que são utilizadas para a carruagem 14 (Figura 34).

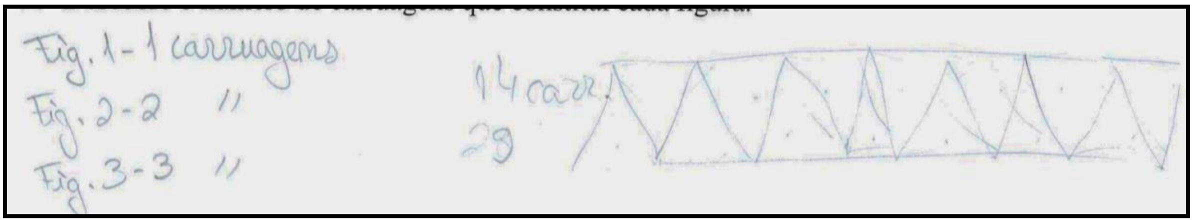


Figura 34 – Resolução da Mariana para a alínea 2 da tarefa *Os Comboios de Polígonos*.

Na alínea três desta tarefa a Mariana respondeu tal como na alínea um, ou seja, associando corretamente o perímetro ao número de comboios não revelando desconhecimento ou dificuldades com este conceito. Na alínea quatro recorreu a uma representação icónica, realizando um esquema e um desenho de um comboio com 17 carruagens e de outro com 20 carruagens de modo a testar mais uma vez a lei que estava a tentar formular (Figura 35).

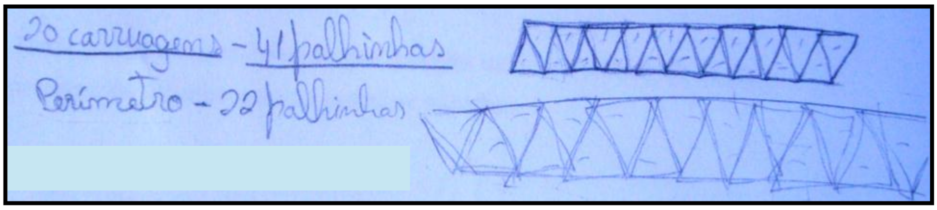


Figura 35 – Resolução da Mariana para a alínea 4 da tarefa *Os Comboios de Polígonos*.

Na última alínea a Mariana já conseguiu fazer uma generalização distante, largando o pensamento recursivo. Utilizou uma linguagem icónica, ou seja recorreu a esquemas e desenhos para testar a sua conjetura e utilizou uma linguagem simbólica com recurso a expressões algébricas para demonstrar a sua fórmula. Porém, apesar de ter evoluído da tarefa dois para esta, a aluna ainda não argumenta o seu pensamento de modo a explicar como conseguiu encontrar a expressão geral (Figura 36).

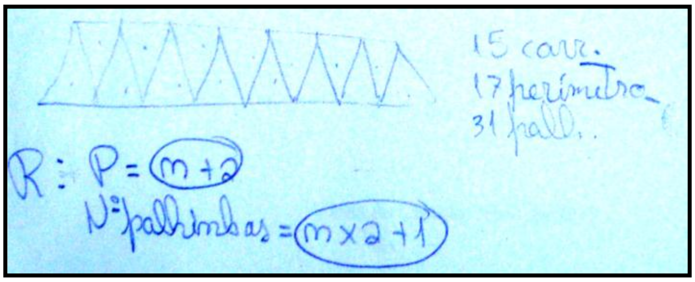


Figura 36 – Resolução da Mariana para a alínea 5 da tarefa *Os Comboios de Polígonos*.

Quando foi solicitado à Mariana para explicar o raciocínio oralmente a aluna afirmou:

> O perímetro é o número de carruagens mais dois. Para descobrir o número de palhinhas da figura temos de fazer o número da figura vezes dois mais um. Por exemplo este, tem cinco palhinhas, é 2x2+1, dá cinco (VOMA2).

Nota-se que a aluna não teve dificuldades em explicar o modo como conseguiu formular a regra, contudo, a aluna sente dificuldades a argumentar por escrito não conseguindo fazê-lo da mesma forma que explica oralmente.

Com Quadradinhos foi a quarta tarefa (Anexo 11) implementada e fazia conexões com o conceito de área, podendo ajudar a desenvolver o mesmo. A primeira e a segunda alínea desta tarefa a aluna conseguiu resolvê-las corretamente, desenhando assim, o termo seguinte da sequência para perceber a sua construção e calculando a área de cada um dos termos apresentados. Na terceira e última alínea (Figura 37) a Mariana formula a regra que se aplica a qualquer termo, conseguindo generalizar, usando o pensamento funcional e apresentando a expressão algébrica em linguagem simbólica. Não demonstra a utilização do pensamento recursivo, nem utiliza estratégias de resolução, assim como, ainda demonstra dificuldades de argumentação, pois não explica como chegou à sua conjetura e qual o significado dos símbolos utilizados, apresentando-a no final sem a testar com a utilização de outras figuras ou exemplos.

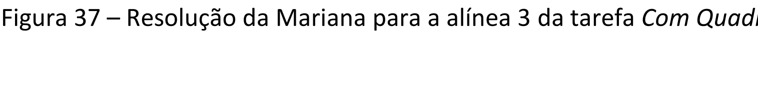


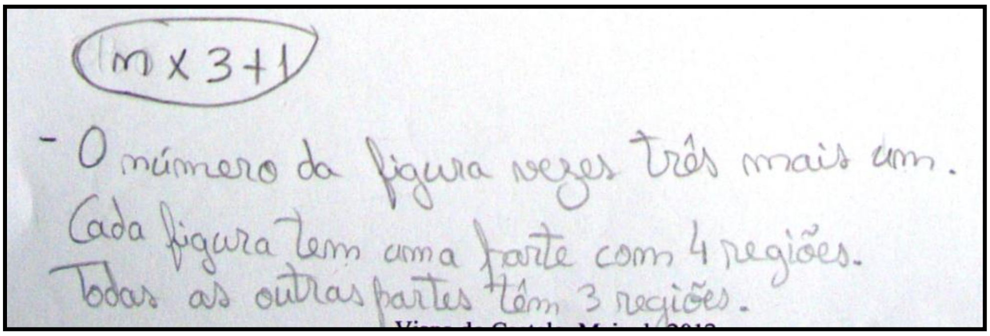
Figura 37 – Resolução da Mariana para a alínea 3 da tarefa *Com Quadradinhos*.

Contudo a aluna demonstra já se sentir à vontade, dominando de certo modo as representações com recurso a expressões algébricas, conseguindo exprimir através de uma expressão algébrica a sua maneira de “ver”. Assim, esta viu os termos por colunas, ou seja, na vertical, representando o “n” o número da figura, porém considera que para os colegas de turma esta é uma expressão um pouco abstrata. Isto porque nem todos os alunos conseguem chegar a uma generalização distante com recurso a expressões algébricas. Todavia, oralmente a aluna já consegue explicar a sua regra através de linguagem natural, mas um pouco confusa:

> É o número da figura mais [neste caso com a figura 100] mais 101 [número mais um], vezes as filas do meio que depende da figura, que é o número da figura mais um. Mais a última fila que é o número da figura mais dois (VOMA3).

A aluna tenta explicar a forma como visualizou os termos da sequência, esta regra foi uma das previstas antes da tarefa ser implementada, logo, a aluna aplica a fórmula do quadrado (nxn), que são as filas do meio como ela afirma.

Regiões no Retângulo é a quinta tarefa (Anexo 12) desenvolvida na sala de aula, e simultaneamente, é a tarefa que a Mariana mais gostou de concretizar porque, segundo ela, era a mais fácil. Esta tarefa abordava os números racionais, mais propriamente as frações, conteúdos nos quais a aluna revelou sentir mais dificuldades, no entanto, a discente apresentou um bom desempenho. Na primeira e segunda alínea conseguiu perceber a estrutura do padrão e o número de regiões para cada termo apresentado no enunciado. Na terceira e última alínea a Mariana utiliza uma linguagem simbólica, não expressando a utilização de nenhuma estratégia em especial, utiliza o pensamento funcional de modo a chegar à generalização distante (Figura 38). Nota-se no entanto que a aluna conseguiu evoluir, porque para além de apresentar a expressão algébrica que permite saber o número de regiões para qualquer termo, também tentou explicar a forma como visualizou e o significa dos símbolos. A aluna demonstrou ter chegado à regra através dos três primeiros termos apresentados no enunciado, pois as imagens apresentavam-se riscadas e uma delas com a expressão numérica que permitia calcular o número de regiões da mesma.


m x 3+1

- O número da figura vezes três mais um.
Cada figura tem uma parte com 4 regiões.
Todas as outras partes têm 3 regiões.

Figura 38 – Resolução da Mariana para a alínea 3 da tarefa *Regiões no Retângulo*.

Portanto, ao analisar a argumentação da Mariana notou-se que a fórmula está diferente da sua explicação, desta forma a investigadora questionou-a. Confrontada com a sua resposta a aluna afirmou que não tinha explicado como fez e que não estava a perceber como tinha feito. Assim, a aluna ficou algum tempo a ler a sua resposta e a pensar, até que respondeu:

> Por exemplo a figura 3, tem a primeira [referindo-se aos três primeiros retângulos maiores em que é dividida a figura] que é a que todas têm, depois tem outra [referindo-se às outras três zonas um pouco mais pequenas que as primeiras em que a figura é dividida] e depois tem sempre a última parte com 4, que eu fiz como se só tivesse 3, por isso é o número da figura vezes 3 regiões com 3 partes com 3 regiões e depois mais uma que é da última região que tem sempre mais um (EMA2).

Conseguiu explicar o seu raciocínio e perceber que respondeu de forma confusa, conseguindo esclarecer as dúvidas através da comunicação oral. Esta explicação coincide com a argumentação que a Mariana apresentou, no dia da realização da tarefa, oralmente aos seus colegas:

> I - Explica, por exemplo se olhares para a primeira figura, para a segunda e para a terceira, como é que chegaste lá?
> M - Por exemplo na terceira, é este 3 que tem sempre em todas as figuras, mais três, mais três [apontando para o desenho], já dão este, mais este, mais este. São três vezes o três e depois sempre o último, porque todas as figuras têm uma última parte que é o de quatro partes (VOMA4).

É de notar que a aluna na aula conseguiu explicar oralmente o seu pensamento e o modo de visualizar, através de uma linguagem natural, e que por escrito na tarefa apenas apresentou o que viu por tópicos de modo isolado, sem ligar à sua forma de "ver".

Os Z (Anexo 13) saiu na ficha de avaliação, desta forma, apenas analisar-se-á a comunicação escrita da mesma. Assim, a aluna conseguiu desenhar os dois termos seguintes pedidos na alínea um da tarefa e responder acertadamente ao total de quadradinhos para as figuras número 10 e 25.

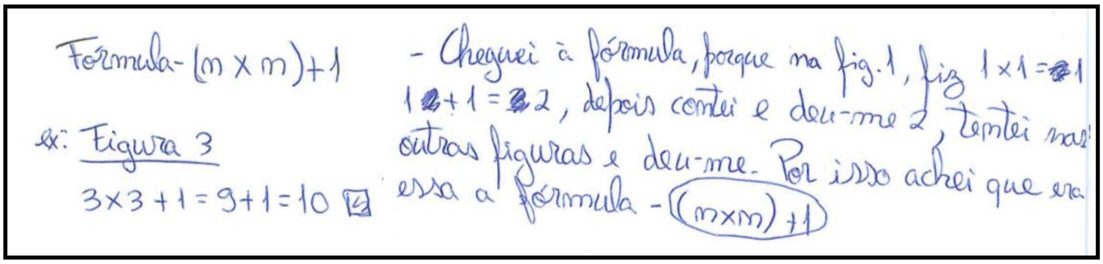


Figura 39 – Resolução da Mariana para a alínea 3 da tarefa *Os Z*.

Na alínea 3 (Figura 39) da tarefa como explicação da regra a aluna utiliza uma representação simbólica, demonstrando dois exemplos da sua conjetura e argumentando como conseguiu encontrar o caminho para a fórmula aplicada. Mais uma vez não demonstrou dificuldades em chegar à generalização distante, utilizando uma expressão algébrica para expressar a fórmula e expressões numéricas para demonstrar os exemplos apresentados. No entanto, a Mariana não explica o que representa o “n”, o que significa “nxn” e qual a parte da imagem que esta representa, nem explica o +1. Contudo, quem estiver familiarizado com este género de tarefas consegue perceber o raciocínio da aluna e entender a fórmula, porque analisando bem esta percebe-se que a aluna provavelmente poderá ter chegado à regra através da estratégia de tentativa e erro devido à maneira como argumenta, no entanto esta lei permite visualizar um modo que não foi previsto, ou seja, a primeira linha na horizontal, a contar de baixo para cima, e as restantes filas na vertical significam o nxn (filas amarelas da Figura 40), sobrando um quadradinho sempre (quadrado vermelho da Figura 40):

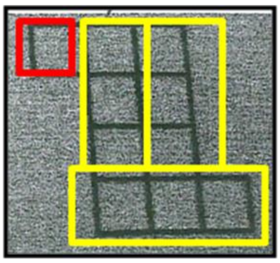
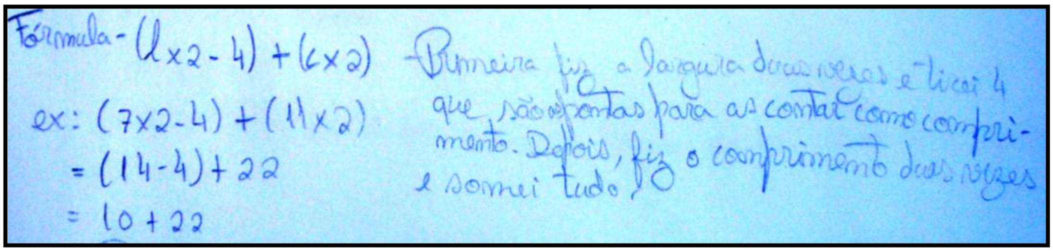


Figura 40 – Modo como a Mariana visualizou na tarefa *Os Z*.

Nota-se também uma evolução na aluna, pois já consegue argumentar melhor e apresentar exemplos que provem a sua regra, e ainda, que domina o conceito de área conseguindo tomar um quadradinho como unidade de medida utilizando corretamente a expressão nxn, pois, se movermos a fila que se encontra na horizontal e a colocarmos na vertical obtemos um quadrado e esta será a fórmula de calcular a área do mesmo.

Problemas. Quanto a este tipo de tarefas a Mariana não fez qualquer tipo de comentário, não revelando interesse nem desinteresse.

A Moldura foi a primeira tarefa (Anexo 14) de problemas implementada na turma, esta trabalha de forma implícita o conceito de perímetro, logo, a aluna terá de o dominar para conseguir responder. Assim, na primeira alínea da tarefa a Mariana responde corretamente dando a perceber que contou o quadradinho, no entanto, depois identificou o número total de quadradinhos numa fila horizontal e numa fila vertical. Na alínea dois a Mariana apenas desenhou mais duas molduras com tamanhos diferentes, contudo não explicou qual o número necessário de azulejos para qualquer moldura, limitando-se ao recurso de uma representação icónica. Na alínea três a aluna utiliza a representação simbólica, recorrendo a uma linguagem natural e matemática para explicar a expressão algébrica que traduz o seu pensamento funcional (Figura 41).


Fórmula - $(l \times 2 - 4) + (c \times 2)$

ex: $(7 \times 2 - 4) + (11 \times 2)$

$= (14 - 4) + 22$

$= 10 + 22$

Primeira fiz a largura duas vezes e tirei 4 que são pontas para as contar como comprimento. Depois, fiz o comprimento duas vezes e somei tudo.

Figura 41 – Resolução da Mariana para a alínea 3 da tarefa *A Moldura*.

A Mariana apresenta a sua conjetura substituindo a expressão algébrica por uma expressão numérica, dada como exemplo da regra funcionar e poder ser aplicada a qualquer moldura, esta expressão representa a moldura fornecida no enunciado. A visualização realizada pela aluna foi uma das que estava prevista previamente, a estudante consegue explicar o que significa a fórmula e através dessa explicação a aluna demonstra ter conhecimentos sobre o perímetro e o modo de o calcular, pois utiliza linguagem matemática ao referir os termos de largura e comprimento, termos estes associados ao conceito de perímetro. Quando solicitado à Mariana para expor o seu raciocínio oralmente à turma, ela explicou:

> M - Primeiro fazemos a largura vezes dois, que é estas duas colunas [apontando para a imagem]. Mas depois tirarmos 4, são os 4 quadradinhos dos cantos.
> I - Porquê que tiraste esses 4?
> M - Porque se os somasse à largura e também ao comprimento ia dar 4 quadrados a mais. Também dava, mas tinha de tirar 4 no fim. E depois tiro os 4 e depois vejo quanto é o comprimento e faço vezes dois para estas duas linhas [apontando para a imagem] (VOMA5).

A Mariana demonstra estar à vontade com a sua explicação oral, apesar de demonstrar evolução na sua explicação, também demonstra pouco à vontade quanto à utilização de termos matemáticos porque ao referir "estas duas linhas" a Marina demonstrou hesitação, não conseguindo encontrar os termos matemáticos apropriados.

Na Cantina foi a última tarefa a ser implementada (Anexo 15), sendo também a mais rápida a ser resolvida pela Mariana. Na alínea um e dois a aluna recorreu a representações simbólicas, ou seja, utilizou a estratégia do desenho e esquema para indicar a resposta, permitindo o auxílio do raciocínio de modo visual. Para assim conseguir compreender da melhor forma a estrutura do padrão (Figura 42). Demonstra ainda ter utilizado uma contagem de um a um (lugares ocupados por pessoas), tal como é possível verificar pelos tracinhos verticais apresentados.

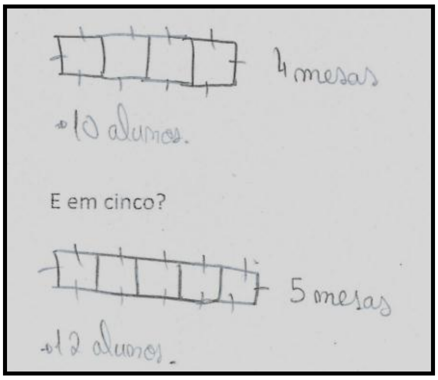


Figura 42 – Resolução da Mariana para as alíneas 1 e 2 da tarefa *Na Cantina*.

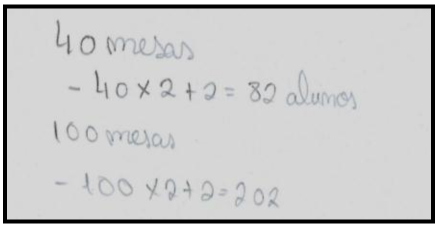


Figura 43 – Resolução da Mariana para a alínea 3 da tarefa *Na Cantina*.

Isto porque na alínea três da questão a aluna já consegue aplicar uma expressão numérica para explicar a solução da questão, não recorrendo ao desenho. Assim, os desenhos das duas primeiras alíneas permitiram à Mariana achar um modo de calcular o total de pessoas para várias mesas sem ter de recorrer ao desenho e ao pensamento recursivo, notando-se já nesta alínea o pensamento funcional (Figura 43).

Na última alínea a Mariana já apresentou uma expressão algébrica que traduz a sua maneira de ver, efetuando uma generalização distante. Apresenta uma justificação, no entanto, não o consegue fazer da melhor forma, apresentando uma linguagem natural um pouco confusa (Figura 44).

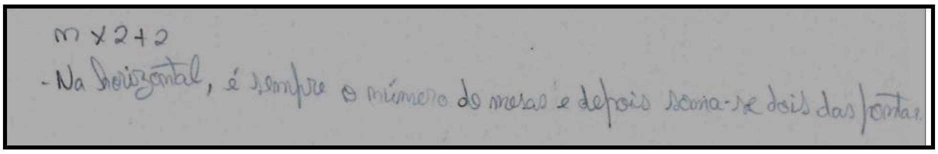

$m \times 2 + 2$
- Na horizontal, é sempre o número de mesas e depois soma-se dois das pontas.

Figura 44 – Resolução da Mariana para a alínea 4 da tarefa *Na Cantina*.

Explica que é sempre o número de mesas, mas não refere que é sempre duas vezes o número de mesas, pois, como ela disse e muito bem, ela "vê" na horizontal, contudo, são duas filas horizontais, tal como a expressão indica. Explicando o seu raciocínio oralmente à turma a Mariana afirmou:

> Primeiro fiz: tem 4 mesas por isso na horizontal também é quatro, aqui quatro lugares [apontando para a parte superior na horizontal das mesas] e em baixo também. Por isso é quatro vezes dois. E depois, tem dois das pontas. Por isso é o número de mesas vezes dois, mais dois (VOMA6).

Mais uma vez a aluna demonstrou explicar melhor o seu pensamento oralmente em vez de por escrito, porque consegue especificar e utilizar uma linguagem mais adequada oralmente.

No fim da realização de todas as tarefas a Mariana foi questionada acerca das dificuldades que sentiu quanto à comunicação, a aluna respondeu que sentiu dificuldades tanto em comunicar oralmente como por escrito o seu pensamento. Confessando que por:

> escrito eu às vezes não conseguia explicar como é que lá cheguei, à fórmula, no oral, às vezes ficava um bocado a tremer pois (…) tinha de explicá-la [a generalização] várias vezes porque alguns não percebiam, é um bocado stressante (EMA2).

Depois de um momento em que revelou nervosismo, foi interrogada se não gostava de estar em frente à turma, ao qual esta respondeu, inicialmente apenas abanando com a cabeça, só respondendo com um não depois. Confessou que era mais fácil explicar o pensamento à professora, "porque a professora percebia mais rápido do que os alunos e é mais fácil para mim explicar só para uma pessoa do que para muitas" (EMA2) – afirmou a Mariana um pouco agitada na cadeira. Para explicar a sua dificuldade de escrita a Mariana revelou que às vezes devia-se ao facto de não encontrar os termos matemáticos apropriados, mas também não conseguia explicar porque " lá dizia explica como lá chegaste e eu não conseguia explicar como é que lá cheguei, só mostrando no desenho é que conseguia, e por escrito não conseguia explicar isso" (EMA2).

Em síntese a Mariana é uma aluna empenhada que gosta de aprender e tenta sempre saber mais. Está atenta nas aulas ouvindo as opiniões dos colegas com o objetivo de adquirir novas aprendizagens. É uma aluna que apenas apresentou dificuldades nos dois primeiros problemas de padrões, conseguindo utilizar expressões algébricas em quase todas as tarefas, largando facilmente o pensamento recursivo. A aluna conseguia e explicava melhor o seu pensamento oralmente que por escrito, sendo esta a principal dificuldade da Mariana.

3. O Martim

3.1. O Martim como Aluno

O Martim é um aluno que tanto tem participações oportunas como desoportunas, tornando-se por vezes implicativo e falando de assuntos que não tem nada a ver com os conteúdos, tornando-se por vezes impertinente. É um aluno interessado, mas quando já sabe a matéria mostra desinteresse e começa a perturbar a aula. É inteligente, mas distrai os colegas. Algumas vezes demonstra falta de respeito pelas regras de sala de aula. Na realização dos trabalhos de casa demonstra menos interesse e empenho.

A relação do Martim com a Matemática é boa porque diz não ter nenhuma dificuldade a matemática, no entanto o aluno afirma não gostar muito desta disciplina porque o faz pensar muito e que para ele pensar cansa. Este aluno afirma que a Matemática é "das disciplinas mais importantes, porque se nós não formos bons a matemática depois não temos onde trabalhar" (EMO1), revelando que também é importante para o dia-a-dia, usando-a para fazer contas, dando o exemplo de quando se vai às compras precisamos da matemática para o troco. O Martim confessa ainda que "às vezes até é divertida a matemática"(EMO1) e que gosta das aulas de matemática quando são em trabalhos de grupo, porém quando vem cansado e com sono para a escola já não aprecia tanto a matemática. Sugere que para as aulas serem melhores podiam ter jogos, e contradizendo-se com o que disse anteriormente, estes podiam ser jogos matemáticos que fizessem pensar. O Martim confessou que estuda matemática em casa quando tem fichas de avaliação e que por vezes pede ajuda à sua mãe para lhe explicar o que não percebe, revelando que estuda "pelo livro e algumas coisas quando passamos à frente no caderno de atividades, quando não temos tempo e eu faço" (EMO1). Quando questionado sobre qual a principal diferença que sentia do 1º ciclo para o 5º ano na matemática, este respondeu que "antes até fazíamos desenhos para perceber os cálculos e agora até (…) tem geometria e nós antes na matemática falávamos pouco da geometria" (EMO1).

3.2. O Martim e a Experiência Didática

Depois de se conhecer um pouco acerca deste aluno, esta secção pretende analisar o trabalho desenvolvido pelo mesmo ao longo da resolução de todas as tarefas implementadas na sala de aula, focando-se na comunicação utilizada. Pretende-se analisar os conceitos matemáticos, as estratégias e representações utilizadas, seguindo o sistema de representação defendido por Bruner por ser o mais global, entre outros aspetos relevantes para o estudo.

3.2.1. A Exploração das Tarefas

De todas as tarefas implementadas a única que o Martim revelou dificuldades de compreensão do enunciado foi no primeiro problema – *A Moldura*, pois este pedia para realizar várias molduras e o Martim estava familiarizado com as tarefas de sequências. Para além desta, o aluno não demonstrou mais nenhuma dificuldade. O aluno realizava as tarefas maioritariamente sem recorrer à ajuda do professor, solicitando e trocando a sua opinião a maior parte das vezes como o seu colega de mesa ou outros colegas à sua frente.

Tendo em conta que o Martim nunca tinha tido contacto com este tipo de tarefas, as estratégias de resolução de problemas foram muito escassas e com pouca variedade. A estratégia mais utilizada foi a descoberta de padrões, uma vez que os problemas tinham esse objetivo, porém utilizou o desenho em algumas das tarefas como apoio e uma lista organizada dos dados.

O Martim tanto seguia a ordem proposta no enunciado das tarefas como às vezes trocava a ordem e concretizava inicialmente a descoberta de uma conjetura e só depois respondia às outras questões da tarefa. O aluno quase nunca apresentava exemplos que testassem a sua conjetura, porque, como já referido, às vezes testava-a para as alíneas anteriores do enunciado, outras testava nos termos já apresentados. Mas, não apresentava por escrito nenhum exemplo disso. Na fase da discussão dos resultados e reflexão dos mesmos o Martim revelava desinteresse por esta fase quando os seus colegas estavam a explicar o seu raciocínio. Estando por vezes a ouvi-los, porém outras vezes ou estava distraído ou a falar com os colegas, confessando que não aprendeu nada com a resolução dos colegas porque eram "muito parecidas às que eu fazia, mesmo que não fosse igual. Mas também as figuras são as mesmas por isso não podia ser muito diferente"(EMO2). Quando confrontado com as diferentes formas de chegar ao mesmo resultado o aluno afirmou que também ele podia ter descoberto essas formas, mas como já tinha descoberto uma maneira achava que era apenas essa. Apenas se interessava quando era ele a explicar à turma ou quando a exploração do problema resultava em opiniões dos colegas. Porém, achava importante a correção do professor para saber o que estava correto ou errado.

O Martim declarou que o que achou mais complicado nas tarefas foi descobrir uma regra geral que se aplicasse a todos os termos. Porque, segundo ele "o resto era muito fácil, era só dizer quantos quadrados tinha a figura um ou a figura dois e coisa do género e isso não, isso era descobrir qual era a regra para descobrir o número necessário para a figura" (EMO2).

Contudo, o Martim gostou mais das aulas de matemática através destas tarefas de resolução de problemas de padrões porque "são problemas e não é só figuras geométricas, contas de dividir ou mais, e eu não gosto muito disso, mas gosto de problemas que não sejam preciso contas" (EMO2). Apesar disto o Martim afirma que estas tarefas têm muita matemática, que não têm as típicas "contas" mas que a matemática não é só a realização de cálculos, a matemática é para "desenvolver a inteligência", logo estas tarefas têm muita matemática. O aluno confessa ainda que estas tarefas são "importantes para a matemática" mas que não são muito usadas.

3.2.2. As Representações e a Comunicação

Contagens. O Martim revelou gostar destas tarefas porque eram fáceis, confessando que ao resolver estas tarefas era uma forma de "aquecer para os problemas" (EMO2).

Nas tarefas *Mais Flores e Morangos em W* não há muito a analisar sobre o Martim, uma vez que como já foi referido neste capítulo, estas foram realizadas em grande grupo. E, tal como os outros alunos, o Martim também conseguiu realizar as contagens facilmente e de acordo com as expetativas esperadas.

Discos foi a tarefa realizada na ficha de avaliação de modo a verificar a forma como os alunos individualmente visualizam e traduzem o seu modo de "ver" através de expressões que permitem a contagem mais rapidamente.

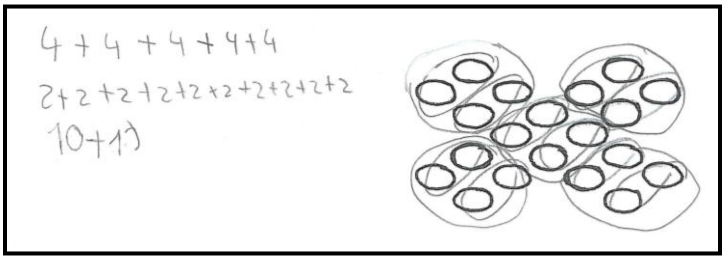


Figura 45 – Resolução do Martim para a tarefa *Discos*.

Através da figura apresentada (Figura 45) consegue identificar-se as duas primeiras expressões que traduzem o modo de "ver" do aluno. Assim, a primeira expressão o Martim agrupou os discos em cinco grupos de quatro, adicionando os cinco, esta expressão poderia ser simplificada através da expressão numérica 5x4. A segunda expressão do Martim foi agrupar os discos em grupos de dois, deste modo, o aluno visualizou dez grupos de dois discos cada um, podendo a expressão dele ser traduzida por uma multiplicação: 10x2. A terceira e última expressão demonstra que o aluno verificou com as anteriores que o resultado era de vinte discos, elaborando a expressão 10+10 que resulta nos vinte discos. No entanto, quando questionado na correção da ficha de avaliação sobre como ele visualizou o aluno não soube explicar, demorando algum tempo até conseguir encontrar uma forma de "ver" que traduzisse a sua expressão. Afirmando que se se dividisse a figura dos discos ao "meio" obtêm-se dois conjuntos de dez discos em cada um.

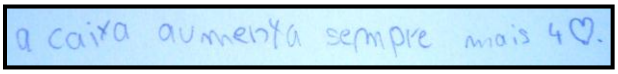
Sequências de Crescimento. Relativamente a este tipo de tarefas o Martim afirmou na entrevista que nunca as tinha realizado antes, mas que foram as preferidas dele "porque era mais fácil para compreender e para saber o que é que ia acontecer ao passar de figura em figura" (EMO2). Confessando que estas tarefas eram benéficas para "desenvolver a inteligência" (EMO2), porque faziam-no pensar muito e que eram problemas diferentes daqueles que estava habituado a realizar, provando deste modo, que a matemática não é só à base de cálculos.

Morangos em V foi a primeira tarefa (Anexo 8) a ser implementada, uma vez que não havia qualquer tipo de experiência com estas tarefas o Martim não conseguiu resolver a tarefa, tal como os seus colegas. Tendo de ouvir a explicação da professora de um dos modos de como poderiam realizar a mesma, contudo, o aluno foi o único que se atreveu a tentar explicar oralmente uma forma de resolver a tarefa. A explicação do aluno foi uma das previstas antes de implementar a tarefa na turma. Deste modo o Martim explicou para a turma:

> I - Contas um a um?
> M - Não.
> I - Então?
> M -Cinco.
> I - Como é que sabes que é cinco?
> M - Mais dois.
> I - E depois?
> M - Sete.
> I - Como é que sabes que é sete?
> M - Cinco mais dois.
> I – E a figura dez, como é que tu sabes?
> M – A figura um tem dois do lado esquerdo, a figura 2 tem três do lado esquerdo.
> I - Então como é que tu chegas ao número de morangos que tem a figura 10?
> M - Faço onze de um lado e dez do outro. Desenho dez até ao fim [lado direito] e depois daqui, onze [apontando no quadro para o lado esquerdo]… não, onze para baixo [lado direito]e dez para cima [lado esquerdo] (VOMO1).

O Martim no fim já teve a ajuda de um colega que o ajudou a explicar. Contudo, pode-se verificar que o aluno inicialmente estava a recorrer a um pensamento recursivo de termo para termo, dando um salto para uma generalização distante, utilizando assim o pensamento funcional.

As Caixas de Corações foi a segunda tarefa (Anexo 9) a ser implementada na turma. Analisando-a em geral o aluno demonstrou respostas muito curtas, demonstrando algumas dificuldades, regredindo um pouco no seu pensamento da primeira tarefa para esta. Na primeira e segunda alínea as respostas foram diretas apresentando apenas o resultado pedido para a questão, demonstrando também que tem conceitos geométricos adquiridos (referentes às fases do cubo), na terceira alínea o Martim fez uma espécie de esquema, onde ligava o que era pedido na questão às respostas numéricas que eram pedidas, não apresentando qualquer explicação. Na última alínea o aluno utilizou uma representação simbólica para explicar o seu pensamento recursivo (Figura 46).



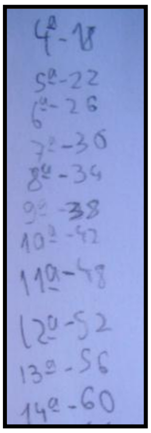


Figura 46 – Resolução do Martim para a alínea 4 da tarefa *As Caixas de Corações*.

Não consegue generalizar, pois apresenta uma lista organizada com recurso ao pensamento recursivo desde o quarto termo até ao centésimo termo (Figura 46), utilizando uma linguagem natural para tentar explicar o modo como chegou aos resultados.

Os Comboios de Polígonos foi a terceira tarefa (Anexo 10) a ser desenvolvida na sala de aula pelo Martim, ultrapassou algumas das suas dificuldades, contudo ainda não demonstra confiança ao resolver a tarefa. Na primeira alínea da tarefa o aluno responde acertadamente ao número de palhinhas para cada comboio utilizando uma linguagem natural, para a segunda alínea o aluno utiliza igualmente uma linguagem natural respondendo corretamente ao referir que o número de palhinhas é igual ao número de carruagens. Na terceira alínea o Martim recorre a uma representação simbólica, porque já apresenta a regra que permite obter o perímetro para qualquer figura (Figura 47).

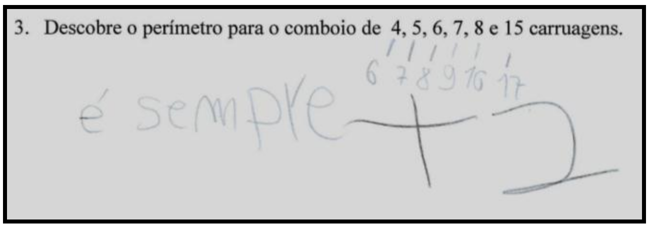


Figura 47 – Resolução do Martim para a alínea 3 da tarefa *Os Comboios de Polígonos*.

Utiliza no entanto uma linguagem natural utilizando a questão do enunciado para fazer ligação às respostas corretas, criando uma espécie de esquema. É de notar que já não é a primeira vez que utiliza o enunciado da questão para o relacionar com as respostas pretendidas. O aluno demonstra ainda dominar o conceito de perímetro ao qual a tarefa aludia, uma vez que apresentou já a lei sem ser pedida pela questão. Para a alínea quatro da tarefa o aluno já utiliza uma representação icónica, desenhando um comboio com vinte carruagens, ainda não conseguindo demonstrar se ainda utiliza o pensamento recursivo ou se já conseguiu transpor o seu raciocínio para um pensamento funcional (Figura 48).

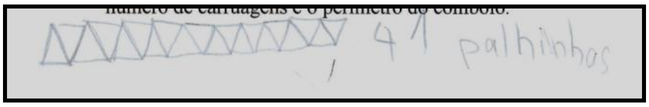


Figura 48 – Resolução do Martim para a alínea 4 da tarefa *Os Comboios de Polígonos*.

Porém, o aluno apenas respondeu a uma parte do enunciado desta questão, ou seja, qual o número total de palhinhas para um comboio com vinte carruagens, esquecendo-se de responder às restantes. Desta forma o Martim foi questionado mais tarde na entrevista, nesta o aluno demonstrou estar um pouco confuso e não se lembrar da tarefa, alegando não saber porque é que não respondeu ao restante enunciado. Este foi questionado sobre o conceito de perímetro ao qual respondeu:

> M – Cada carruagem tem dois e a última tem dois também.
> I – Não percebi …
> M – Cada carruagem tem duas palhinhas se estiverem juntas.
> I – Perímetro …
> M - É a parte à volta.
> [o aluno demonstra-se confuso não sabendo o que responder]
> I – Então fizeste e agora não te lembras?
> M – ahh ... então se for 4 carruagens tem mais dois … é sempre mais dois. Então o perímetro aqui é 22.
> I – Então vamos verificar, para a figura 3…
> M – O perímetro é sempre mais dois que o número de carruagens e temos de aumentar sempre mais duas palhinhas para fazer a figura seguinte (EMO2).

O aluno durante a entrevista demonstrou não se recordar da tarefa pois demorou a responder às questões, baralhou-se quanto ao significado do conceito de perímetro, e ainda parecia estar um pouco nervoso, uma vez que de vez em quando mexia na camisola enquanto respondia. Contudo, depois de algum esforço o Martim conseguiu explicar a regra. Para a última alínea o aluno utiliza uma representação simbólica recorrendo a uma linguagem natural para explicar a sua conjetura (Figura 49), nesta tarefa o aluno já utiliza um pensamento funcional conseguindo generalizar.

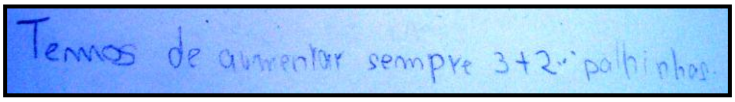


Figura 49 – Resolução do Martim para a alínea 5 da tarefa *Os Comboios de Polígonos*.

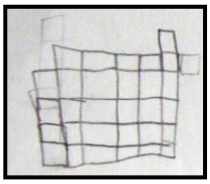
Contudo, o Martim apresenta uma argumentação confusa não esclarecendo a sua regra, logo, este foi questionado sobre a sua resposta:

> I – Meteste que era sempre três mais dois, o que é o três?
> M - O três é o número da figura e aumentamos sempre mais dois. Mas isto era se fosse a figura um.
> I – Se fosse a figura um ficava como?
> M – O número da figura mais dois. (EMO2)

Assim, percebe-se que a resposta apresentada pelo Martim traduz a lei de formação que descobriu, apresentando uma expressão numérica, não conseguindo recorrer a uma expressão algébrica. O aluno ainda apresenta dificuldades em argumentar e em expressar algebricamente o seu raciocínio.

Oralmente na aula o Martim apenas utilizou o seu pensamento recursivo quando lhe pedido para explicar como viu: “Tem de ter até 3 palhinhas, depois vai sempre aumentando mais dois, é 3+2+2+2+2…”(VOMO2).

Com Quadradinhos foi a quarta tarefa (Anexo 11) implementada, sendo também a tarefa preferida do Martim, segundo ele porque as figuras (termos) eram “mais fixes”. Nesta tarefa o aluno já mostrou algum desenvolvimento comparado com as tarefas anteriores. Revelou conhecer e dominar bem o conceito abordado por esta tarefa ou seja, a área. Porém, para surpresa, errou na alínea um, porque não apresenta as sete colunas que o termo quatro deveria ter, desenhando apenas seis colunas (Figura 50). Isto pode ter ocorrido por distração do aluno, uma vez que as alíneas posteriores se encontram corretas, e acima de tudo, porque conseguiu na última alínea explicar a forma como visualizou. Na segunda alínea este apresentou numericamente a resposta correta, associando a cada termo a sua área. Na terceira e última alínea o Martim revela ter evoluído na sua argumentação (Figura 50).



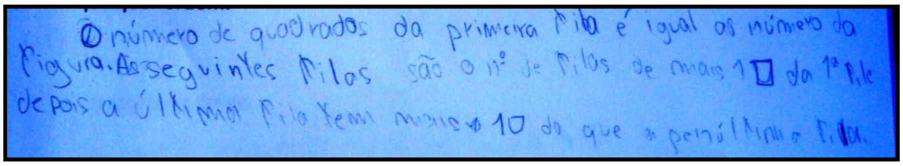


Figura 50 – Resolução do Martim para as alíneas 1 e 3 da tarefa *Com Quadradinhos*.

Contudo, ainda não consegue expressar a sua conjetura através de expressões algébricas, nem de expressões numéricas, não testando se a sua regra funciona. Já consegue passar do pensamento recursivo para o pensamento funcional, concretizando uma generalização distante. Utiliza uma representação simbólica para expressar e argumentar o seu raciocínio, recorrendo a uma linguagem natural um pouco mais complexa que nas tarefas anteriores. Este tenta explicar como visualizou apresentando um discurso um pouco confuso. No entanto, o modo de "ver" e chegar à solução foi um dos modos previstos antes de implementar a tarefa, assim o aluno demonstra que realmente entende e sabe aplicar corretamente o conceito de área, pois o seu modo de visualizar faz recurso à fórmula de cálculo da área de um quadrado ($\ell \times \ell$).

Uma vez que a argumentação do Martim se apresentava confusa, facto que poderia derivar de o aluno não ter conseguido estruturar corretamente o termo seguinte, não percebendo a estrutura do padrão, e por sua vez, não conseguindo explicar o seu modo de "ver", deste modo este foi questionado:

> I – Como é que eu sei quantas filas existem na horizontal?
> M – É sempre o número da figura nas filas horizontais. …não é mais um também. [responde com as mãos no queixo]. O número de quadrados da fila horizontal é mais um do que o número de quadrados da fila vertical.
> I – Estás a contar com este último? [última coluna do termo].
> M – Sim … então é igual.
> I – Como assim?
> M – O número de quadrados da fila horizontal é igual ao número de quadrados da fila vertical.(EMO2)

O Martim aparentou estar um pouco distraído e nervoso enquanto era questionado, porque estava sempre a mexer com as mãos, interlaçando-as por vezes. Distraído porque não estava a olhar e a ler corretamente a sua resposta, logo não conseguia explicá-la corretamente. Todavia conseguiu melhorar a sua explicação demonstrando melhor a sua visualização, ou seja, o que permitiu chegar a uma conjetura, acrescentando uma explicação que define melhor o seu modo de "ver". Pois, o Martim apenas referiu por escrito as filas verticais, não explicando as filas horizontais, neste caso também poderia ser designadas de colunas, ou seja, não exprimiu corretamente a fórmula de calcular a área de um quadrado ($l \times l$). O Martim ao explicar a sua regra à turma, oralmente afirmou:

> O número de quadrados da primeira fila é três, é da figura três. Depois, o número seguinte a três que é quatro, é o número das seguintes filas, são quatro. Depois a outra fila tem sempre mais um quadrado que a penúltima fila (VOMO3).

Mas, este ainda apresentou um outro exemplo para a figura cem:

> M – A primeira fila tem 100 quadrados, depois há 101 filas, cada 101 filas com 101 quadrados, depois a última tem 102 quadrados.
> I – De onde tiraste esse 101?
> M – Da primeira fila, os quadrados da primeira fila mais um. Há 101 filas, dessas filas, cada fila tem 101 quadrados. Depois a última fila mais um quadrado que a penúltima (VOMO3).

Deste modo o aluno consegue explicar e argumentar o seu raciocínio corretamente, apresentando mais do que um exemplo para a sua conjetura demonstrando que esta funciona. Porém, foi pedido ao discente para tentar exprimir a sua explicação oral em expressão algébrica, mas o aluno não conseguiu fazê-lo, realizando no quadro um esquema com recurso a um esquema com linguagem matemática (Figura 51).

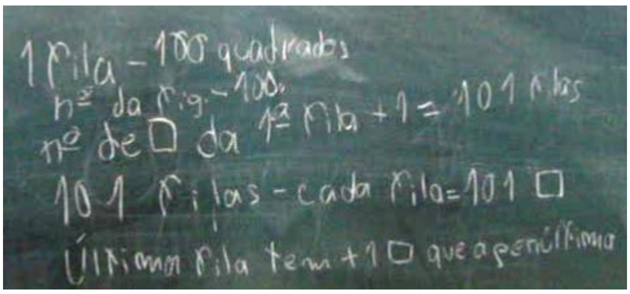


Figura 51 – Resolução do Martim no quadro para a tarefa *Com Quadradinhos*.

Regiões no Retângulo foi a quinta tarefa (Anexo 12) a ser realizada pelo Martim, esta envolvia frações. O aluno necessitou de algum apoio para compreender a a sequência de figuras, assim, na alínea um é possível de visualizar outros desenhos apagados antes de realizar o definitivo, conseguindo desenhar o quarto termo corretamente. Na segunda alínea apresenta os resultados corretos, associando o número de regiões ao número da figura. Utiliza um esquema com linguagem numérica para expressar a solução. Nesta tarefa não utiliza o enunciado para associar a resposta, como nas tarefas anteriores. Na terceira alínea nota-se uma pequena evolução do Martim conseguindo explicar a sua conjetura (Figura 52).

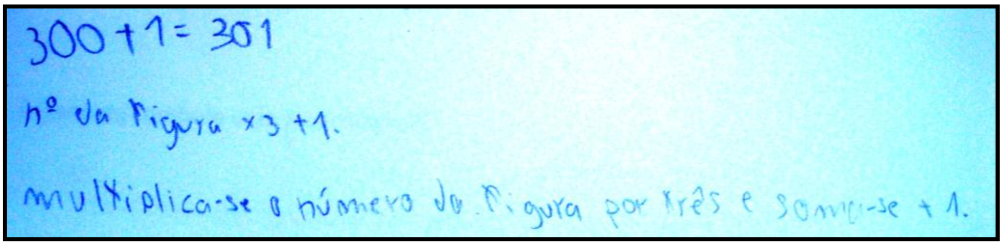

300+1= 301
nº da figura x3 +1.
multiplica-se o número da figura por três e soma-se + 1.

Figura 52 – Resolução do Martim para a alínea 3 da tarefa *Regiões no Retângulo*.

O aluno conseguiu generalizar e já apresenta uma expressão algébrica e ainda uma expressão numérica correspondente à figura cem, não recorre ao pensamento recursivo mas sim ao pensamento funcional. Na sua explicação utiliza representações simbólicas e recorre a uma linguagem natural para explicar a sua regra, apenas descrevendo a expressão escrita anteriormente.

No fim de resolver todas as alíneas da tarefa foi pedido ao Martim para explicar o seu raciocínio oralmente:

> M – Em cada figura avança três regiões.
> I – E se eu te pedir o número de regiões da figura 100?
> M – Vou sempre até à 100.
> I – E se eu te pedir 500?
> M – Faço desde a 100 até à 500. (VOMO4)

O aluno demonstra mais uma vez o recurso ao pensamento recursivo para explicar oralmente, o que não se verifica na sua explicação escrita. Porém, o aluno foi de novo questionado e desta vez o Martim já conseguiu explicar:

> M – A figura tem quatro regiões e o que eu fiz para calcular … as regiões da figura … é o número da figura, multiplicas três que dá …
> I – E o que é esse três?
> M – São três quadrados que aumenta sempre em cada região e soma-se mais um. (VOMO4)

O aluno utiliza uma linguagem natural ao explicar a sua regra, contudo apresenta algumas dificuldades em expressar verbalmente o seu pensamento, pois, confunde-se um pouco recorrendo ao enunciado da tarefa para relembrar como concretizou a sua conjetura.

Os Z (Anexo 13) foi a tarefa que foi realizada ao longo da ficha de avaliação. Torna-se relevante expressar a evolução do Martim, pois nesta tarefa o aluno apresentou um bom desempenho e interesse no desenvolvimento da mesma. Na primeira alínea o aluno desenhou corretamente os dois termos seguintes apreendendo a estrutura do padrão corretamente. A alínea dois foi realizada pelo Martim depois de encontrar a sua conjetura e responder à alínea três. Pois, durante a realização da ficha de avaliação o aluno questionou a docente de modo a perceber se a sua conjetura estava correta, podendo a professora verificar que o discente já tinha realizado a alínea três e ainda faltava responder à alínea dois. Assim, na segunda alínea o aluno respondeu acertadamente (Figura 53), utilizando representações simbólicas e expressões numéricas para ilustrar a sua resposta, não apresentando apenas a solução como era costume nas tarefas anteriores, recorrendo a uma linguagem matemática.

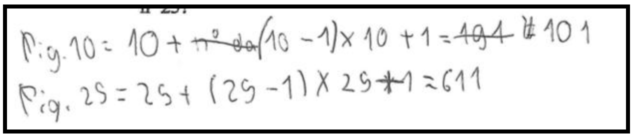


Figura 53 – Resolução do Martim para a alínea 2 da tarefa *Os Z*.

Na alínea três o Martim conseguiu mais uma vez generalizar, efetuando uma generalização que não foi prevista. Explica o seu modo de "ver" por escrito, utilizando representações simbólicas e recorre a uma linguagem mista, onde utiliza a linguagem natural e matemática (Figura 54).

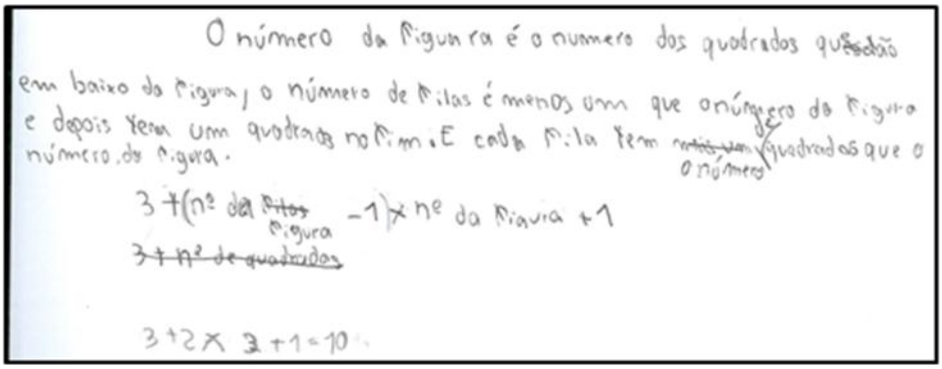


Figura 54 – Resolução do Martim para a alínea 3 da tarefa *Os Z*.

O aluno apresenta a expressão algébrica que traduz o seu modo de generalizar e apresenta ainda a expressão numérica correspondente ao terceiro termo, como modo de exemplificar e testar a sua conjetura. Porém, o Martim não utiliza os termos matemáticos corretos, porque ao referir-se a filas este pretende indicar as colunas que constituem o “Z”. O aluno demonstra ainda dominar o conceito de área, pois a regra por ele formada recorre à multiplicação entre o número de quadradinhos na horizontal e na vertical, obtendo o total de quadradinhos desse quadrado, assim, existe uma equivalência entre a fórmula da área do quadrado (*l*x*l*) com parte da expressão algébrica que o aluno descobriu [(n-1)xn+1].

Problemas. *A Moldura* foi o primeiro problema (Anexo 14) a ser implementado na turma. Neste o aluno já demonstrou estar mais à vontade na resolução do problema, porém apresentou algumas dificuldades em determinadas questões. Na alínea um, o aluno apresentou o resultado correto à questão, contudo, próximo da imagem apresentou os cálculos que efetuou para encontrar a solução à primeira alínea (Figura 55), demonstrando que não contou um a um os quadradinhos da moldura. Já nesta alínea o aluno revela já ter encontrado uma regra de formação para as molduras.

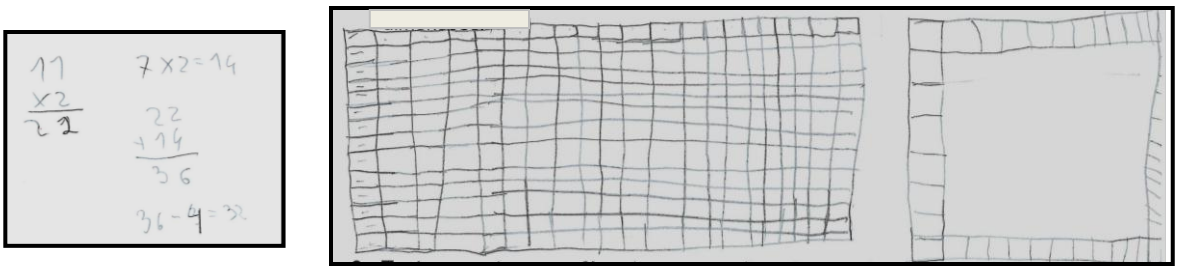


Figura 55 – Resolução do Martim para as alíneas 1 e 2 da tarefa *A Moldura*.

A segunda alínea demonstra que o Martim teve dificuldades em desenhar outras molduras (Figura 55), porque num dos seus desenhos apresentou a moldura toda preenchida, desta forma pode-se deduzir que o aluno teve dificuldades nesta alínea. Uma vez que já estava habituado às tarefas com sequências e esta foi a primeira tarefa de problemas pode ter sido por este motivo que o aluno sentiu dificuldades em experimentar/desenhar outras molduras. Na terceira e última alínea o Martim recorre a uma generalização distante apresentando a expressão algébrica do seu modo de "ver" (Figura 56).

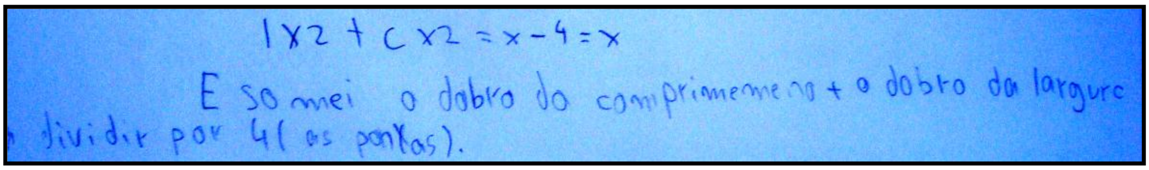


Figura 56 – Resolução do Martim para a alínea 3 da tarefa *A Moldura*.

Este modo de ver é semelhante a um dos previstos antes da tarefa ser implementada. Apresenta representações simbólicas e utiliza uma linguagem matemática para expressar a sua forma de visualizar e explicar a sua conjetura. A escrita do aluno é confusa e contém um erro na sua descrição que não está de acordo com a expressão algébrica que ele apresenta. Desta forma foi questionado sobre ter escrito a "dividir" quando apresenta a "subtração de quatro" na expressão, ao que afirmou se ter enganado e que queria dizer que era a subtrair quatro quadradinhos, confirmando que o quatro eram as "pontas" da moldura. Com esta tarefa o aluno revelou ter conhecimentos matemáticos relativamente ao conceito de perímetro, de dobro e de algumas propriedades do retângulo, isto porque na explicação escrita o discente refere que é o dobro da largura, ou seja, sabe aplicar e conhece o significado de dobro, tal como utiliza termos matemáticos caraterísticos do retângulo, ou seja, a largura e o comprimento. Quanto ao perímetro não confunde este conceito com o de área como alguns dos seus colegas de turma.

Também nesta tarefa o Martim consegue expressar o seu pensamento oralmente, logo quando solicitado para que este explicasse como conseguiu formular a sua regra este explicou:

> M – A largura do retângulo vezes dois mais a largura do comprimento vezes dois menos quatro é igual a 32. Então tem de se somar a largura vezes dois mais comprimento vezes dois, depois de estar somado, subtraímos por quatro.
> I – Porquê esse quatro, de onde vem o quatro?
> M – Porque me deu 36 e para ficar 32 subtraí quatro. (VOMO5)

Pode-se constatar que o Martim conseguiu conjeturar através da contagem, inicial, do número total de quadradinhos da moldura apresentada no enunciado. Sabendo o resultado total de quadradinhos da moldura, concretizou os cálculos relativamente ao perímetro do retângulo. Como davam mais quatro fez a subtração, só depois associou aos quadrados das pontas da moldura. Também oralmente o aluno recorre a uma linguagem matemática, nesta tarefa já não se confunde tanto ao argumentar oralmente o seu raciocínio.

Na Cantina foi o último problema (Anexo 15) a ser resolvido pelo Martim, sendo o mais rápido a resolver, nesta, o aluno teve uma melhor prestação na utilização de estratégias para resolver o problema. Na primeira e segunda alínea respondeu corretamente ao que era pedido, utilizando as representações icónicas numa das alíneas para demonstrar e perceber a estrutura do padrão, pois na segunda alínea apenas apresenta numericamente o resultado para a questão (Figura 57). Isto provavelmente porque, uma vez percebido o padrão, o aluno já não teve necessidade de o desenhar.

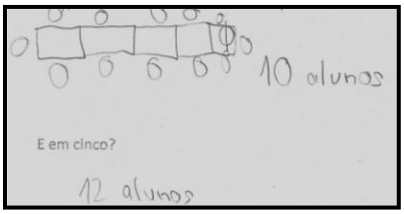


Figura 57 – Resolução do Martim para as alíneas 1 e 2 da tarefa *Na Cantina*.

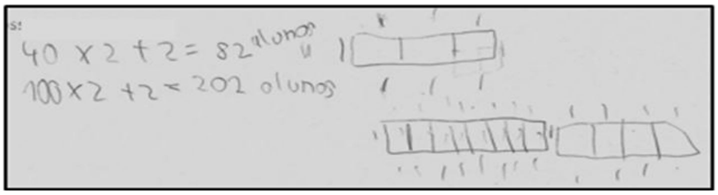


Figura 58 – Resolução do Martim para a alínea 3 da tarefa *Na Cantina*.

Contudo na alínea três o aluno já recorreu a representações icónicas e simbólicas para expressar a sua resposta (Figura 58). Utilizando expressões numéricas que correspondem à conjetura por ele descoberta, permitindo verificar o modo de visualizar do discente. Relativamente aos desenhos realizados das mesas estes parecem ser alguns exemplos de apoio ao aluno, assim como podem ser utilizados para testar a regra, comprovando através do desenho o número de pessoas, uma vez que não têm ligação com as expressões numéricas apresentadas. Na última alínea o aluno recorre à generalização distante, utilizando representações simbólicas para explicar o modo de "ver" e uma linguagem mista, ou seja, natural e matemática porque envolve a linguagem natural para explicar e utiliza símbolos matemáticos na mesma explicação (Figura 59).

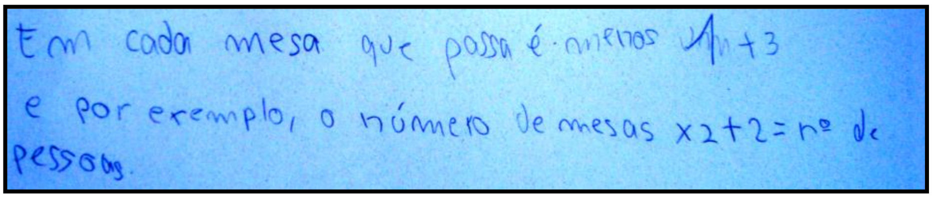


Figura 59 – Resolução do Martim para a alínea 4 da tarefa *Na Cantina*.

Nesta questão o aluno explica a expressão algébrica a que chegou, tendo sido prevista anteriormente, contudo o aluno não explica o que quer dizer com o "menos 1 +3". Neste sentido o Martim foi questionado sobre o que pretendia dizer respondendo:

> Só que eu aqui digo em cada mesa que passa, é que na seguinte, é que se tira um e mete-se três. (…) Com quatro mesas dá oito, nove e dez, então, fica oito, tira-se um e acrescenta-se três, sete mais três dá dez. (EMO2)

Portanto, entende-se que o Martim pretendia explicar outra forma de visualizar o padrão. Pois, este recorre em parte à outra fórmula, sabendo que em quatro mesas há oito pessoas, porque são as filas horizontais e verticais, logo, o número da figura vezes dois. No entanto, este subtrai um, porque sempre que se junta uma mesa, onde cabem quatro pessoas, uma delas sai, assim subtrai-se uma pessoa, acrescentando as outras três que sobram. Sendo esta uma maneira de "ver" diferente da outra que ele expressa, desta forma, esta regra é diferente e não foi prevista antes de implementar a tarefa.

Na sala de aula, após concretizar a tarefa o Martim explicou oralmente a sua conjetura, não recorrendo ao pensamento recursivo:

> O nº de mesas vezes dois, dez vezes dois, é igual aos de cima e aos debaixo [apontando para a figura, parte superior das mesas e inferior]. É o nº de mesas vezes dois, mais dois, igual ao número de pessoas. É vezes dois, porque é este lado e este [apontando de novo para o lado superior e inferior das mesas] depois mais estes lados [apontando para as pontas das mesas]. (VOMO6)

O Martim utiliza uma linguagem natural e um pouco confusa para expor o seu pensamento, explicando apenas umas das suas regras, ou seja, a que se pretendia obter antes da implementação da tarefa. O aluno revela algum controlo e progressão, porém ainda revela dificuldades em expressar-se adequadamente.

Depois de todas as tarefas estarem concretizadas o Martim foi questionado na entrevista acerca das dificuldades de comunicar. Este afirmou que sentiu mais dificuldades em comunicar por escrito, "porque oralmente eu posso apontar para as figuras e assim percebe-se mais facilmente, por escrito é um bocado difícil, porque eu não consigo descrever tudo que vejo"(EMO2), mas também disse que sentia alguma dificuldade em explicar oralmente a expressão algébrica porque se confundia ao realizar os cálculos. O Martim afirmou também que parte da sua dificuldade em escrever era não conseguir encontrar os termos matemáticos adequados para expressar o que pretendia.

Em síntese o Martim é um aluno inteligente mas por vezes desinteressado perturbando a aula. Este revelou dificuldades em algumas das tarefas implementadas, sobretudo ao nível da comunicação oral e escrita assim como, de formular expressões algébricas. Conseguiu mobilizar o conhecimento matemático que cada problema envolvia. Na fase da discussão e reflexão dos resultados o Martim desinteressava-se por vezes não estando atento e/ou incomodando outros colegas.

CAPÍTULO 6 – CONCLUSÃO

Neste capítulo far-se-á uma pequena comparação entre os dois alunos-caso, assim como abordar-se-á as principais conclusões deste estudo, quer nos alunos-caso, como na turma. Referindo ainda algumas limitações e perspetivas futuras.

1. Breve Análise Comparativa dos Casos

Depois da descrição no capítulo 5, pretende-se analisar comparando a Mariana e o Martim relativamente ao desempenho nas tarefas implementadas na sala de aula, porque, apesar de globalmente terem tido sucesso têm características diferentes. Assim, a tabela 2 sintetiza as principais semelhanças e diferenças entre os dois alunos.

Tabela 2: Síntese das principais diferenças entre os alunos.

	Mariana	Martim
Características gerais e desempenho	Resolvia as tarefas consoante a ordem das questões apresentadas.	Resolvia a primeiro a alínea da construção dos termos seguintes, passando depois para a última alínea, encontro uma conjetura para aplicar e só depois resolvias as restantes questões.
	Tinha mais dificuldades em comunicar por escrito.	Tinha dificuldades em comunicar por escrito e oralmente.
	Conseguiu desenhar todos os termos seguintes que eram pedidos na tarefa.	Em duas tarefas o aluno não conseguiu desenhar os termos seguintes.
	Interessada em ouvir e perceber as estratégias dos colegas.	Não tinha interesse em ouvir os colegas porque os modos de resolução eram idênticos ao seu.
Contagens	Apresentou expressões mais elaboradas.	Apresentou expressões mais elementares, estando uma delas em desacordo com o modo de

		"ver".
Comunicação	Apresenta uma argumentação mais sólida e menos confusa.	Argumenta de forma confusa, baralhando-se um pouco.
Padrões de crescimento – Morangos em V	Não conseguiu elaborar nenhum padrão.	Conseguiu visualizar uma forma de generalizar explicando-a à turma.

As semelhanças entre estes dois alunos é que ambos conseguiram apresentar expressões algébricas e "largar" o pensamento recursivo conseguindo chegar a uma generalização distante através do pensamento funcional, utilizando a maior parte das vezes uma linguagem natural para explicar o seu pensamento mas, recorrendo às vezes à linguagem matemática.

A comunicação dos alunos evoluiu ao longo da experiência didática, utilizando a maior parte das vezes representações simbólicas, na resolução de problemas nenhum deles apresentou dificuldades na compreensão do enunciado. As dificuldades em escrever a explicação do seu pensamento eram sobretudo por não encontrar termos matemáticos ou expressões que achassem adequadas que demonstrassem os seus raciocínios. As estratégias de resolução de problemas de ambos os alunos foram as mesmas, ou seja, a descoberta de um padrão e o recurso ao desenho e a uma lista organizada, porém a Mariana recorreu mais vezes ao desenho do que o Martim. Ambos não solicitavam a ajuda da professora durante a realização das tarefas.

Para os dois alunos a maior dificuldade foi em descobrir uma regra que se aplicasse a qualquer termo, contudo, quando descoberta raras foram as vezes em que eles a testavam e verificavam se se aplicava a todos os termos. Tal como, quando encontravam uma regra nenhum dos alunos tentavam investigar outro modo de resolver a tarefa.

Na tarefa *As Caixas de Corações* foi a única em que a Mariana e o Martim não conseguiram fazer uma generalização distante, uma vez que utilizaram o pensamento recursivo.

Estes alunos revelaram dominar os conhecimentos matemáticos já adquiridos anteriormente, pois não mostraram dúvidas nem fracassos em nenhuma tarefa. Estando assim, o conceito de perímetro e área bem assimilados, não os confundindo, sabendo aplicá-los explicitamente e implicitamente. Dominando as operações, porque em todas as tarefas recorreram a estas, demonstrando reconhecimento das suas propriedades, assim como no uso dos parênteses quando utilizadas nas expressões numéricas e algébricas. Como também não demonstravam dúvidas nos conteúdos geométricos apresentados, tais como as propriedades do quadrado, do retângulo e do cubo, e ainda, nos conteúdos fracionários. Nestes a Mariana confessou ter dificuldades, contudo não foram reveladas durante a resolução da tarefa R*egiões no Retângulo*.

A visualização foi um conceito importante e adquirido por ambos os alunos pois era assim que eles formavam as suas expressões algébricas e conseguiam conjeturar, pois sempre que eles tinham de explicar à turma a sua regra utilizam sempre a imagem como recurso à explicação, quer à turma, quer à professora. Mesmo nas entrevistas continuaram a recorrer as imagens para explicar os seus raciocínios que foram necessárias para esclarecimento de algumas dúvidas sobre as respostas apresentadas por estes dois alunos. Como estes alunos já não se recordavam de algumas respostas que tinham dado, demoravam algum tempo a pensar e a responder, às questões levantadas, contudo, ambos conseguiram explicar e perceber onde deveriam ter melhorado e como deveriam ter feito.

2. Sínteses das Principais Conclusões do Estudo

Este estudo tinha como objetivo tentar compreender quais as principais dificuldades que os alunos sentem a comunicar as suas ideias quando estão a resolver tarefas de resolução de problemas com padrões. Assim foi orientado por quatro questões gerais:

- Como se caracteriza o desempenho dos alunos na resolução de problemas de padrão, identificando as principais dificuldades?

- Como se poderão caracterizar as principais dificuldades detetadas na comunicação, quer oral, quer escrita das ideias matemáticas envolvidas na resolução de tarefas que envolvem padrões?

- Que relação se pode identificar entre a resolução de problemas propostos e a comunicação matemática?

- Que reações manifestam os alunos perante as tarefas de padrão?

No final deste estudo pode-se afirmar que o objetivo inicial proposto foi atingido. Ver-se-á as principais conclusões tendo como suporte os dados empíricos recolhidos e as principais ideias teóricas referidas no capítulo 2.

Esta investigação permitiu concluir que as principais dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de problemas de padrões, foram a generalização, descobrirem uma regra geral que a traduzisse. Verificou-se também que as estratégias de resolução utilizadas não foram muito diversificas, utilizando obviamente como principal estratégia de resolução de problemas a descoberta de padrão. Tal como Boavida et al. (2008) afirmam os alunos recorrem muitas vezes à realização de um desenho ou esquema, assim, também estes alunos recorreram ao desenho, sendo a Mariana a utilizá-lo com maior frequência e confessando que a ajudava para depois conseguir generalizar. Foi ainda utilizada a estratégia de lista organizada por ambos os alunos logo numa das primeiras tarefas, como recurso à visualização do padrão e auxílio para encontrar a generalização, comprovando que a procura de padrão recorre a estratégias adicionais para efetuar a generalização (Vale, 2009).

A última fase da exploração da resolução de problemas, ou seja, a discussão é uma das fases mais importantes, porque é nesta fase que o aluno exprime o seu raciocínio, as suas conceções e estratégias, confrontando-as com as dos seus colegas, influenciando-se reciprocamente e permitindo a aquisição de novos conteúdos (Passos, 2008; Ponte, et al., 2007; Martinho & Ponte, 2005b). A opinião dos alunos sobre esta fase foram distintas, contudo ajudou-os a clarificar e a organizar as suas ideias quando tinham de expor o seu raciocínio aos colegas, e adquiriram e visualizavam as várias formas de chegar à mesma solução. Estes resultados estão de acordo com o estudo de Barbosa (2009) onde a discussão ajuda os alunos a criarem conexões com os diferentes temas. Esta foi uma fase relevante para a Mariana porque a ajudou a perceber como utilizar a visualização como ajuda para estruturar o seu pensamento e associá-la a uma lei de formação, facto já destacado no estudo de Alvarenga (2006). Isto porque a visualização não é apenas "ver" uma mera imagem, sendo a visualização uma componente do raciocínio e da resolução de problemas (Vale, 2009).

As tarefas de padrões das quais os alunos relevaram gostar mais foram as sequências porque era mais fácil de verificar uma lei de formação, uma vez que apresentava alguns dos primeiros termos. Tal como em algumas investigações já realizadas (e.g. Alvarenga, 2006; Barbosa, 2009) os alunos conseguiram identificar as estruturas dos padrões da maior parte das tarefas, realizando os termos seguintes corretamente. Porém, também gostaram das tarefas de contagens porque os ajudou a prepararem para a exploração dos problemas.

Os alunos não tinham experiência nem tido contacto com as tarefas implementadas, logo a primeira e segunda tarefa foram as que revelaram maior dificuldade, onde quase toda a turma não as conseguiu resolver. Nestas os alunos recorreram ao pensamento recursivo, porque como afirma MacGregor e Stacey (1995) os alunos "tendem a procurar uma regra de recorrência em vez de uma funcional"(p.70).

Com a implementação das restantes tarefas este pensamento foi progredindo "transformando-se" em pensamento funcional, conseguindo também evoluir de expressões numéricas para expressões algébricas. A Mariana foi a única aluna que conseguiu apresentar uma expressão algébrica. O que vai de encontro ao que alguns autores afirmam que a generalização distante é mais difícil de atingir (e.g. Barbosa, Palhares & Vale, 2008; Stacey & MacGregor 1995, citados em Barbosa, 2009).

As representações dos alunos foram maioritariamente simbólicas, utilizando poucas vezes as representações icónicas, apenas recorriam a estas quando a tarefa o solicitava. Caso contrário utilizavam símbolos matemáticos e não matemáticos para expressarem o seu raciocínio.

Na comunicação os alunos revelaram uma grande dificuldade em comunicar, quer oralmente, quer por escrito, tal como é destacado no estudo de Barbosa (2009) e referido no estudo de Gonçalves, onde os alunos tinham dificuldades em explicar o seu raciocínio. Como Ponte (2009) confirma a linguagem natural, inicialmente é o único recurso favorável aos alunos, tal como se verificou neste estudo. Também de acordo com os resultados do estudo realizado por Henriques e Ponte (2010) a linguagem utilizada por esses alunos foi sobretudo natural, quer oralmente, quer na escrita, apresentando em algumas das tarefas uma linguagem matemática, essencialmente nas últimas tarefas. Contudo, tal como Ponte (2009) afirma, haverá uma progressão começando a "introduzir elementos simbólicos, contribuindo para desenvolver nos alunos o domínio da linguagem algébrica" (p.171). Também nestes alunos notou-se uma evolução na linguagem dos alunos, recorrendo a alguns termos matemáticos. Há a convicção de que se este estudo continuasse os alunos conseguiriam desenvolver ainda mais a sua estrutura linguística, escrita e oral.

Boavida et al. (2008) sustentam que comunicar oralmente o nosso pensamento é complicado ao nível de organização e clarificação de ideias, mas fazê-lo por escrito torna-se um processo ainda mais complexo, mas, relevante pois obriga a refletir acerca das ideias desenvolvidas. Neste sentido, e facto já evidenciado em alguns estudos (Alvarenga, 2006; Barbosa, 2009; Barbosa, Palhares & Vale, 2008) em que os alunos onde apresentaram maiores dificuldades na comunicação escrita. Sobretudo dificuldades em estruturar o seu pensamento e na escolha de termos adequados que descrevessem as ideias que pretendiam. Contudo, também oralmente havia dificuldade, essencialmente o Martim porque, inicialmente, apenas explicava o pensamento recursivo, alegando não conseguir comentar o seu pensamento funcional. Quando finalmente conseguiu explicá-lo, fazia-o de uma forma confusa, sendo em parte, para ele, mais fácil explicar por escrito. A Mariana, oralmente conseguia apresentar um melhor discurso, às vezes mais organizado e discriminado. A maior parte da turma apresentava dificuldades em argumentar oralmente e por escrito, sendo a maior dificuldade.

Todavia um pequeno grupo de alunos revelou estar mais à vontade para explicar oralmente do que explicar por escrito. De qualquer modo estes alunos não tinham prática de justificar as suas ideias, tendo-se notado uma evolução ao longo da experiência didática, o que mostra que é possível pôr os alunos a comunicar, para isto é criar oportunidades e dar-lhes tempo.

Porém, apesar das dificuldades em mobilizar os conhecimentos matemáticos com a continuidade da resolução destas tarefas os alunos foram ultrapassando as suas dificuldades, permitindo como Boralho e Barbosa (2009) afirmam fazendo conexões entre vários temas matemáticos, de forma a rever conteúdos já adquiridos anteriormente.

Interligando a resolução de problemas de padrões com a comunicação pode-se também concluir que estas tarefas proporcionam o desenvolvimento da comunicação escrita e oral, e ainda, do pensamento algébrico e a visualização. Assim, os alunos conseguiram fazer conjeturas e traduzi-las em linguagem matemática, adquirindo de modo natural o conceito de variável, evoluindo ainda na sua forma de explicar e escrever as suas conjeturas. Tal como Vale (2012) afirma, estas tarefas proporcionam aos alunos a realização de generalizações baseadas nas propriedades das imagens, traduzindo o modo de “ver” dos alunos. Porém para outros alunos da turma, não conseguiram utilizar o raciocínio funcional, isto porque é um raciocínio complexo o que pode derivar da incapacidade de visualizar e do uso sistemático do pensamento recursivo (Barbosa, Vale & Palhares, 2009).

A turma em geral demonstrou interesse e empenho na realização destas tarefas. A Mariana demonstrou sempre querer aprender mais e curiosidade perante o facto de haver vários caminhos para conseguir encontrar a mesma resposta, facto que ela não estava habituada a verificar, porque apenas realizava as típicas tarefas mecânicas. O Martim apesar de não demonstrar tanto interesse em algumas tarefas quando estava atento participava e revelava querer mostrar o seu pensamento e em responder às questões que eram realizadas ao aluno ou à turma acerca da resolução ouvida.

3. Reflexão Final

No fim da realização desta investigação, pode-se afirmar que correu como previsto, ou seja, que em parte foi de encontro às principais ideias expressas na literatura e aos resultados de alguns dos estudos realizados e revistos sobre padrões. Depois de meses de trabalho e chegando ao fim pode-se afirmar que foi um trabalho realizado com gosto e com o qual foi possível compreender melhor o trabalho realizado pelos alunos nas tarefas propostas e identificar algumas das suas principais dificuldades.

A metodologia adotada foi adequada porque permitiu uma recolha de informação sistemática e uma análise que foi de encontro ao objetivo e às questões orientadores para esta investigação. Contudo, houve determinados pormenores e decisões que podem ser considerados aspetos limitadores para o presente estudo. O principal contratempo desta investigação foi sem dúvida a falta de tempo para a organização do trabalho, recolha de dados e estruturação e análise dos dados. Sobretudo falta de tempo para refletir no que fazer, como fazer e sobre o que foi feito.

Outras limitações que se puderam identificar foram:

(a) Na proposta didática na fase das contagens, relativamente na tarefa dos discos, tarefa esta da ficha de avaliação, foi difícil de ver na imagem apresentada as expressões "desenhadas". Os alunos apresentaram as expressões corretas, mas como utilizam o desenho para traduzir o modo de ver as expressões foi um lapso só apresentar uma imagem. Porque pedia-se mais do que um modo de contar, o que implicou que os alunos sobrepusessem os modos de ver na mesma figura, ficando complicado de perceber os três modos diferentes. Devia-se ter apresentado tantos desenhos quantos os modos que se pedia para ver/apresentar as expressões;

(b) Houve dificuldades em elaborar as categorias de análise uma vez que a resolução de problemas e a comunicação estão interligadas e torna-se difícil separar o que deveria ser considerado numa categoria ou noutra. Poderá não ter sido a melhor forma de categorizar os dados, mas foi a mais viável de modo a obter uma determinada estrutura e não repetir conteúdos nos dois temas;

(c) Este estudo pode ter prejudicado os restantes alunos, para além dos alunos-caso, porque por um lado, teve-se que centrar-se principalmente nos alunos escolhidos para a investigação, sendo eles que iam preferencialmente ao quadro explicar o seu raciocínio e eram eles o foco de atenção para as fotografias e vídeos, podendo levar os restantes alunos a pensar que eram rejeitados. Por outro lado, não houve um incentivo ao uso de tabelas no final das tarefas de modo a organizarem o pensamento;

(d) Ser simultaneamente professora e investigadora e a falta de experiência na realização de investigações prejudicou as observações, pois não era possível tomar notas de campos no momento e realizar um diário de todos os alunos, assim como, iniciar o trabalho primeiramente com cinco alunos. Assim, apenas foram tomadas algumas notas mais relevantes, mas não muito pormenorizadas;

(e) O facto de não se ter realizado um inquérito prévio à turma não se apurou a opinião de todos os alunos relativamente à matemática, sendo apenas baseada nas observações que a investigadora realizou.

(f) Não se ter dado mais tempo para se explorar a experiência didática e eventualmente construído algumas tarefas.

Por fim, há algumas recomendações que se podem deixar para futuros estudos ou continuidade desta investigação. Tais como, prolongar o tempo do estudo de modo a poder-se obter uma continuidade de resultados verificando uma evolução mais consistente nos alunos a nível de estratégias e comunicação. Outra recomendação seria para além da implementação dos problemas na sala de aula a criação de um espaço destinado à resolução e exploração de problemas uma vez por semana. Isto para não interferir e "roubar" tempo para a exploração de conteúdos do programa e preparação para os exames nacionais, podendo os alunos com mais competências ajudar os seus colegas com dificuldades, ao mesmo tempo que desenvolviam a comunicação matemática uns com os outros. Seria interessante desenvolver um estudo sobre a proposta didática mas com professores. A última sugestão seria analisar os manuais mais recentes do 2ºciclo do ensino básico na disciplina de matemática de modo a verificar quantos deles recorrem não só à exploração da resolução de problemas, como à resolução destas tarefas envolvendo padrões.

PARTE III – REFLEXÃO GLOBAL

Esta secção aborda a reflexão acerca da PES I e PES II no ano letivo de 2011/2012. Assim, refere aspetos positivos e negativos ao longo do ano letivo e algumas opiniões pessoais.

Reflexão Global

> Ser educador requer muitas qualidades pessoais, umas formadas através da sua educação, outras através da sua prática como a humildade, a amorosidade, a coragem, a tolerância, a decisão, a segurança (…) (Monteiro, 2005, p.140).

Diz-se que o ser humano está sempre em constante aprendizagem, pois bem, é desta forma que eu posso afirmar que este ano letivo 2011/2012 foi sem dúvida um ano repleto de grandes aprendizagens e de boas experiências. Em primeiro lugar adquiri experiência com o contacto com os alunos, reforçando cada vez mais o desejo de continuar esta profissão, que tanto tem de gratificante como de trabalhoso.

Como futura professora sinto-me gratificada com a minha profissão, pois apesar de ser um pouco desvalorizada, culpa em parte de alguns meios de comunicação que transmitem apenas os aspetos negativos da educação levando os alunos e suas famílias a questionarem-se acerca do papel da escola e do professor nos dias de hoje (Morgado, 2005), porém, ser professor é das profissões mais importantes que existem.

Um professor tem nas suas mãos crianças que necessitam de aprender e o professor é a chave dessa aprendizagem, é como se a criança fosse uma planta e necessitasse da “luz” do professor para ser alimentada, ou seja, para crescer. Medeiros (2006) afirma que os alunos adquirem a sua formação não só na família mas também na escola, deste modo, a personalidade, o caráter, os gostos, opiniões e decisões de muitos alunos dependem das atitudes e decisões do professor. Se o pré-escolar é essencial para um aluno, o 1º ciclo é ainda mais importante, no sentido que é a base da aprendizagem e aperfeiçoamento de determinados conceitos e capacidades, como a escrita, leitura e comunicação. Contudo, todo o professor é importante, porque o ensino é um conjunto de anos, onde o que se aprendeu nos anos anteriores vai sendo aprofundado.

O ano letivo começou no 1º semestre com a atribuição das turmas aos pares de estágio. Quando soube que iria lecionar um 2º ano, na Prática de Ensino Supervisionada I senti um misto de receio, medo e entusiasmo. Receio e medo, não só porque a turma estaria sob a minha responsabilidade e sendo eu inexperiente tinha medo de falhar, caso isso acontecesse, quem sairia mais prejudicado seria a turma. Contribuindo para agravar este receio, tinha o facto de ser um 2º ano, pois é um dos anos essenciais no 1º ciclo para desenvolver determinadas competências que se irão aprofundar nos restantes anos. Simultaneamente senti entusiasmo porque ainda eram pequeninos e daria para trabalhar conexões entre os gostos infantis do dia-a-dia com os conteúdos a abordar na sala de aula. No 2º semestre foi-me atribuída, na PES II, um 5ºano, fiquei emocionada e com inspiração para iniciar a minha experiência neste contexto. Queria aprender e contactar com crianças de maior idade e saber/observar as suas atitudes, uma vez que apesar de serem todas crianças quer no 1º ciclo quer no 2º ciclo, a verdade é que a sua maturidade e forma de reagir para com o professor são diferentes e eu estava curiosa para conhecer essa diferença. Ao longo destes dois semestres senti que tive determinadas falhas nos dois contextos de ensino, algumas culpa minha, outras por eventuais imprevistos, porém aprendi e cresci com esta experiência, tendo sempre no pensamento que da próxima farei melhor, aperfeiçoando-me quer pessoalmente quer profissionalmente.

Em ambos os contextos tive algumas falhas, tais como por vezes não ter uma dinâmica adequada na sala de aula, não conseguir ter criatividade suficiente para determinadas tarefas e temas, no entanto, ao longo destes meses esforcei-me para melhorar ambas as partes. Dinamicamente sei que se deveu ao facto de a minha falta de autoridade, ou seja, de sendo professora estagiária não ser encarada pelos alunos como tendo a mesma autoridade do professor, ouvindo por vezes, em ambos os contextos, que não era a professora da turma. Ouvir esses comentários deixou-me triste e desiludida em parte com os meus futuros colegas de trabalho, porque se os alunos tinham essa opinião foi devido à ideia transmitida por alguns dos professores cooperantes. Quanto à minha criatividade sei que evolui bastante de um contexto para o outro, criando aulas mais motivantes e interessantes, de modo a despertar o interesse dos alunos.

Através da prática de ensino supervisionada pude contactar com o contexto real, bem como implementar e verificar determinadas estratégias que adquiri na teoria, comprovando que por mais que aprendamos teoricamente apenas na prática adquirimos uma aprendizagem mais concreta e melhor. Assim como, verificamos que nem todas as estratégias resultam e têm de ser adaptadas e reajustadas dependendo de aluno para aluno, porque tal como o professor também os alunos estão em constante aprendizagem e são, acima de tudo, seres humanos inconstantes e únicos, tendo cada um a sua personalidade, o seu modo de aprender e de lidar com as situações. Logo, o professor deve ter atenção à turma e a cada aluno que tem ao planificar, ao escolher as tarefas e ao lecionar as atividades. Acima de tudo um professor deve perceber os interesses e motivações dos alunos de modo a captar a sua atenção e entusiasmo para que esse participe ativamente quer na aula quer na construção da sua aprendizagem. Isto porque a transmissão de conhecimentos deve ser atrativa e abarcar os alunos, só assim é que é possível a transmissão de conhecimentos para novos contextos (Medeiros, 2006).

É relevante ter em atenção estes aspetos quando se planifica, assim, a PES I e a PES II contribuíram para desenvolver a arte de planificar e perceber que a planificação deve ser uma proposta de aula, não tendo de ser seguida à risca, porque o mais importante é a aprendizagem e o ritmo de trabalho dos alunos. Assim, na PES I, que decorreu no 1º ciclo foi possível de o fazer, pois, uma vez que o horário letivo é reajustado como o professor desejar, este pode trocar ou dedicar mais tempo a uma disciplina do que a outra, em prol dos seus alunos. Contudo, na PES II, realizada no 2º ciclo já não é possível isso acontecer, porque neste contexto os professores atribuem maior significado à planificação e ao programa das disciplinas tendo de os cumprir na totalidade, pois influenciando estas atitudes estão os exames nacionais do 6º ano. Mas, este tipo de ação nem sempre é a melhor, porque o professor preocupa-se mais em seguir o programa, em não deixar nada por abordar, ou até mesmo abordar o manual até ao fim, esquecendo-se das principais personagens, os alunos, contribuindo por vezes para o desinteresse e desmotivação da turma perante a disciplina ou pela escola, levando a um insucesso escolar dos estudantes. É importante salientar que o manual deve ser utilizado como um material didático e de apoio ao aluno, mas não deve ser o único recurso a ser utilizado na sala de aula (Guimarães, 2009). Durante a PES II tentei cumprir as planificações para as várias disciplinas, no entanto, havia aulas em que me alongava em determinados conteúdos porque achava essencial explicar aos alunos, pois notava que alguns deles não estavam a compreender a matéria. Porém, devido a essa decisão, os professores cooperantes nem sempre estavam de acordo, revelando preferência pelo cumprimento da planificação aconselhando que os alunos têm de estudar em casa e "nós" professores temos de dar a matéria. Diversifiquei também nos recursos utilizados, não me apoiando apenas no manual escolar, em ambos os contextos de 1º e de 2º ciclo, utilizando outros recursos tal como Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997) sugerem: fichas de trabalho, materiais manipuláveis, projetor, quadro interativo, entre outros.

Ao planificar deparei-me com certas dificuldades em algumas das disciplinas, principalmente no 1º ciclo. Tais como, na área da matemática sempre que era para rever algum conteúdo já abordado não conseguia preparar atividades sistematicamente ricas e interessantes para os próprios alunos, acabando por vezes por implementar tarefas um pouco rotineiras para desenvolver por exemplo as estratégias de cálculo mental. Outra área foi a língua portuguesa, pois inicialmente não sabia como criar tarefas adequadas à faixa etária dos alunos e qual o modo de trabalho mais adequado, pois necessitavam de adquirir hábitos de escrita, mas individualmente alguns alunos demoravam muito tempo, se fosse um texto realizado em conjunto alguns não estavam atentos não assimilando a estrutura do texto em questão. Quanto à motivação para a escrita ia variando entre vídeos, imagens, jogos, onde a partir destes os alunos escrevessem, tendo obtido bons resultados.

Tal como referi anteriormente, se nós, futuros professores, adquirimos conhecimentos com a prática, também os alunos adquirem melhor a sua aprendizagem dessa forma. Torna-se assim relevante que as aulas sejam abordadas de modo indutivo, resultando a aprendizagem da experimentação, ou seja, os alunos experimentam e depois é que chegam a conclusões, à aprendizagem de determinados conceitos. Enquanto no método dedutivo os alunos estudam e têm conhecimento da teoria antes de experimentarem ou praticarem algo. Deste modo ao planificar e lecionar tive sempre em atenção o método indutivo, fazendo determinadas tarefas/atividades ou materiais em que os alunos verificassem, experimentassem ou praticassem certos conteúdos, chegando eles próprios à regra ou conceito que se pretendia ensinar. Concluo que este método resulta, porque observei a satisfação da turma perante atividades inseridas no método e ouvindo a insatisfação de aulas preparadas segundo o método dedutivo.

Exemplos dos métodos indutivos foram por exemplo no 2º ciclo, nas aulas de ciências da natureza ao realizar experiências para verificar as propriedades do ar; na matemática para descobrir o "pi" os alunos realizaram uma tarefa prática; na língua portuguesa para inserir os advérbios; primeiro os alunos contactaram com exemplos de frases que continham advérbios, descobrindo o que eram mais tarde; a história e geografia de Portugal através da análise de documentos ou imagens que transmitem conteúdos; assim, em todas estas atividades os alunos demonstraram interesse e participação. Porém, apesar desta metodologia resultar, o professor deve adotar uma metodologia de acordo com as características da turma em geral e dos alunos em particular.

Quando se aborda a planificação de aulas associa-se indiretamente e diretamente os programas que são as orientações curriculares para os professores e sua prática letiva, elaborando-se deste modo um currículo explícito com determinados objetivos e experiências que os alunos devem atingir e realizar (Morgado, 2005). Tanto para a PES I como para a PES II aprofundei os meus conhecimentos de articular e utilizar os programas para a planificação das aulas. Assim, os programas a que recorri para a minha prática de ensino supervisionada foram o "Currículo Nacional", os "Programas de Português do Ensino Básico", o "Programa de Matemática do Ensino Básico", o "Programa de Estudo do Meio do 1ºciclo", o "Programa de Ciências da Natureza" e o "Programa de História e Geografia de Portugal", assim como de outros recursos para ajudar a planificar. Entre o 1º e o 2º ciclo não notei nenhuma mudança significativa dos programas, pois em ambos os ciclos eles têm a mesma função, contudo a única diferença é que no 1º ciclo existe a possibilidade do professor articular e interligar as várias áreas curriculares, ao contrário do 2º ciclo que existe apenas um programa específico para cada vertente. No entanto, para além de elaborar um currículo explícito, também abordei o currículo oculto que todos os professores acabam por abordar, ou seja, os valores – paciência, responsabilidade, compreensão pelo outro, respeito, saber ouvir, entre outros (Morgado, 2005), valores estes que tive promover em algumas situações controvérsias, quer no 1º ciclo como no 2ºciclo, como insultarem-se uns aos outros, como baterem uns nos outros, como não respeitarem a opinião de certos colegas.

Do mesmo modo que acima referi que ao conceito de planificação estava associado aos programas, também a estes dois está associado o conceito de reflexão. Sendo o ensino-aprendizagem um processo bastante complexo envolvendo diversos agentes torna-se necessário haver uma reflexão acerca do trabalho desenvolvido pelo professor no sentido de analisar que estratégias resultam e quais devem ser melhoradas para contribuir para o sucesso da aprendizagem dos discentes. Assim, a reflexão ajuda o professor "a ter uma imagem mais completa daquilo que os alunos sabem e são capazes e, sobretudo, de que forma pode potenciar o desenvolvimento desses conhecimentos e capacidades" (Fonseca, Brunheira & Ponte, 1999, p.13).

Deste modo, PES I e PES II estiveram envolvidas em reflexões, ou semanais ou diárias, porém, a meu ver, houve falhas nestas reflexões das quais senti que saí um pouco prejudicada. Uma vez que me encontrava num sistema de formação e em aprendizagem também, e tendo em conta que não tinha experiência, as reflexões eram momentos cruciais para a minha evolução e aquisição de novos métodos de ensino ou melhorar os meus, contudo, nem sempre consegui atingir isto. Porque na PES I e II as reflexões eram realizadas maioritariamente por mim e pela minha colega de estágio, pois o feedback de alguns dos professores cooperantes era sempre o mesmo, que a aula correu bem, raramente ouvia uma boa crítica, entende-se por crítica a análise reflexiva da aula, ou seja, aspetos que poderia melhorar e outros que deveria manter. Ora, apenas tinha contato com a maior parte dessas críticas quando os professores orientadores me iam observar. Assim, futuramente poderia haver uma reunião com os professores cooperantes de modo a transmitir-lhes como deveriam ser os feedbacks, para que isso ajudasse os futuros professores na aquisição de conhecimentos.

Aspeto que foi melhorado, foi a observação/avaliação pelos professores orientadores, pois na PES I apenas havia uma aula de observação/avaliação, o que na minha opinião não é suficiente para se conseguir julgar um bom ou mau professor, logo, este aspeto melhorou na PES II aumentando para duas aulas de observação/avaliação. Sem dúvida que as reflexões pós-aulas foram as que mais contribuíram para a minha aprendizagem porque ajudavam-me a perceber o que eu devia melhorar dentro da sala de aula e com os alunos. Nem sempre foi possível concretizar estas reflexões pois alguns professores preferiam fazê-las depois.

Outro aspeto essencial e que deve continuar do mesmo modo que se manteve ao longo deste ano letivo é a componente dos seminários. Porque, para além de retirar determinadas dúvidas com os professores, também foi nestes que aprendi várias estratégias para implementar didaticamente, uma vez que carecia de críticas que me orientassem para o bom caminho. A troca de ideias, de experiências e estratégias ao longo dos seminários, entre os restantes colegas de turma foram realmente eficazes para eu evoluir como professora.

Na PES II foi possível realizar um trabalho de caráter investigativo. A escolha da área e do tema foi algo que me afligiu um pouco, porque não sabia o que escolher, porém, depois de algumas observações e de um pouco da experiência do 1º ciclo consegui escolher a área que mais me agradava e, depois do período de observação da turma do 5º ano, detetei o mesmo problema que tinha observado no 1º ciclo, ou seja, a falta de comunicação. Deste modo, uma vez que escolhi eu própria o tema que me motivou e suscitou bastante interesse foi sem dúvida um trabalho agradável de realizar. Para além de conseguir compreender melhor os alunos e algumas das dificuldades que eles sentiam na área da matemática, sentindo-me mais “próxima” e capaz de compreender os discentes.

Logo, depois de concretizado este estudo posso afirmar que contribuiu muito para a minha formação profissional e pessoal, porque foi gratificante, adquiri novos métodos de trabalho, através da literatura que tive de ler compreendi e adquiri determinadas ideias, conceitos e teorias necessárias para a aprendizagem de hoje em dia. Aprofundei ainda o meu conhecimento acerca dos métodos de investigação existentes e quais as técnicas mais adequadas para cada um. A nível pessoal concretizei um dos meus objetivos crescendo como pessoa e como futura professora. Aponto como desvantagem o pouco tempo para o qual tínhamos de realizar este trabalho investigativo, não podendo realizá-lo tal como eu pretendia, porque para além da limitação do tempo também tinha a limitação das páginas que poderiam ser escritas, assim, passei de cinco alunos-caso para apenas dois. Ter de escolher dos cinco apenas dois alunos foi uma decisão difícil, tendo de ponderar muito bem a minha escolha para não afetar o próprio estudo. Assim, não consegui em simultâneo concretizar o meu estágio e elaborar/escrever na minha investigação, pois, como Bogdan e Biklen (1994) afirmam que o observador não deve dedicar tempo a planificar e dar aulas, mas sim, preocupar-se apenas com a investigação. Deste modo, só consegui realmente começar a escrever depois da PES II terminar dedicando-me inteiramente à análise e escrita do estudo apresentado neste relatório.

Foi um ano completo de aprendizagens, contudo sei que ainda tenho um longo caminho à minha frente, essencialmente, porque estou consciente de algumas das minhas limitações, ou seja, uma vez que apenas efetuei a prática de ensino supervisionada no 2º ano e 5º ano do ensino básico, e visto que a minha formação habilita-me para o ensino de todo o 1º ciclo e todo o 2º ciclo fico com quatro anos nos quais não tenho qualquer experiência, logo, tenho noção que ainda tenho uma "grande e admirável viagem" pela frente, na qual espero ser bem-sucedida. De modo a aplicar o que aprendi, não só este ano, mas também, ao longo de toda a minha formação profissional, assim, posso afirmar que «só sei que nada sei» (Sócrates), porque o conhecimento que possuo neste momento não é suficiente para o futuro, devendo aprofundá-lo cada vez mais, não estagnando, e devo ter consciência de que não sei tudo, por isso devo estudar e melhorar os meus aspetos menos bons.

PARTE IV – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P. (1988). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática*, *8*, 7-10 e 35. Lisboa: Faculdade de Ciências de Lisboa.

APM (1988). *A natureza e organização das actividades de aprendizagem e o novo papel do professor.*APM.

Alvarenga, D. (2006). A exploração de padrões como parte da experiência matemática de alunos do 2ºciclo. Braga: Universidade do Minho. (tese de Mestrado).

Barbosa, A., Palhares, P. & Vale, I. (2008) Avaliação do Desempenho de Alunos do 2º ciclo na Resolução de Problemas Envolvendo Padrões. In Menezes, L., Santos, L., Gomes, H., & Rodrigues, C. *Avaliação em Matemática - problemas e desafios.* (p. 89-100) Viseu: FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia.

Barbosa, A. C. (2009). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2ºciclo do ensino básico.* Braga: Universidade do Minho (Dissertação de Doutoramento).

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico - Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1º. e 2º. Ciclos do Ensino Básico .* Lisboa: Ministério da Educação - Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Boavida, A. M. & Menezes, L. (2012). Ensinar matemática desenvolvendo as capacidades de resolver problemas, comunicar e raciocinar: contornos e desafios. In L. Santos; A.P. Canavarro; A.M. Boavida; H. Oliveira; L. Menezes; S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino da Matemática* (p.287-295). Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação - Uma Introdução à Teoria e aos Métodos.* Porto: Porto Editora.

Borralho, A. & Barbosa, E. (2009). Exploração de Padrões e Pensamento Algébrico. *Padrões: Múltiplas perspetivas e contextos em educação matemática* (p.59-68). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Campos, E. (2001). *História da Educação.* Porto: Escola Superior de Educação de Santa Maria.

Clement, L. L. (September 2004). A Model for Understanding, Using, and Connecting Representations, in *Teaching Children Mathematics*. *The National Council of Teachers of Mathematics* , 97-102.

Devlin, K. (2002). *Matemática: A ciência dos padrões.* Porto: Porto Editora.

Domingues, C. & Martinho, M. H. (2012). Desenvolvimento do raciocínio matemático e as práticas de comunicação numa aula. In L. Santos; A.P. Canavarro; A.M. Boavida; H. Oliveira; L. Menezes; S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino da Matemática* (p.321-334). Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Ferreira, H. I. (2004). *A evolução do ensino da matemática em Portugal no século XX: Presença de processos criativos.* Braga: Universidade do Minho. Dissertação de Mestrado.

Fonseca, H., Brunheira, L., & Ponte, J. P. (1999). As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. *Actas do ProfMat 99.* Lisboa: APM.

Guimarães (2009) *A importância de ser professor no 1º ciclo: conhecimento escolar e manuais escolares*. Braga: Universidade do Minho. (consultado em: http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/10328/1/IIJornadasEduca%C3%A7%C3%A3o-Fafe.pdf).

Goldin, G. (2008). Representation in mathematical learning and problem solving. In L.D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 177-201). Mahwah, NJ: Taylor and Francis.

Gonçalves, A. C. (2008). *Desenvolvimento do sentido do número num contexto de resolução de problemas em alunos do 1º Ciclo do Ensino Básico.* Lisboa: Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências e Departamento de Educação (Dissertação de Mestrado).

Henriques, A. & Ponte, J. P. (2010). A comunicação matemática no contexto de actividades de Investigação: O uso de representações matemáticas. In J.M. Matos, A. Domingos, C. Carvalho, P.C. Teixeira (Eds). *Investigação em Educação Matemática - Comunicação no Ensino e na aula de Matemática* (p.320-334). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Lessard-Hébert, M., & Gabriel Goyette, G. B. (2005). *Investigação Qualitativa - Fundamentos e Práticas.* Lisboa: Instituto Piaget.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1995). The Effect of Different Approaches to Algebra on Students' Perceptions of Funtional Relationships. *Mathematics Education Research Journal, Vol.7, No.1* , 69-85.

Martens, Donna M. (2009). *Research and Evaluation in Education and Psychology: Integrating Diversity With Quantitative, Qualitative, and Mixed Methods Third Edition.* Sage, US. – tradução livre de José Portela.

Martinho, M. H., & Ponte, J. P. (2005a). Comunicação na sala de aula de Matemática: Práticas e reflexão de uma professora de Matemática. In J. Brocardo, F. Mendes & A. M. Boavida (Eds.), *Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 273-293). Setúbal: APM.

Martinho, M. H., & Ponte, J. P. (2005b). *A comunicação na sala de aula de matemática: Um campo de desenvolvimento profissional do professor.* Paper presented at the Actas do V CIBEM (CD-ROM), Ponto, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Martinho, M. H. (2009). A comunicação na aula de Matemática - O papel do professor, in *Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática .* Viana do Castelo: APM.

Medeiros, E. O. (2006). *Educar, Comunicar e Ser.* Viseu: João Azevedo Editor.

Medeiros, K. M., & Ponte, J. P. (2010). Explicar e negociar significados: as concepções e as práticas de uma candidata a professora de matemática. In J.M. Matos, A. Domingos, C. Carvalho, P.C. Teixeira (Eds). *Investigação em Educação Matemática - Comunicação no Ensino e na aula de Matemática* (p.196-210). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Menezes, L. (2000a). Comunicação na Aula de Matemática e Desenvolvimento Profissional de Professores, *in Projecto de Investigação Matemática 2000: o poder da comunicação.* Viseu: Escola Superior de Educação e Instituto de Inovação Educacional.

Menezes, L. (2000b). Matemática, Linguagem e Comunicação, *in Projecto de Investigação Matemática 2000: o poder da comunicação.* Viseu: Escola Superior de Educação e Instituto de Inovação Educacional.

Mestre, C. & Oliveira, H. (2012). A exploração de tarefas matemática para o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4º ano de escolaridade. In L. Santos; A.P. Canavarro; A.M. Boavida; H. Oliveira; L. Menezes; S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino da Matemática* (p.417-432). Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

Monteiro, A. R. (2005). *História da Educação - Uma perspectiva.* Porto: Porto Editora.

Morgado, J. C. (2005). *Currículo e Profissionalidade Docente.* Porto: Porto Editora.

Passos, C. L. (2008). A comunicação nas aulas de matemática revelada nas narrativas escritas em diários reflexivos de futuros professores. *Interacções, V.4 nº8* , 18-36.

Pinto, F. L., & Santos, L. (2010). A comunicação em sala de aula no desenvolvimento de uma tarefa de natureza exploratória. In J.M. Matos, A. Domingos, C. Carvalho, P.C. Teixeira (Eds). *Investigação em Educação Matemática - Comunicação no Ensino e na aula de Matemática* (p.87-101). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Pólya, G. (1945/1977). *A arte de resolver problemas (How to solve it)*. Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). A dinâmica da aula de matemática. *Didáctica da Matemática*. Lisboa: DES do ME.

Ponte, J. P. (2001). A investigação sobre o professor de Matemática: Problemas e perspectivas. *Educação Matemática em Revista, 11*, 10-13.

Ponte, J. P. (2003). O ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? In *O ensino da Matemática: Situação e perspectivas* (pp. 21-56). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Ponte, J.P. (2009). Uma agenda para investigação sobre padrões e regularidades no ensino-aprendizagem da Matemática e na formação de professores. *Padrões: Múltiplas perspetivas e contextos em educação matemática* (p.169-175). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Ponte, J. P., Quaresma, M. & Costa, M.J. (2010). Comunicação e representações na aprendizagem dos números racionais no 5ºano de escolaridade. In J.M. Matos, A. Domingos, C. Carvalho, P.C. Teixeira (Eds). *Investigação em Educação Matemática - Comunicação no Ensino e na aula de Matemática* (p.336-349). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Projeto Curricular de Turma (2011/2012). Escola 2,3 Dr. Pedro Barbosa. Viana do Castelo.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT. (Artigo originalmente publicado em 1991 na revista ZDM).

Smith, M. S., Hughes, E. K., Engle, R. A., & Stein, M. K. (2009). Orchestrating Discussions. *Mathematics Teaching in the Middle School, vol. 14* , 548-556.

Serrazina, M. (2012). Contributo das Práticas de Formação para as Práticas Letivas: Um estudo Exploratório. In L. Santos, A.P. Canavarro, A.M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino da Matemática* (p.443-454). Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). *Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão.* EUA: Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4), 268-275.

Tripathi, P. N. (April 2008). Developing Mathematical Understanding through - Multiple Representation. *in Mathematics Teaching in the Middle School - NCTM, V.13 No.8* , 438-445.

Vale, I. (2004). Algumas Notas sobre Investigação Qualitativa em Educação Matemática – O Estudo de Caso. *Revista da Escola Superior de Educação - 5º volume.* (2004). Viana do Castelo.

Vale, I. & Pimentel, T. (2004). *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico.* Lousã: LIDEL.

Vale, I., & Pimental, T. (2005). Padrões: um tema transversal do currículo. *Educação e Matemática, nº85* , 14-20.

Vale, I. (2009). Das tarefas com padrões visuais à generalização. XX SIEM. Em J. Fernandes, H. Martinho & F. Viseu (Org.). Actas do Seminário de Investigação Matemática, pp. 35-63. VC: APM.

Vale, I. & Pimentel, T. (2009). Visual Pattern Tasks with Elementary Teachers and Students: a Didactical Experience. *Padrões: Múltiplas perspetivas e contextos em educação matemática* (p.151-162). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L., et al. (2009). *Padrões no Ensino e Aprendizagem da Matemática - Propostas Curriculares para o Ensino Básico.* Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo - Projeto Padrões.

Vale, I., Pimentel, T., Alvarenga, D., & Fão, A. (2011). *Uma Proposta Didáctica Envolvendo Padrões - 1º e 2º ciclos do ensino básico .* Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo. (Programa de Formação Contínua).

Vale. I. (2011). *A Aula de Matemática e as Tarefas*. SICII – Didática da Matemática (materiais não publicados).

Vale, I. (2012). As Tarefas de Padrões na Aula de Matemática: Um Desafio para Professores e Alunos. *Interações*. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo , n 20, 181-207.

Vale, I. & Pimentel, T. (2012). Um novo-velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em matemática. In L. Santos, A.P. Canavarro, A.M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino da Matemática* (p.347-360). Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Woleck, K. R. (2001). Listen to their pictures, an investigation of children's mathematical drawings. In Cuoco, A. A. & Curcio, F. R. (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics.*(p. 215-227). Virginia: Yearbook National Council of Teachers of Mathematics.

Websites:

- http://www.escolasdoatlantico.pt/produtos/documentos-orientadores

- http://www.jf-monserrate.com/

Anexos

Anexo 1

Plano de Aula – Língua Portuguesa Ano:___5º___ Turma: _A___ Data:__05-03-2012__ Ano letivo:__2011/2012___ O/A professor(a):__Maria Rafaela Marques Bento Afonso__ Unidade didática: _4_ A estagiária: ____Andreia Ribeiro__ Horas: _12.00 – 13.30__	
OBJETIVOS: **Compreensão do oral** • Prestar atenção ao que ouve, de modo a tornar possível: - cumprir instruções dadas; - indicar o essencial da informação ouvida; - responder a perguntas acerca do que ouviu. **Expressão oral:** • Usar da palavra de modo audível, com boa dicção e num débito regular. • Produzir enunciados, controlando as estruturas gramaticais correntes. • Ler, em público, em coro ou individualmente. **Leitura:** • Localizar a informação e avaliar a sua pertinência. • Ler de modo autónomo. • Utilizar técnicas adequadas ao tratamento da informação. • Ler em voz alta com fluência e expressividade. **Escrita:** • Redigir com correção enunciados para responder a diferentes propostas de trabalho: - organizar as respostas de acordo com o foco da pergunta ou pedido. **Conhecimento Explícito da Língua:** • Explicitar propriedades distintivas de classes e subclasses de palavras.	CONTEÚDOS: Lenda Conteúdo a introduzir: a classe dos advérbios (advérbio de quantidade e grau, negação e afirmação).
RECURSOS: Manual, pp.__140, 141 e 142______	OUTROS RECURSOS: lendas das ilhas dos Açores, enigmas, PowerPoint da “Lenda dos nove irmãos”, PowerPoint acerca dos advérbios.

ESTRATÉGIAS/ATIVIDADES

- Abertura da lição e escrita do sumário.
- Organização da turma em nove grupos.
- Atividade de descoberta de um dos temas da aula através de um enigma.
- Breve diálogo acerca da definição de lenda.
- Visionamento de duas pequenas lendas e diálogo sobre as mesmas.
- Análise da imagem da "lenda dos nove irmãos" (página 140, em PowerPoint) sendo a turma questionada:

- Quem serão as personagens da imagem?
- Porque é que são 9 meninos vestidos com uma camisola verde e um com um manto azul?
- O que acham que vai acontecer na lenda?
- Porque é que são 9 montanhas?
- Que ligação pode haver entre as duas imagens?

- Visualização em PowerPoint de " A lenda dos nove irmãos".

Uma vez que a sala vai estar dividida em nove pontos, estando os alunos distribuídos de igual modo, no PowerPoint da lenda, quando chegar à parte do terramoto, os discentes serão questionados:

- Vocês estão em cada uma das ilhas, querem encontrar-se uns com os outros, como se poderiam deslocar?

- Estes 9 pontos representam as 9 ilhas e os nove irmãos. Cada mesa terá uma lenda acerca de cada ilha que se vai revelar no fim da visualização do PowerPoint. Cada grupo lê a sua lenda e depois reconta à turma.
- Outra curiosidade com que a turma vai ser questionada é se sabem a razão de o arquipélago se chamar Açores.
- Leitura da lenda no manual.
- Ao fim da leitura vão ser questionados:

- Quem tem irmãos, a relação entre vós também é assim pacífica?
- E vocês, também fariam tudo para irem ter com os vossos irmãos ou família?
- Que sentimentos acham que estão presentes na lenda?

- Realização da ficha de interpretação de leitura do manual, em conjunto.
- Introdução dos advérbios de afirmação, negação e de quantidade e grau através de um PowerPoint. Realização do exercício 1.3. da ficha de funcionamento da língua do manual.

AVALIAÇÃO:

Observação do empenho e prestação dos alunos nas atividades propostas.

SUMÁRIO: - Leitura e interpretação do texto "A lenda dos nove irmãos". - Noção de lenda. - A classe dos advérbios: afirmação, negação, quantidade e grau.	OBSERVAÇÕES: aula de 90 minutos

Anexo 2

<table>
<tr><td colspan="2">Plano de Aula – História e Geografia de Portugal
Ano:___5º___ Turma: _A___ Data:__08-05-2012__ Ano letivo:__2011/2012___
O professor: __Maria Emília Carvalho__ Unidade didática: _Tema B - Subtema: 3___
A estagiária: ____Andreia Ribeiro__ Horas: _10.20 – 11.05__</td></tr>
<tr><td>OBJETIVOS:
- localizar no tempo e no espaço a exploração marítima;
- identificar as cidades descobertas na índia;
- formular hipóteses simples acerca de alguns acontecimentos da expansão marítima;
- compreender a nomeação de vice-reis ou governador - geral;
- identificar os produtos comercializados entre Portugal e o Oriente;
- analisar e tratar de diferentes tipos de informação;
- compreender a ação dos missionários jesuítas.</td><td>TEMAS/TÓPICOS/CONTEÚDOS:

Tema B – Do século XIII à União Ibérica e Restauração (séc. XVII)
Subtema 3 – Portugal nos séculos XV e XVI:
- O Império Português no século XVI:
- Os territórios na Ásia.</td></tr>
<tr><td>RECURSOS:
Manual, pp.______151;152;153______
Caderno de atividades, pp.___________</td><td>OUTROS RECURSOS:
- Documento A
- Imagem B e C
- Mapa D</td></tr>
<tr><td colspan="2">ESTRATÉGIAS/ATIVIDADES
• Breve síntese da expansão portuguesa.
• Visualização e exploração do mapa-figura 50 da página 151 do manual.
• Análise de um documento (documento A) sobre os motivos da nomeação de um governador-geral para o Oriente. Visualização dos dois principais vice-reis do Oriente (Imagem B e C).
• Análise do documento 6, da página 152 do manual para perceber quais os costumes que os chineses tinham, de modo a chamar a atenção para a diferença de culturas.
• Visualização e análise da imagem 53, da página 152 do manual sobre a cidade de Goa – capital do Império português Oriente. Para complementar esta imagem, a turma irá visualizar um mapa (mapa D), mostrando o trajeto da Carreira da Índia.
• Visualização de um esquema do manual, que os alunos completarão com outros produtos, nomeadamente, os Portugueses levavam ainda o azeite, vinho, açúcar e tecidos e do Oriente traziam, também, armas, tapeçarias e cavalos.
• Visualização/análise da imagem 56 do manual sobre a ação dos jesuítas no Japão, nomeadamente, S. Francisco Xavier.
• Trabalho de casa: realização das perguntas (1 à 5), da página 153 do manual.
• Os alunos ditam o sumário e um deles escreve-o no quadro.</td></tr>
<tr><td colspan="2">AVALIAÇÃO: Observação centrada na utilização de diferentes instrumentos de trabalho e análise dos mesmos; Observação da capacidade de intervenção; Observação das respostas dadas às diversas perguntas; Participação; Interesse.</td></tr>
<tr><td>SUMÁRIO: - O Império português no século XVI: os territórios na Ásia.</td><td>OBSERVAÇÕES: aula de 45 minutos.</td></tr>
</table>

Anexo 3

<table>
<tr><td colspan="2">

Plano de Aula – Ciências da Natureza
Ano:___5º___ Turma: _A___ Data:__30-04-2012__ Ano letivo:__2011/2012___
O professor: ___Carlos Nuno Antunes Cerquinha__ Unidade didática: _6_(bloco 3)_
A estagiária: ____Andreia Ribeiro__ Horas: _15.25 – 16.55__

</td></tr>
<tr><td>

OBJETIVOS:
Cooperar em atividades de grupo.
Respeitar normas gerais de segurança em atividades experimentais.
Manusear instrumentos simples de laboratório.
Revelar capacidades de observar e ordenar as observações.
Interpretar dados e tirar conclusões.
Identificar, experimentalmente, propriedades da água e do ar.
Revelar curiosidade, reflexão crítica e espirito de abertura.
Exprimir-se de forma clara, oralmente e por escrito.
Revelar a capacidade de aprender a pensar.
Compreender as implicações da ciência, no dia-a-dia da atividade humana.

</td><td>

TEMAS/TÓPICOS/CONTEÚDOS:

Bloco 3 – Unidade 6: Importância do ar para os seres vivos. Propriedades do ar.

</td></tr>
<tr><td>

METAS:
Domínio: Sustentabilidade na Terra
Subdomínio: Mudança Global
Meta Final 5) O aluno explica os principais fatores de poluição da água, do ar e do solo, os impactes dessa poluição e a necessidade da preservação dos ecossistemas.
Domínio: Viver Melhor na Terra
Subdomínio: Saúde e Segurança
Meta Final 9) O aluno identifica agressões do meio e explica a sua influência no equilíbrio natural e na integridade dos organismos.
Subdomínio: Materiais
Meta Final 11) O aluno sistematiza propriedades do solo, do ar e da água, verificadas por via experimental e manipula dispositivos em projetos e investigações.

</td><td>

OUTROS RECURSOS:
Caderno diário;
Quadro e giz.
PowerPoint – propriedades do ar.
Protocolo 1

</td></tr>
</table>

ESTRATÉGIAS/ATIVIDADES

- Os alunos entrarão na sala de aula, e serão distribuídos logo em três grupos. Estes grupos foram formados previamente de acordo com a heterogeneidade da turma formando grupos homogéneos.
  Assim, sentar-se-ão no lugar que o professor lhes atribuirá.
- Seguidamente será escrito o sumário pelos alunos.
- Haverá um breve diálogo, com o objetivo de criar um debate entre os alunos sobre a importância do ar para os seres vivos, questionando-os:
  "- Por que acham que o ar é importante para os seres vivos?"

Desta forma, o professor irá ouvir a opinião dos alunos e perceber as suas conceções.

- Seguidamente a turma será questionada: onde acham que existe ar? (espera-se ouvir a opinião dos alunos acerca das suas ideias sobre a presença de ar).

- Uma vez que se inicia um novo bloco, analisar-se-á a seguir a página 170 do manual para verificar onde utilizamos o ar. Interligando as ideias dos alunos anteriores com os novos conhecimentos.
- A seguir, a turma irá visualizar um PowerPoint interligado com um vídeo sobre o filme: "Up". Este servirá de motivação e as suas personagens irão seguir o trabalho da turma ao longo da restante aula. O PowerPoint apresentará um problema em torno da importância do ar e das propriedades do ar, onde os alunos têm de ajudar as personagens. Ou seja, ajudar uma personagem a ganhar um crachá e ensinar à outra personagem as propriedades do ar. Realizando para isto algumas atividades.
- Será analisado inicialmente as camadas da atmosfera, remetendo, no PowerPoint, para o livro, página 171. Os alunos serão questionados:
  - Sabem o que é a atmosfera?
  - Por quantas camadas é constituída a atmosfera?
  - Qual a diferença entre as várias camadas da atmosfera?
- Depois, entrega-se o protocolo 1, no entanto, este vai ser entregue folha a folha nos momentos apropriados. À medida que se vai avançando no protocolo o material vai sendo entregue aos alunos já organizado e, também, depois de já ter sido explicado o que os discentes vão fazer e como vão desenvolver a atividade. No decurso das várias atividades a realizar, estas terão individualmente três momentos, previsão, realização e conclusão, de forma a não misturar as conclusões de cada uma. No final do protocolo irá comparar-se as previsões com as conclusões observadas.
- No final, caso haja tempo a turma irá resolver as questões da página número 172 e 173 do manual, se não, fica para trabalho de casa.
- Para trabalho de casa os alunos terão de realizar as questões da página 171.

AVALIAÇÃO: Avaliar a intervenção dos alunos ao longo da aula através, por exemplo, dos seguintes registos: - concretização das atividades; - respeito pelas normas de trabalho e de convivência; - qualidade da participação oral e escrita; - cooperação no trabalho; - capacidade de síntese e de análise.	
SUMÁRIO: - Importância do ar para os seres vivos. - Propriedades do ar.	OBSERVAÇÕES: aula de 90 minutos.

Anexo 4

<table>
<tr><td colspan="2">Plano de Aula - Matemática
Ano:___5º____ Turma: _A___ Data:__16-04-2012__ Ano letivo:__2011/2012___
O professor: __Luís Miguel Rodrigues Martins__ Unidade didática: _6___
A estagiária: ____Andreia Ribeiro__ Horas: _08.30 – 10.00__</td></tr>
<tr><td>OBJETIVOS:

- Compreender as propriedades e regras das operações e usá-las no cálculo.

- Identificar as propriedades da circunferência e distinguir circunferência de círculo.

- Determinar um valor aproximado de π.
- Resolver problemas envolvendo perímetros do círculo.

- Interpretar a informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas.
- Representar informação e ideias matemáticas de diversas formas.
- Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios.</td><td>TEMAS/TÓPICOS/CONTEÚDOS:
NÚMEROS E OPERAÇÕES

1. Números Naturais
1.1. Propriedades das operações e regras operatórias.

GEOMETRIA:
1. Figuras no plano
1.1. Círculo e circunferência: propriedades e construção.

1. Perímetros
1.1. Círculo

Comunicação matemática
1.1. Interpretação
1.2. Representação
1.3. Expressão
1.4. Discussão</td></tr>
<tr><td>RECURSOS:
Manual, pp.______54 e 55______
Caderno de atividades, pp.____72_______</td><td>OUTROS RECURSOS: PowerPoint sobre o “pi”</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pré – requisitos dos alunos: círculo, circunferência, raio, diâmetro. Divisão. Realizar medições utilizando unidades de medida.</td></tr>
</table>

ESTRATÉGIAS/ATIVIDADES: A aula irá começar com a escrita do sumário, sendo escolhido um aluno aleatoriamente para o ir escrever ao quadro. Seguidamente, a turma irá corrigir os trabalhos de casa, os alunos serão escolhidos aleatoriamente para irem ao quadro. Explicando o seu raciocínio nas tarefas desenvolvidas. Posteriormente haverá um breve diálogo com os alunos sendo estes questionados: - **Lembram-se qual é a diferença entre círculo e circunferência?** (circunferência – é uma linha curva, fechada, com todos os pontos à mesma distância do centro; círculo – é o espaço delimitado pela circunferência. Esta será desenhada no quadro) - **O círculo é um polígono? Porquê?** (não) - **O que é o raio?** (é um segmento de reta que une o centro a qualquer ponto da circunferência.) - **Sabem como o jardineiro desenha uma circunferência num …** - **O que é uma corda?** (é um segmento de reta que une quaisquer dois pontos da circunferência, passando ou não pelo seu centro.) - **O que é o diâmetro?** (é uma corda que une dois pontos da circunferência passando pelo seu centro, sendo a maior corda que encontramos na circunferência.) - **Como iremos medir o perímetro de um círculo?** (o perímetro de um círculo é o comprimento da circunferência que o limita) Depois de um breve diálogo os alunos vão realizar a exploração do perímetro de um círculo através de uma atividade. (anexo 1) A seguir a esta atividade será explicado aos alunos, tendo eles que escrever no caderno, que "o perímetro de um círculo é um pouco maior que o triplo do diâmetro. 3xd é uma boa estimativa do perímetro de um círculo". Depois, irão visualizar um powerpoint sobre a história do "pi" e que este se representa pela letra grega **π** e que o valor de "pi" (3,14159265 …) não é um número racional, mas sim, pertence ao conjunto dos números irracionais e que o seu valor aproximadamente se escreve 3,14. Posteriormente, a turma irá visualizar a página 54 (anexo 2) do manual relativamente às fórmulas que se podem usar para calcular o perímetro de um círculo. Lendo e sublinhando o mais importante. Para finalizar a aula a turma irá realizar as tarefas propostas pelo manual da página 55 (anexo 3). Antes de realizarem a tarefa número 1 os alunos serão questionados de **como irão medir o perímetro dos círculos apresentados**, com o objetivo de mencionarem as duas fórmulas de calcular o perímetro de um círculo. A tarefa número 1 e 2 do manual serão realizadas individualmente pelos alunos, posteriormente será corrigida no quadro, sendo os alunos escolhidos aleatoriamente e tendo de explicar o seu raciocínio. Para trabalho de casa os discentes irão realizar as tarefas número 3 e 4 do manual (anexo 3) e a tarefa número 6 do livro de fichas da página 72 (anexo 4).
AVALIAÇÃO: Participação, empenho e atenção dos alunos durante a aula. Raciocínio e comunicação dos alunos explicando corretamente como pensaram. Os alunos percebem o cálculo do perímetro do círculo, aplicando-o corretamente. Os alunos adquirem o conceito de PI e o seu valor.

SUMÁRIO:	OBSERVAÇÕES: aula de 90 minutos.
- Correção dos trabalhos de casa. - Perímetro de um círculo.	

Anexo 5

Exmo. Sr. ou Sra.

Encarregado (a) de educação,

No âmbito do curso de Mestrado em Ensino do 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico, pretendo realizar um estudo, na turma onde o seu educando se insere, centrado no domínio da Matemática, em particular, na Resolução de Problemas de Padrões.

Serão propostas algumas tarefas de resolução de problemas para analisar as estratégias e a comunicação escrita utilizada pelos alunos. Estas atividades contribuirão para o desenvolvimento de várias capacidades matemáticas como: a capacidade de resolver problemas, conjeturar, argumentar, raciocinar, representar e comunicar.

Desta forma será necessário proceder à recolha de dados através de registos vídeo, áudio e de documentos como as tarefas realizadas pelos alunos, pelo que peço a vossa compreensão neste sentido. Tudo com o objetivo de recolher e analisar a comunicação do aluno, quer escrita e oral. Os dados recolhidos serão confidenciais e apenas serão utilizados para o desenvolvimento deste trabalho de investigação. Assim como, serão usados pseudónimos quando tiver de me referir aos alunos.

Estou disponível para qualquer esclarecimento adicional, respondendo a questões e dúvidas que possam surgir relativamente a esta situação.

Grata pela atenção,

A mestranda,

____

(Andreia Ribeiro)

\- Eu,

____

Encarregado (a) de Educação do (a) ____, declaro que autorizo a gravação áudio e vídeo e a participação do meu educando nas atividades propostas.

____

(Assinatura)

Anexo 6

- Tópicos para a entrevista inicial: (semi-estruturada)

1 - Gostas da disciplina de matemática? Porquê?
2 - O que pensas da matemática? Será que é importante aprender matemática? Porquê?
3 - Tens dificuldades de aprendizagem na matemática?
- Se sim em que conteúdos?
4 - Gostas das tarefas que fazes na sala de aula? Porquê?
5 - Que pensas das aulas de matemática? São interessantes ou não?
6 - O que gostavas de fazer nas aulas de matemática para as tornar mais interessantes?
7 - Estudas matemática em casa? Como é que estudas matemática?
8 - Que diferença notas-te entre a matemática que aprendeste no 1º ciclo e agora a que estás a aprender no 5º ano?
9 - Queres dizer algo mais sobre a matemática e as aulas de matemática?

- Tópicos para a entrevista final: (semi-estruturada)

1 – O que achaste das tarefas de contagens? Gostaste? Porquê? Davam-te vontade de procurar outras soluções? Ajudaram-te a resolver os problemas de padrão?
2 – O que achaste das tarefas de sequências de padrão? Porquê?
3 – Já tinhas tido contacto com este tipo de tarefas antes?
4 – Qual das tarefas gostaste mais? Porquê?
5 – O que achaste mais difícil nestas tarefas? A compreensão do problema? A resolução do problema? A identificação do padrão ou organização dos dados? Porquê que é difícil?
6 – Preferiste realizar as tarefas com padrões em que te era dado já a sequência ou as tarefas onde tinhas de ser tu a construi-la? Porquê?
7 – Gostas mais das aulas de matemática através destas tarefas? Porquê?
8 – Achas que estas tarefas envolvem “muita” matemática ou pouca? Explica.
9 – Que parte da resolução destes problemas é que achaste mais difícil?
10 – Tiveste mais dificuldades em explicar o teu raciocínio por escrito ou oralmente? Ou os dois? Explica.
11 – Aprendeste alguma coisa com a resolução que os teus colegas mostraram? Se sim, o quê?
12 – Achaste importante o professor corrigir a tarefa no final? Porquê?
13 – Como achas que estas tarefas podiam ser exploradas para te ajudar mais?

Anexo 7

Codificação dos dados

	Mariana	Martim
Entrevista 1	EMA1	EMO1
Entrevista 2	EMA2	EMO2
Vídeo/Observação 1: *Morangos em V*	---	VOMO1
Vídeo/Observação 2: *Os Comboios de Polígonos*	VOMA2	VOMO2
Vídeo/Observação 3: *Com Quadradinhos*	VOMA3	VOMO3
Vídeo/Observação 4: Documentos elaborados: *Regiões no Retângulo*	VOMA4	VOMO4
Vídeo/Observação 5: *A Moldura*	VOMA5	VOMO5
Vídeo/Observação 6: *Na Cantina*	VOMA6	VOMO6
Documentos elaborados pelo aluno 1: *As Caixas de Corações*	DMA1	DMO1
Documentos elaborados pelo aluno 2: *Os Comboios de Polígonos*	DMA2	DMO2
Documentos elaborados pelo aluno 3: *Com Quadradinhos*	DMA3	DMO3
Documentos elaborados pelo aluno 4: *Regiões no Retângulo*	DMA4	DMO4
Documentos elaborados pelo aluno 5: *Os Z*	DMA5	DMO5
Documentos elaborados pelo aluno 6: *A Moldura*	DMA6	DMO6
Documentos elaborados pelo aluno 7: *Na Cantina*	DMA7	DMO7
Documentos elaborados pelo aluno no quadro	---	QMO

Anexo 8

1. Observa os três Vs desenhados.

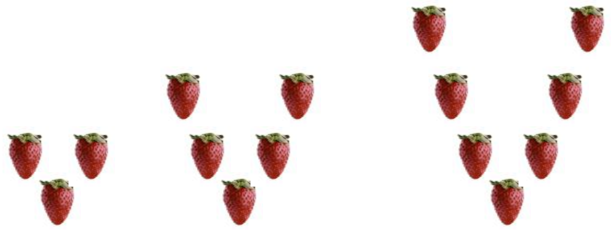


Figura 1 Figura 2 Figura 3

1.1. Desenha a Figura 4 e a Figura 5 da sequência.

2. Quantos morangos tem cada uma das figuras?

3. Quantos morangos terá a 10ª figura? E a 15ª figura?

- Utiliza as tabelas junto para escreveres os diferentes modos de contagem:

Nº da Figura	**Nº de Morangos**
1	
2	
3	
4	
5	
…	
10	
15	

Modo de ver 1	**Modo de ver 2**	**Modo de ver 3**

4. Que podes concluir? E a figura n, quantos morangos terá?

Anexo 9

A Joana começou por fazer, para o dia dos namorados, uma caixinha para bombons tendo colado uns corações em todas as faces. Na 2ª semana colou duas caixas e colou corações nas faces; 3ª semana colou três caixas e colou os respetivos corações; e assim sucessivamente.

1. Quantas caixinhas fez na 10ª semana?

2. Quantos corações colocou na 1º caixinha?

3. Quantos corações usou na construção da 5º semana? E na 25ª? E na 100ª?

4. Explica como pensaste.

Anexo 10

Constrói comboios formados por triângulos iguais.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

Cada polígono está ligado completamente ao anterior por um lado.

Considera o comprimento da palhinha a unidade.

1. Descobre o número de palhinhas que constitui cada comboio.

2. Descobre o número de carruagens que constitui cada figura.

3. Descobre o perímetro para o comboio de 4, 5, 6, 7, 8 e 15 carruagens.

4. Tenta descobrir para um comboio com 20 carruagens o número de palhinhas, o número de carruagens e o perímetro do comboio.

5. E para um comboio com n carruagens?

Anexo 11

As figura da sequência são constituídas por quadrados.

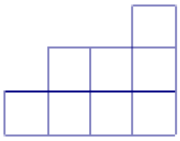


Fig.1

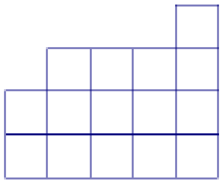


Fig. 2

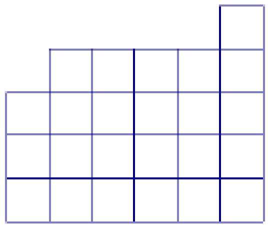


Fig.3

1. Desenha a figura seguinte.

2. Qual a área de cada uma das figuras, tomando a área do quadrado como unidade?

3. Descobre uma regra que te permita determinar a área de uma figura de qualquer ordem.

4. Explica, a um colega que não acredita na tura regra, porque é que ela funciona.

Anexo 12

Observa a sequência de retângulos.

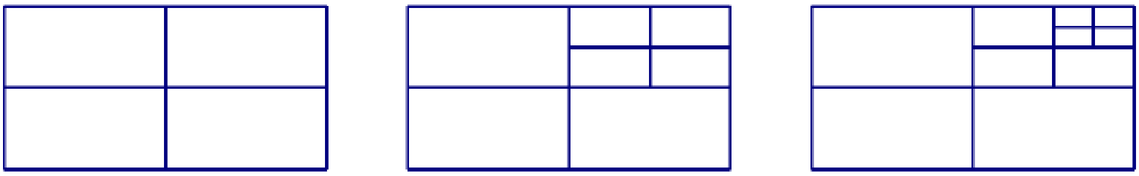


Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. Constrói a figura seguinte.

2. Determina o número de regiões em cada uma das figuras.

3. Qual o número de regiões na figura 100? Explica como pensaste.

Anexo 13

1. Olha para a seguinte sequência de imagens.

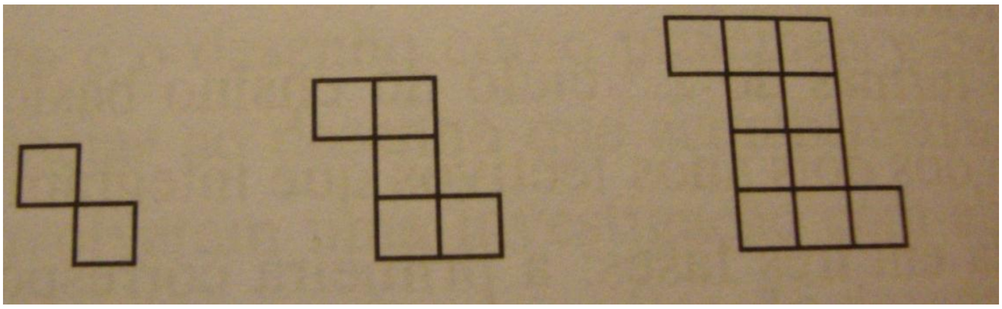


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

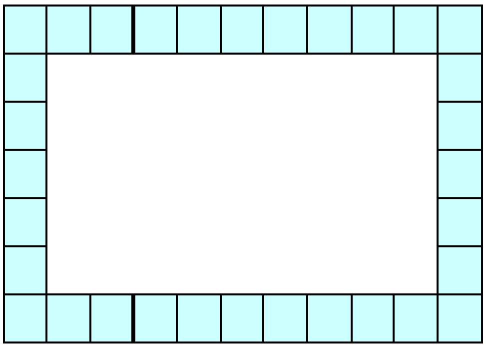
1.1. Continua a sequência, indicando os dois termos seguintes.

1.2. Quantos quadrados vão ser necessários para construir a figura nº 10? E a figura nº 25?

1.3. Tenta encontrar uma fórmula que te permita saber o número de quadrados necessários à construção de qualquer figura.

Anexo 14

A Moldura



A Moldarte faz molduras em espelhos retangulares formadas por azulejos quadrados, como mostra a figura.

1. Quantos azulejos são necessários para fazer o espelho representado na figura anterior?

2. Desenha/constrói espelhos de várias dimensões. Explica por palavras tuas, recorrendo a números, a tabelas, etc., o número de azulejos que são necessários para colocar à volta de um espelho com quaisquer dimensões.

3. Tenta encontrar uma fórmula que permita saber o número de azulejos necessários à construção de qualquer espelho.

Anexo 15

Na cantina

Na cantina da escola podem sentar-se a uma mesa quadrada quatro alunos. Se se juntarem duas mesas, podem sentar-se seis alunos.

Em quatro mesas quantos alunos se podem sentar?

E em cinco?

No Natal juntaram-se 40 mesas. Quantos alunos se poderão sentar? E se fossem 100 mesas?

Explica como pensaste.